DAMIEN ROY

Sur une version algébrique de la notion de sous-groupe minimal relatif de $\mathbb{R}^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 2 (1990), p. 171-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_2_171_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 171–191.

SUR UNE VERSION ALGÉBRIQUE DE LA NOTION DE SOUS-GROUPE MINIMAL RELATIF DE $\mathbf{R}^n$

PAR

DAMIEN ROY (*)

RÉSUMÉ. — Nous introduisons, pour des corps $k \subset K$, la notion algébrique de k-sous-espace minimal relatif de K^n, et celle, duale, de k-sous-espace étoilé relatif de K^n. La première traduit, pour $k = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{R}$, la notion topologique de sous-groupe minimal relatif de $\mathbb{R}^n$ rappelée dans l'introduction. Nous établissons certaines propriétés des k-sous-espaces étoilés relatifs de K^n, et, par dualité, nous en déduisons des propriétés correspondantes pour les k-sous-espaces minimaux relatifs de K^n.

ABSTRACT. — We introduce, for fields $k \subset K$, the algebraic notion of a relative minimal k-subspace of K^n, and the dual notion of a relative star-like k-subspace of K^n. The first one traduces, for $k = \mathbb{Q}$ and $K = \mathbb{R}$, the topological notion of a relative minimal subgroup of $\mathbb{R}^n$ recalled in the introduction. We obtain properties of relative star-like k-subspaces of K^n, from which, by duality, we deduce corresponding properties for relative minimal k-subspaces of K^n.

Introduction

Soient H, G des sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ avec $H \subset G$. Dans [3], § 1, on introduit les définitions suivantes. On dit que G est un sous-groupe *minimal* de $\mathbb{R}^n$ *relativement à* H si G est de type fini, dense dans $\mathbb{R}^n$, et si aucun sous-groupe de G contenant H, de rang inférieur au rang de G, n'est dense dans $\mathbb{R}^n$. On dit aussi que G est un sous-groupe *minimal* de $\mathbb{R}^n$ s'il est minimal relativement à 0. On dit que G est un sous-groupe *étoilé* de $\mathbb{R}^n$ *relativement à* H si G est de type fini, dense dans $\mathbb{R}^n$, et si $G \cap \langle u \rangle_{\mathbf{R}}$ est dense dans $\langle u \rangle_{\mathbf{R}}$ pour tout $u \in H$, où $\langle u \rangle_{\mathbf{R}}$ désigne le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par u. Enfin, on dit que G est un sous-groupe *étoilé* de $\mathbb{R}^n$ s'il est étoilé relativement à lui-même.

Soient k un corps, et K une extension de k. Dans cet article, on définit les notions analogues de k-sous-espace minimal relatif de K^n, de

(*) Texte reçu le 28 juin 1989, révisé le 30 août 1990.

D. ROY, Institut Henri-Poincaré, Problèmes diophantiens, 11, rue Pierre-et-Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1990/171/$ 5.00

k-sous-espace étoilé relatif de K^n, de k-sous-espace minimal de K^n, et de k-sous-espace étoilé de K^n. Le cas important est celui où $k = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{R}$. En effet, désignons par $\langle H\rangle_{\mathbb{Q}}$ et $\langle G\rangle_{\mathbb{Q}}$ les $\mathbb{Q}$-sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ engendrés respectivement par H et G. Les nouvelles définitions sont données de telle sorte que G soit un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si $\langle G\rangle_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ relativement à $\langle H\rangle_{\mathbb{Q}}$. Il s'ensuit que G est un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\langle G\rangle_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$.

Dans le nouveau contexte, des conditions algébriques sont substituées aux conditions topologiques. Pour ce faire, on transpose la notion de sous-groupe dense de $\mathbb{R}^n$, grâce à la caractérisation qu'en donne [1], § 1, n° 3. On obtient ainsi la notion de k-sous-espace de type (D) de K^n, sur laquelle se fondent les autres notions.

Le but de ce travail est d'établir certaines propriétés des k-sous-espaces minimaux relatifs et étoilés relatifs de K^n. Ces propriétés se traduisent immédiatement en des propriétés analogues des sous-groupes minimaux relatifs et étoilés relatifs de $\mathbb{R}^n$. On démontre ainsi les propositions énoncées sans démonstration au § 1 de [3]. Par ailleurs, cet article ne s'appuie pas sur [3]. Cependant, on trouvera dans [3] des questions qui motivent l'étude des sous-groupes minimaux relatifs de $\mathbb{R}^n$.

Le § 1 de cet article regroupe les définitions. Au § 2, on montre qu'il y a dualité entre les notions de k-sous-espace minimal relatif et de k-sous-espace étoilé relatif. Ainsi l'étude de la première se ramène à celle de la seconde. Pour la suite, on est amené à supposer que le corps k est parfait, de cardinalité infinie. Au § 3, on montre que la dimension d'un k-sous-espace étoilé de K^n est $\geq 2n$. On donne, pour $n \geq 2$, une caractérisation des k-sous-espaces étoilés de K^n, et des k-sous-espaces de K^n étoilés relativement à un k-sous-espace de codimension 1. La première fait voir qu'à chaque k-sous-espace étoilé de K^n répond une extension algébrique de k, contenue dans K, distincte de k. Au § 4, on en déduit que la dimension d'un k-sous-espace minimal de K^n est $\leq 2n$, et qu'elle est égale à $n+1$ si k est algébriquement clos dans K. On obtient aussi une description des k-sous-espaces minimaux de K^n de dimension $n+1$, $2n-1$ et $2n$. Ainsi, on montre que, pour $n \geq 2$, un k-sous-espace E de K^n de dimension $2n$ est minimal si et seulement s'il existe une extension quadratique F de k contenue dans K, et une base de K^n sur K, tels que E soit le F-sous-espace de K^n engendré par cette base. Enfin, on donne, pour $n \geq 2$, une caractérisation des k-sous-espaces de K^n de dimension $\geq n+2$, minimaux relativement à un k-sous-espace de dimension 1. On conclut par un critère de minimalité.

La poursuite de cette recherche, commencée au doctorat avec le support d'une bourse doctorale du FCAR (Québec), a été rendue possible grâce au soutien d'une bourse en sciences de l'OTAN du CRSNG (Canada). Elle a été accomplie au cours d'un stage au sein de l'équipe "Problèmes diophantiens" de l'université Paris VI, que je remercie de son accueil chaleureux.

Notations

Soit F un corps quelconque. Pour chaque entier $n \geq 0$, on munit le F-espace vectoriel F^n de sa forme bilinéaire standard, notée $(\ ,\ )_n$. Par suite, la *transposée* d'une application F-linéaire $f\colon F^m \to F^n$ est définie comme l'application F-linéaire ${}^t f\colon F^n \to F^m$ vérifiant $(x, {}^t f(y))_m = (f(x), y)_n$ pour tout $x \in F^m$ et $y \in F^n$. Si U est un F-sous-espace de F^n, on note $U^\perp$ le F-sous-espace de F^n orthogonal à U. On dit que deux sous-espaces de F^n sont *supplémentaires orthogonaux* si l'un est l'orthogonal de l'autre par rapport à $(\ ,\ )_n$. Si V est un F-espace vectoriel, et S un sous-ensemble de V, on note $\langle S\rangle_F$ le F-sous-espace de V engendré par S.

Dans la suite, on fixe le choix d'un corps k et d'une extension K de k. Si $f\colon k^m \to k^n$ est une application k-linéaire, on note f_K l'unique application K-linéaire de K^m dans K^n qui coïncide avec f sur k^m. Alors on a ${}^t(f_K) = ({}^t f)_K$. Si $m = n$ et si f est un isomorphisme, alors ${}^t f$ et f_K en sont aussi. On a $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$ et $(f_K)^{-1} = (f^{-1})_K$. Ainsi, pour un automorphisme f de k^n, les trois opérations : passage à l'inverse, passage à la transposée, et passage de f à f_K, commutent entre elles, et l'expression ${}^t f_K^{-1}$ n'est pas ambiguë. Les lettres $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ désignent les corps usuels.

1. Définitions

Soient n, n_1, n_2 des entiers positifs. On introduit d'abord trois définitions :

Définition. — Soit E un k-sous-espace de K^n. On définit le k-sous-espace de K^n associé à E par

$$E_{\mathrm{ass}/k} = \{x \in K^n \ ;\ (x, E)_n \subset k\}.$$

On dit que E est un k-sous-espace de *type* (D) de K^n si $E_{\mathrm{ass}/k} = 0$.

Définition. — On dit qu'un k-sous-espace E de K^n est *minimal relativement à un k-sous-espace $B \subset E$*, s'il est de dimension finie, de type (D), et ne contient aucun k-sous-espace de type (D) de K^n, contenant B, de dimension inférieure. On dit qu'il est *minimal*, s'il est minimal relativement à 0.

Définition. — On dit qu'un k-sous-espace E de K^n est *étoilé relativement à un k-sous-espace $B \subset E$*, s'il est de dimension finie, de type (D), et si la dimension de $E \cap \langle u \rangle_K$ sur k est ≥ 2 pour tout $u \in B$ non nul. On dit qu'il est *étoilé* s'il est étoilé relativement à lui-même.

Soient H, G des sous-groupes de type fini de $\mathbb{R}^n$, avec $H \subset G$. On pose $B = \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ et $E = \langle G \rangle_{\mathbb{Q}}$. D'après [1], § 1, n° 3, le groupe G est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si son sous-groupe associé

$$G_{\text{ass}} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; (x, G)_n \subset \mathbb{Z}\}$$

est réduit à $\{0\}$. On a $E_{\text{ass}/\mathbb{Q}} = \langle G_{\text{ass}} \rangle_{\mathbb{Q}}$. On en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace de type (D) de $\mathbb{R}^n$. En appliquant ce résultat à l'ensemble des sous-groupes de G contenant H, on obtient que G est un sous-groupe minimal de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal de $\mathbb{R}^n$ relativement à B. D'autre part, pour $u \in \mathbb{R}^n$, avec $u \neq 0$, le groupe $G \cap \langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $E \cap \langle u \rangle_{\mathbb{R}}$ est de dimension ≥ 2 sur $\mathbb{Q}$. On en déduit que G est un sous-groupe étoilé de $\mathbb{R}^n$ relativement à H si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace étoilé de $\mathbb{R}^n$ relativement à B. En particulier, G est un sous-groupe minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si E est un $\mathbb{Q}$-sous-espace minimal (resp. étoilé) de $\mathbb{R}^n$. Enfin, H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si B est engendré par des éléments de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ ([1], § 1, n° 1).

Ces remarques permettent de transcrire, en termes de sous-groupes de $\mathbb{R}^n$, les résultats qui seront énoncés par la suite en termes de k-sous-espaces de K^n. De telles transcriptions sont données dans [3], § 1. Les informations qu'elles livrent sur les sous-groupes minimaux relatifs de $\mathbb{R}^n$ sont employées dans [3] à l'étude des sous-groupes minimaux des groupes de Lie commutatifs réels, la composante neutre d'un tel groupe de Lie étant isomorphe, pour un entier $n \geq 0$, au quotient de $\mathbb{R}^n$ par un sous-groupe discret.

On introduit maintenant une relation d'équivalence sur l'ensemble des k-sous-espaces de dimension finie de K^n, et sur l'ensemble des couples (B, E) de k-sous-espaces de dimension finie de K^n, avec $B \subset E$. On introduit aussi une notion de dualité.

Définition. — Soient E_1, E_2 des k-sous-espaces de K^n de dimension finie. On dit qu'ils sont *équivalents* s'il existe un automorphisme de K^n qui applique E_1 sur E_2.

Soient B_1 un sous-espace de E_1, et B_2 un sous-espace de E_2. On dit que les couples (B_1, E_1) et (B_2, E_2) sont *équivalents* s'il existe un automorphisme de K^n qui applique B_1 sur B_2 et E_1 sur E_2.

Définition. — Soient E_1 un k-sous-espace de K^{n_1} de dimension finie, et E_2 un k-sous-espace de K^{n_2} de dimension finie. On dit qu'ils sont *duaux* s'ils ont même dimension $m = n_1 + n_2$, et s'il existe des applications linéaires surjectives $f_1 : K^m \to K^{n_1}$, $f_2 : K^m \to K^{n_2}$, de noyaux supplémentaires orthogonaux, telles que $f_1(k^m) = E_1$ et $f_2(k^m) = E_2$.

Soient B_1 un sous-espace de E_1, et B_2 un sous-espace de E_2. On dit que les couples (B_1, E_1) et (B_2, E_2) sont *duaux* si E_1 et E_2 ont même dimension $m = n_1 + n_2$, et s'il existe des applications linéaires f_1, f_2 comme ci-dessus, et des sous-espaces U_1, U_2 de k^m, supplémentaires orthogonaux dans k^m, tels qu'on ait en plus $f_1(U_1) = B_1$ et $f_2(U_2) = B_2$.

2. Équivalence et dualité

On va montrer que les caractères "minimal" et "étoilé" sont conservés sous l'équivalence, et qu'ils s'échangent sous la dualité. Ce seront les PROPOSITIONS 2.1 et 2.5. On verra, par la PROPOSITION 2.7, que, lorsqu'il existe, le dual est défini à équivalence près. De ces trois propositions découlent respectivement les propositions 1.1, 1.2 et 1.3 de [3]. Enfin, on verra, dans la PROPOSITION 2.8, une forme concrète de ces résultats pour le cas absolu.

PROPOSITION 2.1. — *Soient n un entier positif, et E_1, E_2 des k-sous-espaces de dimension finie de K^n. Supposons qu'ils soient équivalents. Alors E_1 et E_2 ont même dimension. De plus, si E_1 est un k-sous-espace de type* (D), *minimal, ou étoilé de K^n, alors E_2 l'est aussi.*

Soient B_1 un sous-espace de E_1, et B_2 un sous-espace de E_2. Supposons que les couples (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient équivalents. Alors E_1 et E_2 ont même dimension. Si B_1 est engendré par des éléments de K^n linéairement indépendants sur K, ou s'il contient une base de K^n sur K, la même chose vaut pour B_2. Si E_1 est de type (D), *E_2 l'est aussi. Enfin, si E_1 est un k-sous-espace minimal ou étoilé de K^n relativement à B_1, alors E_2 est dans la même relation par rapport à B_2.*

Démonstration. — Supposons que (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient équivalents. Il existe un automorphisme Ψ de K^n tel que $\Psi(B_2) = B_1$ et $\Psi(E_2) = E_1$. Par restriction Ψ détermine un k-isomorphisme de E_2 sur E_1. Alors la correspondance $E \mapsto \Psi(E)$ fournit une bijection entre les k-sous-espaces de E_2 contenant B_2 et ceux de E_1 contenant B_1. Elle préserve la dimension sur k, et vérifie $E_{\mathrm{ass}/k} = {}^t\Psi(((\Psi(E))_{\mathrm{ass}/k})$. Donc un sous-espace E de E_2 est de type (D) si $\Psi(E)$ l'est. On en déduit que E_2 est de type (D) si E_1 l'est, et que E_2 est minimal relativement à B_2 si E_1 est minimal relativement à B_1. On a aussi $\Psi(E_2 \cap \langle u\rangle_K) = E_1 \cap \langle\Psi(u)\rangle_K$ pour tout $u \in B_2$. On en déduit que E_2 est étoilé relativement à B_2 si E_1 est étoilé relativement à B_1. Cela démontre la seconde partie de la proposition, à l'exception de la seconde assertion, qui est immédiate.

Enfin, supposons que E_1 et E_2 soient équivalents. Alors les couples $(0, E_1)$ et $(0, E_2)$ sont équivalents. En vertu de la seconde partie de la proposition, cela implique que E_1, E_2 ont même dimension sur k, et que, si E_1 est de type (D) ou minimal, E_2 l'est aussi. Les couples (E_1, E_1) et (E_2, E_2) aussi sont équivalents. Alors E_2 est étoilé si E_1 l'est.

LEMME 2.2. — *Soient n_1, n_2 des entiers positifs, m leur somme, et $f_1\colon K^m \to K^{n_1}$, $f_2\colon K^m \to K^{n_2}$ des applications linéaires surjectives de noyaux supplémentaires orthogonaux. On pose $E_1 = f_1(k^m)$ et $E_2 = f_2(k^m)$. Alors E_1 est un k-sous-espace de type* (D) *de K^{n_1} si et seulement si E_2 est un k-sous-espace de dimension m de K^{n_2}.*

Démonstration. — Pour tout $x \in K^{n_1}$, on a $(x, E_1)_{n_1} = ({}^tf_1(x), k^m)_m$. Donc la condition $x \in (E_1)_{\mathrm{ass}/k}$ équivaut à ${}^tf_1(x) \in k^m$. On en déduit ${}^tf_1((E_1)_{\mathrm{ass}/k}) = {}^tf_1(K^{n_1}) \cap k^m$. Or, d'une part, ${}^tf_1$ est injective, puisque f_1 est surjective. D'autre part, on a ${}^tf_1(K^{n_1}) = \ker f_2$. Donc E_1 est un k-sous-espace de type (D) de K^{n_1} si et seulement si f_2 est injective sur k^m, c'est-à-dire si et seulement si $\dim_k E_2 = m$.

LEMME 2.3. — *Avec les notations du* LEMME 2.2, *supposons que E_2 soit de dimension m sur k. Soient x un élément non nul de k^m, et $x^\perp$ le sous-espace de k^m orthogonal à x. Alors le sous-espace $f_1(x^\perp)$ de E_1 n'est pas de type* (D) *dans K^{n_1} si et seulement si la dimension de $E_2 \cap \langle f_2(x)\rangle_K$ sur k est ≥ 2.*

Démonstration. — Puisque $\dim_k E_2 = m$, l'application f_2 est injective sur k^m, et on a $f_2(x) \neq 0$. Soit $y \in k^m$ tel que $(x, y)_m = 1$. On pose $M = \{t \in K\ ;\ tf_2(x) \in E_2\}$, et on considère l'application k-linéaire $\theta\colon (f_1(x^\perp))_{\mathrm{ass}/k} \to K/k$ donnée par $\theta(z) = (z, f_1(y))_{n_1} + k$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est injective d'image égale à M/k.

On a $k^m = x^\perp + \langle y\rangle_k$, donc $E_1 = f_1(x^\perp) + \langle f_1(y)\rangle_k$. Alors le noyau de θ est $(E_1)_{\mathrm{ass}/k}$. Comme E_1 est de type (D) dans K^{n_1} en vertu du LEMME 2.2, cela signifie que θ est injective.

Pour tout $z \in K^{n_1}$ et tout $t \in K$, les conditions $z \in (f_1(x^\perp))_{\mathrm{ass}/k}$ et $\theta(z) = t + k$ équivalent à $({}^tf_1(z), x^\perp)_m \subset k$ et $({}^tf_1(z), y)_m - t \in k$, ou encore à $({}^tf_1(z) - tx, k^m)_m \subset k$, ou encore à ${}^tf_1(z) - tx \in k^m$. Donc un élément $t + k$ de K/k appartient à l'image de θ si et seulement si $tx \in k^m + {}^tf_1(K^{n_1})$. Comme ${}^tf_1(K^{n_1}) = \ker f_2$, cette dernière condition équivaut à $tf_2(x) \in E_2$. Donc l'image de θ est M/k.

LEMME 2.4. — *En conservant les notations du* LEMME 2.2, *supposons que E_1 soit de dimension m sur k. Soient U_1 et U_2 des sous-espaces supplémentaires orthogonaux de k^m. On pose $B_1 = f_1(U_1)$ et $B_2 = f_2(U_2)$. Alors B_1 est engendré par des éléments de K^{n_1} linéairement indépendants sur K si et seulement si $\langle B_2\rangle_K = K^{n_2}$.*

Démonstration. — Puisque $\dim_k E_2 = m$, l'application f_1 est injective sur k^m, et on a $\dim_k B_1 = \dim_k U_1$. On a aussi $\langle B_1\rangle_K = f_1(\langle U_1\rangle_K)$ et $\dim_K\langle U_1\rangle_K = \dim_k U_1$. Donc la condition que B_1 soit engendré par des éléments de K^{n_1} linéairement indépendants sur K, qui se traduit par $\dim_k B_1 = \dim_K\langle B_1\rangle_K$, équivaut à l'injectivité de f_1 sur $\langle U_1\rangle_K$. Puisque $((\ker f_1) \cap \langle U_1\rangle_K)^\perp = (\ker f_2) + \langle U_2\rangle_K$, cette condition équivaut encore à $(\ker f_2) + \langle U_2\rangle_K = K^m$. Comme f_2 est surjective, et que $f_2(\langle U_2\rangle_K) = \langle B_2\rangle_K$, cela revient à demander $\langle B_2\rangle_K = K^{n_2}$.

On en déduit :

PROPOSITION 2.5. — *Soient n_1, n_2 des entiers positifs, et m leur somme. Soient E_1 un k-sous-espace de dimension finie de K^{n_1}, et E_2 un k-sous-espace de dimension finie de K^{n_2}. Supposons qu'ils soient duaux. Alors E_1 et E_2 sont de type* (D) *et de dimension m. De plus E_1 est un k-sous-espace minimal de K^{n_1} si et seulement si E_2 est un k-sous-espace étoilé de K^{n_2}.*

Soient B_1 un sous-espace de E_1, et B_2 un sous-espace de E_2. Supposons maintenant que les couples (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient duaux. Alors E_1 et E_2 sont de type (D) *et de dimension m. On a $\dim_k B_1 + \dim_k B_2 = m$. De plus B_1 est engendré par des éléments de K^{n_1} linéairement indépendants sur K si et seulement si $\langle B_2\rangle_K = K^{n_2}$. Enfin, E_1 est un k-sous-espace minimal de K^{n_1} relativement à B_1 si et seulement si E_2 est un k-sous-espace étoilé de K^{n_2} relativement à B_2.*

Démonstration. — La première partie de la proposition découle de la seconde. En effet, si E_1 et E_2 sont duaux, alors les couples $(0, E_1)$ et (E_2, E_2) sont duaux, et la conclusion suit.

Supposons donc que (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient duaux. Alors E_1, E_2 ont pour dimension m, et il existe des applications linéaires surjectives $f_1 : K^m \to K^{n_1}$, $f_2 : K^m \to K^{n_2}$ de noyaux supplémentaires orthogonaux, et des sous-espaces U_1, U_2 de k^m, supplémentaires orthogonaux dans k^m, tels que $f_1(U_1) = B_1$, $f_1(k^m) = E_1$, $f_2(U_2) = B_2$ et $f_2(k^m) = E_2$. Puisque f_1 et f_2 sont injectives sur k^m, on a $\dim_k B_1 + \dim_k B_2 = \dim_k U_1 + \dim_k U_2 = m$. En vertu du LEMME 2.2, E_1 et E_2 sont de type (D). Donc pour que E_1 soit un k-sous-espace minimal de K^{n_1} relativement à B_1, il faut et il suffit que, pour tout $x \in U_2$ non nul, $f_1(x^\perp)$ ne soit pas un k-sous-espace de type (D) de K^{n_1}, où $x^\perp$ désigne le sous-espace de k^m orthogonal à x. De même, pour que E_2 soit un k-sous-espace étoilé de K^{n_2} relativement à B_2, il faut et il suffit que, pour tout $x \in U_2$ non nul, la dimension de $E_2 \cap \langle f_2(x) \rangle_K$ sur k soit ≥ 2. Suivant le LEMME 2.3, ces deux conditions sont équivalentes. Enfin le LEMME 2.4 montre que B_1 est engendré par des éléments de K^{n_1} linéairement indépendants sur K si et seulement si $\langle B_2 \rangle_K = K^{n_2}$.

LEMME 2.6. — *Soient n_1, n_2 des entiers positifs, $B_1 \subset E_1$, $B_1' \subset E_1'$ des k-sous-espaces de dimension finie de K^{n_1}, et $B_2 \subset E_2$, $B_2' \subset E_2'$ des k-sous-espaces de dimension finie de K^{n_2}.*

(i) *Supposons que (B_1, E_1) et (B_1', E_1') soient équivalents, de même que (B_2, E_2) et (B_2', E_2'). Alors (B_1, E_1) et (B_2, E_2) sont duaux si et seulement si (B_1', E_1') et (B_2', E_2') sont duaux.*

(ii) *Supposons que (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient duaux, de même que (B_1', E_1') et (B_2', E_2'). Alors (B_1, E_1) et (B_1', E_1') sont équivalents si et seulement si (B_2, E_2) et (B_2', E_2') sont équivalents.*

Démonstration.

(i) Par hypothèse, il existe des automorphismes Ψ_1 de K^{n_1} et Ψ_2 de K^{n_2} tels que $\Psi_i(B_i) = B_i'$ et $\Psi_i(E_i) = E_i'$ pour $i = 1, 2$. Supposons que (B_1, E_1) et (B_2, E_2) soient duaux. Alors E_1 et E_2 ont même dimension $m = n_1 + n_2$, et il existe des applications linéaires surjectives $f_1 : K^m \to K^{n_1}$, $f_2 : K^m \to K^{n_2}$, de noyaux supplémentaires orthogonaux, et des sous-espaces U_1, U_2 de k^m, supplémentaires orthogonaux dans k^m, tels que $f_i(U_i) = B_i$ et $f_i(k^m) = E_i$ pour $i = 1, 2$. On pose $f_1' = \Psi_1 \circ f_1$ et $f_2' = \Psi_2 \circ f_2$. Alors f_1' et f_2' sont surjectives, et leurs noyaux sont supplémentaires orthogonaux. On a $f_i'(U_i) = B_i'$ et $f_i'(k^m) = E_i'$ pour $i = 1, 2$. De plus E_1' et E_2' sont aussi de dimension m. Donc les couples (B_1', E_1') et (B_2', E_2') sont duaux. La réciproque se démontre de la même façon.

(ii) Par hypothèse, E_1, E_2, E_1', E_2' ont même dimension $m = n_1 + n_2$, et il existe des paires d'applications linéaires surjectives $f_1 : K^m \to K^{n_1}$, $f_2 : K^m \to K^{n_2}$ et $f_1' : K^m \to K^{n_1}$, $f_2' : K^m \to K^{n_2}$, de noyaux supplémentaires orthogonaux, et des paires de sous-espaces U_1, U_2 et U_1', U_2' de k^m, supplémentaires orthogonaux dans k^m, tels que $f_i(U_i) = B_i$, $f_i(k^m) = E_i$, $f_i'(U_i') = B_i'$ et $f_i'(k^m) = E_i'$, pour $i = 1, 2$. Supposons que (B_1, E_1)

et (B'_1, E'_1) soient équivalents. Alors il existe un automorphisme Ψ_1 de K^{n_1} tel que $\Psi_1(B_1) = B'_1$ et $\Psi_1(E_1) = E'_1$. Puisque f_1 et f'_1 déterminent par restriction des isomorphismes de k^m sur E_1 et E'_1 respectivement, il existe un automorphisme ψ de k^m tel que $f'_1 \circ \psi$ coïncide avec $\Psi_1 \circ f_1$ sur k^m. Par linéarité, cela implique $f'_1 \circ \psi_K = \Psi_1 \circ f_1$. De cette égalité, on tire $\ker f'_1 = \psi_K(\ker f_1)$, d'où

$$\ker f'_2 = \big(\psi_K(\ker f_1)\big)^{\perp} = {}^t\psi_K^{-1}\big((\ker f_1)^{\perp}\big) = {}^t\psi_K^{-1}(\ker f_2).$$

Cela implique l'existence d'un automorphisme Ψ_2 de K^{n_2} tel que $\Psi_2 \circ f'_2 = f_2 \circ {}^t\psi_K$. En comparant l'image de k^m sous chacun des deux membres de cette égalité, on obtient $\Psi_2(E'_2) = E_2$, car ${}^t\psi$ est un automorphisme de k^m. En comparant les images de U'_2, on obtient de même $\Psi_2(B'_2) = B_2$. En effet, comme le choix de ψ implique $\psi(U_1) = U'_1$, on a, dans k^m,

$$U'_2 = \big(\psi(U_1)\big)^{\perp} = {}^t\psi^{-1}(U_1^{\perp}) = {}^t\psi^{-1}(U_2).$$

Donc les couples (B_2, E_2) et (B'_2, E'_2) sont équivalents. La réciproque se démontre de la même façon.

PROPOSITION 2.7. — *Soient n un entier positif, et E un k-sous-espace de K^n de dimension finie m. Pour que E admette un dual, il faut et il suffit qu'il soit de type* (D). *Alors m est $> n$, et les duaux de E sont des k-sous-espaces de type* (D) *de K^{m-n}, de dimension m. Ils constituent une classe d'équivalence dont chaque élément est dual à chaque élément de la classe d'équivalence de E.*

Soit B un sous-espace de E de dimension q. Pour que le couple (B, E) admette un dual, il faut et il suffit que E soit de type (D). *Alors m est $> n$, et les duaux de (B, E) sont des couples (B', E') de k-sous-espaces de K^{m-n}, avec $B' \subset E'$, B' de dimension $m - q$, et E' de type* (D), *de dimension m. Ils constituent une classe d'équivalence dont chaque élément est dual à chaque élément de la classe d'équivalence de (B, E).*

Démonstration. — La première partie de la proposition découle de la seconde, en fonction des observations suivantes. Les couples duaux à $(0, E)$ sont les couples (E', E') avec E' dual à E. Les éléments de la classe d'équivalence de $(0, E)$ sont les couples $(0, E_1)$ avec E_1 dans la classe d'équivalence de E. Enfin les éléments de la classe d'équivalence d'un couple (E', E') sont les couples (E'_1, E'_1) avec E'_1 dans la classe d'équivalence de E'. Il reste donc à démontrer cette seconde partie.

La PROPOSITION 2.5 montre que si (B, E) admet un dual, alors E est de type (D), on a $m > n$, et les duaux de (B, E) sont des couples

(B', E') de k-sous-espaces de K^{m-n}, avec $B' \subset E'$, B' de dimension $m - q$, et E' de type (D), de dimension m. Réciproquement, supposons que E soit de type (D). Cela implique $m > n$. Soient $f: K^m \to K^n$ une application linéaire telle que $f(k^m) = E$, et U un sous-espace de k^m tel que $f(U) = B$. Puisque E est de type (D), on a $f(K^m) = \langle E \rangle_K = K^n$. Donc f est surjective, et on peut construire une application linéaire surjective $f': K^m \to K^{m-n}$, de noyau $(\ker f)^\perp$. Soit U' le sous-espace de k^m orthogonal à U. On pose $B' = f'(U')$ et $E' = f'(k^m)$. En vertu du LEMME 2.2, E' est de dimension m. Donc les couples (B, E) et (B', E') sont duaux. La dernière assertion de la proposition découle du LEMME 2.6.

PROPOSITION 2.8. — *Soient n_1, n_2 des entiers positifs, m leur somme, $(u_1, \dots, u_{n_1})$ une base de K^{n_1}, $(v_1, \dots, v_{n_2})$ une base de K^{n_2} , et a_{ij} pour $i = 1, \dots, n_1$ et $j = 1, \dots, n_2$ des éléments de K. On pose*

$$E_1 = \langle u_1, \dots, u_{n_1}, a_{11}u_1 + \cdots + a_{n_1 1}u_{n_1}, \dots, a_{1n_2}u_1 + \cdots + a_{n_1 n_2}u_{n_1} \rangle_k,$$

$$E_2 = \langle v_1, \dots, v_{n_2}, a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n_2}v_{n_2}, \dots, a_{n_1 1}v_1 + \cdots + a_{n_1 n_2}v_{n_2} \rangle_k.$$

Alors E_1 est un k-sous-espace minimal de K^{n_1} de dimension m si et seulement si E_2 est un k-sous-espace étoilé de K^{n_2} de dimension m. Enfin, soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $K^{n_1 n_2}$. Désignons par $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_2$) l'ensemble que décrit E_1 (resp. E_2) lorsque $(u_1, \dots, u_{n_1})$ (resp. $(v_1, \dots, v_{n_2})$) parcourt l'ensemble des bases de K^{n_1} (resp. K^{n_2}) sur K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *$\mathcal{E}_1$ est l'ensemble des k-sous-espaces minimaux de K^{n_1} de dimension m ;*

(ii) *$\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des k-sous-espaces étoilés de K^{n_2} de dimension m.*

Démonstration. — Soit Ψ_1 (resp. Ψ_2) l'automorphisme de K^{n_1} (resp. K^{n_2}) qui applique la base standard de K^{n_1} (resp. K^{n_2}) sur $(u_1, \dots, u_{n_1})$ (resp. $(v_1, \dots, v_{n_2})$), et soit $\rho: K^{n_2} \to K^{n_1}$ l'application linéaire dont la matrice relative aux bases standards de K^{n_1} et de K^{n_2} est (a_{ij}). On considère les applications linéaires $f_i: K^{n_1} \times K^{n_2} \to K^{n_i}$ $(i = 1, 2)$ données par

$$f_1(x, y) = \Psi_1\big(x + \rho(y)\big) \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \Psi_2\big(y - {}^t\rho(x)\big)$$

pour tout $x \in K^{n_1}$ et $y \in K^{n_2}$. Elles appliquent $k^{n_1} \times k^{n_2}$ sur E_1 et E_2 respectivement. De plus elles sont surjectives, et leurs noyaux sont :

$$\ker f_1 = \big\{\big(-\rho(y), y\big) \ ; y \in K^{n_2}\big\} \quad \text{et} \quad \ker f_2 = \big\{\big(x, {}^t\rho(x)\big) \ ; x \in K^{n_1}\big\}.$$

Ceux-ci sont supplémentaires orthogonaux en vertu de l'égalité

$$\big((x,y),(-\rho(z),z)\big)_m = -\big(x,\rho(z)\big)_{n_1} + (y,z)_{n_2} = \big(y - {}^t\!\rho(x), z\big)_{n_2},$$

vérifiée pour tout $(x,y) \in K^{n_1} \times K^{n_2}$, et $z \in K^{n_2}$. Ainsi le LEMME 2.2 s'applique. Il montre que E_1 est de type (D) et de dimension m si et seulement si E_2 est de type (D) et de dimension m. Cette condition est nécessaire pour que E_1 soit minimal de dimension m, ou que E_2 soit étoilé de dimension m. Si elle est remplie, alors E_1 et E_2 sont duaux. Dans ce cas, la PROPOSITION 2.5 montre que E_1 est minimal de dimension m si et seulement si E_2 est étoilé de dimension m. Cela démontre la première partie de la proposition.

Supposons que la condition (i) soit vérifiée. La première partie de la démonstration montre alors que chaque élément de $\mathcal{E}_2$ est dual à un élément de $\mathcal{E}_1$, et vice versa. Comme $\mathcal{E}_2$ est une réunion de classes d'équivalence, on en déduit, grâce à la PROPOSITION 2.7, que $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des k-sous-espaces de dimension m de K^{n_2} qui sont duaux à un élément de $\mathcal{E}_1$. Selon les PROPOSITIONS 2.5 et 2.7, cela entraîne (ii). On montre de même que (ii) implique (i).

3. Sous-espaces étoilés relatifs

On commence par deux critères :

LEMME 3.1. — *Soient n un entier positif, et $B \subset E$ des k-sous-espaces de dimension finie de K^n, avec $\langle B\rangle_K = K^n$. Alors E est étoilé relativement à B si et seulement si $E \cap \langle u\rangle_K$ est de dimension ≥ 2 sur k pour tout $u \in B$ non nul.*

Démonstration. — Si la condition est remplie, on a l'inclusion $E_{\mathrm{ass}/k} \subset (\langle B\rangle_K)^\perp = 0$. Alors E est de type (D). Donc la condition est suffisante. Elle est nécessaire par définition.

LEMME 3.2. — *Soient n un entier positif, et E un k-sous-espace de dimension finie de K^n. Alors E est étoilé si et seulement si : $\langle E\rangle_K = K^n$ et $E \cap \langle u\rangle_K$ est de dimension ≥ 2 sur k pour tout $u \in E$ non nul.*

Démonstration. — Le LEMME 3.1 montre que la condition est suffisante. Elle est nécessaire, car si E est étoilé, il est de type (D), donc il vérifie $\langle E\rangle_K = K^n$.

On montre maintenant la proposition suivante, dont découle la proposition 1.5 de [3] :

PROPOSITION 3.3. — *Soient n un entier positif, et $B \subset E$ des k-sous-espaces de dimension finie de K^n, avec $\langle B \rangle_K = K^n$. Si E est étoilé relativement à B, sa dimension est $\geq 2n$.*

Démonstration. — Puisque $\langle B \rangle_K = K^n$, l'espace B contient une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de K^n sur K, et E contient la somme directe $(E \cap \langle u_1 \rangle_K) + \cdots + (E \cap \langle u_n \rangle_K)$. La conclusion suit.

Pour la suite, *on suppose que k est un corps parfait de cardinalité infinie.* Cette condition est remplie si k est de caractéristique 0, et en particulier si $k = \mathbb{Q}$. Elle implique que toute extension algébrique de k est séparable ([2], ch. VII, § 7, cor. de la prop. 12).

Pour chaque entier $n > 0$, on munit k^n de la topologie de Zariski, dans laquelle les fermés sont les ensembles des zéros des idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$. On munit $k^0 = \{0\}$ de la topologie discrète. Ensuite on munit chaque espace vectoriel de dimension finie sur k d'une topologie de Zariski, en l'identifiant à k^n par le choix d'une base. Cela ne dépend pas du choix de la base. Dans cette topologie, une intersection finie d'ouverts non vides est non vide. De plus, toute application k-linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie sur k est continue relativement à leurs topologies de Zariski. On montre :

LEMME 3.4. — *Soient U, V des espaces vectoriels sur k de dimension finie, et $\mathcal{T}$ un sous-espace de $\mathrm{Hom}_k(U, V)$. L'ensemble des éléments de $\mathcal{T}$ de rang maximal constitue un ouvert de Zariski $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$. Pour tout $S \in \mathcal{O}$ et tout $T \in \mathcal{T}$, on a $T(\ker S) \subset \mathrm{Im}\, S$.*

Démonstration. — On peut supposer $\mathcal{T} \neq 0$. Soient $(T_1, \ldots, T_n)$ une base de $\mathcal{T}$ sur k, et $M_1, \ldots, M_n$ les matrices respectives de $T_1, \ldots, T_n$ relativement à un choix de bases de U et V. Pour chaque entier $m \geq 1$, on note I_m l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les mineurs d'ordre m de la matrice $X_1 M_1 + \cdots + X_n M_n$. Soit r le plus grand entier pour lequel $I_r \neq 0$. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont tous de rang $\leq r$, et ceux de rang r sont ceux qui s'écrivent $a_1 T_1 + \cdots + a_n T_n$ pour un certain $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ qui n'est pas un zéro de I_r. Ces derniers constituent donc un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$.

Soient $S \in \mathcal{O}$ et $T \in \mathcal{T}$. On choisit un supplémentaire W de $\ker S$ dans U, et une base $(u_1, \ldots, u_r)$ de W sur k. Pour tout $a \in k$ le rang de $S + aT$ est $\leq r$. Donc en désignant par u un élément de $\ker S$, on a

$$(S + aT)(u_1) \wedge \ldots \wedge (S + aT)(u_r) \wedge (S + aT)(u) = 0,$$

dans $\bigwedge_k^{r+1}(V)$. Développons le membre de gauche pour l'écrire comme combinaison linéaire de puissances de a à coefficients dans $\bigwedge_k^{r+1}(V)$. Pour u fixe, chacun de ces coefficients est nul. En considérant celui de a, et en tenant compte du fait que $S(u) = 0$, on obtient

$$S(u_1) \wedge \ldots \wedge S(u_r) \wedge T(u) = 0,$$

donc $T(u) \in \langle S(u_1), \ldots, S(u_r) \rangle_k = \operatorname{Im} S$. Le choix de $u \in \ker S$ étant arbitraire, on a bien $T(\ker S) \subset \operatorname{Im} S$.

LEMME 3.5. — *On conserve les notations du* LEMME 3.4, *et on suppose* $\mathcal{T} \neq 0$. *Soient* $(T_1, \ldots, T_n)$ *une base de* $\mathcal{T}$ *sur* k, *et* $A_1, \ldots, A_n$ *des sous-ensembles de* k *de cardinalité* $> \dim_k U$. *Alors il existe* $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ *tel que* $a_1 T_1 + \cdots + a_n T_n \in \mathcal{O}$.

Démonstration. — Soient r et I_r comme dans la démonstration du LEMME 3.4, pour le choix de $(T_1, \ldots, T_n)$ comme base de $\mathcal{T}$ sur k. Puisque I_r est engendré par des polynômes homogènes de degré $r \leq \dim_k U$, il existe un élément $(a_1, \ldots, a_n)$ de $A_1 \times \cdots \times A_n$ qui n'est pas un zéro de I_r. Alors le rang de $a_1 T_1 + \cdots + a_n T_n$ est maximal, égal à r.

On utilisera la conséquence suivante du LEMME 3.4 :

LEMME 3.6. — *Soient* n *un entier positif, et* $B \subset E$ *des* k*-sous-espaces de dimension finie de* K^n. *Soient* F *une extension de* k *contenue dans* K, *et* $\mathcal{O}$ *l'ensemble des éléments non nuls* u *de* B *pour lesquels la dimension de* $E \cap \langle u \rangle_F$ *sur* k *est minimale. Alors* $\mathcal{O}$ *est un ouvert de Zariski de* B. *Pour tout* $u \in \mathcal{O}$ *et tout* $v \in E \cap \langle u \rangle_F$, *on a* $v \wedge_F B \subset u \wedge_F E$ *dans* $K^n \wedge_F K^n$.

Démonstration. — On peut supposer $\dim_F \langle B \rangle_F > 1$. Soit W le k-sous-espace de $K^n \wedge_F K^n$ engendré par les produits extérieurs $u \wedge_F v$ avec $u \in B$ et $v \in E$. On considère l'application k-linéaire $\theta \colon B \to \operatorname{Hom}_k(E, W)$ donnée par $(\theta(u))(v) = u \wedge_F v$ pour tout $u \in B$ et $v \in E$. Pour $u \in B$ avec $u \neq 0$, le noyau de $\theta(u)$ est $E \cap \langle u \rangle_F$, contenu strictement dans E, le noyau de $\theta(0)$. Alors $\mathcal{O}$ est aussi l'ensemble des éléments u de B pour lesquels le rang de $\theta(u)$ est maximal. Suivant le LEMME 3.4, cela entraîne que $\mathcal{O}$ est un ouvert de B, en tant qu'image réciproque par θ d'un ouvert de $\theta(B)$. Le même lemme montre que, pour tout $u \in \mathcal{O}$, tout $v \in E \cap \langle u \rangle_F$ et tout $u' \in B$, on a $(\theta(u'))(v) \in \operatorname{Im}(\theta(u))$, d'où $v \wedge_F B \subset u \wedge_F E$.

Quant au LEMME 3.5, il fournit le critère suivant :

PROPOSITION 3.7. — *Soient* n *un entier positif, et* $B \subset E$ *des* k*-sous-espaces de* K^n *de dimension finie, avec* $B \neq 0$. *Supposons que* E

soit de type (D) *dans* K^n, *et désignons par* m *et* $m+q$ *les dimensions respectives de* B *et de* E. *Soient* $(u_1,\dots,u_m)$ *une base de* B *sur* k, *et* $A_1,\dots,A_m$ *des sous-ensembles de* k *de cardinalité* $> m+q$. *Alors* E *est un* k*-sous-espace étoilé de* K^n *relativement à* B *si et seulement si la dimension de* $E \cap \langle a_1u_1 + \cdots + a_mu_m\rangle_K$ *sur* k *est* ≥ 2, *pour tout* $(a_1,\dots,a_m) \in A_1 \times \cdots \times A_m$ *non nul.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. Supposons qu'elle soit remplie. Si $\dim_K\langle B\rangle_K = 1$, on obtient sans peine que E est étoilé relativement à B. Cela permet de supposer $\dim_K\langle B\rangle_K > 1$. Dans ce cas, soient $\mathcal{O}$, W et θ comme dans le LEMME 3.6 et sa démonstration, pour le choix de $F = K$. Le LEMME 3.5 montre que $\mathcal{O}$ contient un élément u_0 de la forme $a_1u_1+\cdots+a_mu_m$ pour un certain $(a_1,\dots,a_m) \in A_1\times\cdots\times A_m$. Puisque $0 \notin \mathcal{O}$, on a $(a_1,\dots,a_m) \neq 0$. Alors, par hypothèse, la dimension de $E\cap\langle u_0\rangle_K$ sur k est ≥ 2. Comme $\mathcal{O}$ consiste des éléments non nuls u de B pour lesquels la dimension de $E \cap \langle u\rangle_K$ sur k est minimale, cela implique que E est étoilé relativement à B. La condition est donc suffisante.

On conclut ce paragraphe par deux théorèmes. Ils admettent respectivement pour corollaire les théorèmes 1.6 et 1.7 de [3].

THÉORÈME 3.8. — *Soient* n *un entier* ≥ 2, *et* E *un* k*-sous-espace de* K^n *de dimension finie. Alors* E *est étoilé si et seulement si :* $\langle E\rangle_K = K^n$ *et il existe une extension* F *de* k, *de degré fini* $d \geq 2$, *contenue dans* K, *vérifiant*

$$\dim_k\langle E\rangle_F \leq \dim_k(E) + d - 2. \tag{1}$$

Démonstration. — Supposons d'abord $\langle E\rangle_K = K^n$, et l'existence d'une extension F de k, de degré fini $d \geq 2$, contenue dans K, vérifiant (1). Pour tout élément non nul u de E, on a $E + \langle u\rangle_F \subset \langle E\rangle_F$, donc $\dim_k(E \cap \langle u\rangle_F) \geq 2$. En vertu du LEMME 3.2, cela implique que E est étoilé.

Réciproquement, supposons que E soit un k-sous-espace étoilé de K^n. Pour chaque extension F de k contenue dans K, on désigne par $\mathcal{O}_F$ l'ensemble des éléments non nuls u de E pour lesquels la dimension de $E \cap \langle u\rangle_F$ sur k est minimale, et e_F cette dimension minimale. On pose aussi $M(u) = \{t \in K \ ; \ tu \in E\}$ pour chaque $u \in E$. Alors, pour une extension F donnée, $\mathcal{O}_F$ consiste des éléments u de E pour lesquels $\dim_k(F \cap M(u)) = e_F$. D'après le LEMME 3.2, le fait que E soit étoilé se traduit par $\langle E\rangle_K = K^n$ et $e_K \geq 2$.

Le LEMME 3.6 montre que, pour F donnée, l'ensemble $\mathcal{O}_F$ est un ouvert de E, et que, pour $u \in \mathcal{O}_F$, le k-sous-espace $u \wedge_F E$ de $K^n \wedge_F K^n$ est fermé sous la multiplication par les éléments de $F \cap M(u)$. Alors, on peut considérer $u \wedge_F E$ comme sous-espace vectoriel de $K^n \wedge_F K^n$ sur l'extension de k engendrée par $F \cap M(u)$. Or $u \wedge_F E$ est de dimension finie sur k, non nulle puisque $\langle E \rangle_K = K^n$ et $n \geq 2$. Donc l'extension en question est algébrique sur k, de degré fini.

Soient L la fermeture algébrique de k dans K, et F' une extension de k contenue dans L, de degré fini sur k, telle que $\dim_L \langle E \rangle_L = \dim_{F'} \langle E \rangle_{F'}$. On choisit $u \in \mathcal{O}_K \cap \mathcal{O}_{F'}$. Comme $u \in \mathcal{O}_K$, les considérations précédentes donnent $M(u) \subset L$. En vertu du choix de F', cela implique $M(u) \subset F'$. On en déduit $e_{F'} = e_K$.

Soit F une extension de k, contenue dans F', de degré minimal sur k, telle que $e_F = e_K$. Puisque le corps k est parfait, le corps F' est une extension séparable de k. Il contient donc un nombre fini d'extensions de k. On choisit un élément u dans l'intersection des ouverts $\mathcal{O}$ associés à celles-ci. Soit F'' l'extension de k engendrée par $F \cap M(u)$. Puisque $F'' \cap M(u) = F \cap M(u)$, le choix de u implique $e_{F''} = e_F$, donc $F'' = F$. Ainsi $u \wedge_F E$ est un F-sous-espace de $K^n \wedge_F K^n$. Cela signifie $u \wedge_F E = u \wedge_F \langle E \rangle_F$. En comparant les dimensions sur k des deux membres de cette égalité, on obtient $\dim_k E - e_F = \dim_k \langle E \rangle_F - \dim_k F$. Puisque $e_F = e_K \geq 2$, le corps F possède les propriétés annoncées.

THÉORÈME 3.9. — *Soient n un entier ≥ 2, et $B \subset E$ des k-sous-espaces de K^n de dimension finie. Supposons B de codimension* 1 *dans E, et $\langle B \rangle_K = K^n$. Alors E est étoilé relativement à B si et seulement si B ou E est étoilé.*

Démonstration. — Il est clair que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons que E soit étoilé relativement à B, mais que B ne soit pas étoilé. Il s'agit de montrer que E est étoilé.

Puisque B n'est pas étoilé, l'ensemble des éléments non nuls u de B qui vérifient $B \cap \langle u \rangle_K = \langle u \rangle_k$ constituent un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de B. Cela découle du LEMME 3.6. Pour chaque sous-corps F de K, on note $\mathcal{O}_F$ l'ensemble des éléments non nuls u de B pour lesquels la dimension de $E \cap \langle u \rangle_F$ sur k est minimale, et e_F cette dimension minimale. Le même lemme montre que $\mathcal{O}_F$ est un ouvert de B.

Soit F une extension de k contenue dans K, avec $e_F \geq 2$. On choisit $u \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_F$. Alors $B + (E \cap \langle u \rangle_F)$ coïncide avec E puisqu'il contient B proprement. On en déduit $u \wedge_F B = u \wedge_F E$, et le LEMME 3.6 montre que le k-sous-espace $u \wedge_F E$ de $K^n \wedge_F K^n$ est fermé sous la multiplication par les éléments t de F pour lesquels $tu \in E$. Ainsi, on peut raisonner comme dans la démonstration du THÉORÈME 3.8, en prenant soin chaque fois de choisir $u \in \mathcal{O}$. On en déduit l'existence d'une extension algébrique F de k, de degré fini $d \geq 2$, contenue dans K, vérifiant $\dim_k E \geq \dim_k \langle E \rangle_F - d + 2$. Suivant le THÉORÈME 3.8, cela signifie que E est étoilé.

4. Sous-espaces minimaux relatifs

On démontre d'abord l'énoncé dual de la PROPOSITION 3.3. La proposition 1.8 de [3] s'en déduit.

PROPOSITION 4.1. — *Soient n un entier positif, E un k-sous-espace de K^n de dimension finie, et B un sous-espace de E engendré par des éléments linéairement indépendants sur K. Si E est minimal relativement à B, sa dimension est $\leq 2n$.*

Démonstration. — Supposons que E soit minimal relativement à B, et soit m sa dimension sur k. Suivant les PROPOSITIONS 2.5 et 2.7, on a $m > n$, et le couple (B, E) admet pour dual un couple (B', E') de k-sous-espaces de K^{m-n}, avec $B' \subset E'$, $\langle B' \rangle_K = K^{m-n}$, et E' étoilé relativement à B', de dimension m. Alors la PROPOSITION 3.3 appliquée au couple (B', E') livre $m \geq 2(m - n)$, d'où $m \leq 2n$.

La dimension sur k d'un k-sous-espace minimal de K^n est donc $\leq 2n$. Elle est aussi $\geq n + 1$, car un tel k-sous-espace de K^n est d'abord de type (D).

Pour la suite, *on suppose comme au* § 3, *que k est un corps parfait de cardinalité infinie.* La proposition suivante indique une circonstance où la dimension d'un k-sous-espace minimal de K^n est $n+1$ (la proposition 1.10 de [3] s'en déduit) :

PROPOSITION 4.2. — *Soient n un entier positif, et F une extension de k contenue dans K. Supposons que k soit algébriquement clos dans F. Alors, s'il existe un k-sous-espace minimal de K^n contenu dans F^n, sa dimension est $n + 1$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un k-sous-espace minimal E de K^n contenu dans F^n, et soit m sa dimension. Alors E est aussi un k-sous-espace minimal de F^n. En tant que tel, suivant les PROPOSITIONS 2.5 et 2.7, il vérifie $m \geq n + 1$, et admet pour dual un k-sous-espace étoilé de F^{m-n} de dimension m. En vertu du THÉORÈME 3.8, cela implique $m - n = 1$.

Il est facile de décrire les k-sous-espaces minimaux de K^n de dimension $n + 1$ (comparer à [1], § 1, n° 3, prop. 7, cor. 2) :

PROPOSITION 4.3. — *Soit n un entier positif. Les k-sous-espaces minimaux de K^n de dimension $n+1$, s'il en existe, sont les k-sous-espaces de K^n qui s'écrivent $\langle u_1, \dots, u_n, t_1u_1+\cdots+t_nu_n\rangle_k$ pour une base $(u_1, \dots, u_n)$ de K^n sur K, et des éléments $t_1, \dots, t_n$ de K tels que $1, t_1, \dots, t_n$ soient linéairement indépendants sur k.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement de la PROPOSITION 2.8 appliquée au fait que les k-sous-espaces étoilés de K de dimension $n+1$ sont les k-sous-espaces de K qui s'écrivent $\langle v, t_1v, \dots, t_nv\rangle_k$ pour une base (v) de K, et des éléments $t_1, \dots, t_n$ de K tels que $1, t_1, \dots, t_n$ soient linéairement indépendants sur k.

Le lemme suivant précise l'énoncé du THÉORÈME 3.8 en vue des applications qui vont suivre :

LEMME 4.4. — *Soient n un entier ≥ 2, et E un k-sous-espace de K^n de dimension finie m sur k. Alors E est étoilé si et seulement si $E \subset \langle u_1, \dots, u_l\rangle_F$ pour une extension F de k, contenue dans K, de degré fini d sur k vérifiant $2 \leq d \leq (m-2)/(n-1)$ et ne divisant pas $m-1$, et une famille d'éléments $u_1, \dots, u_l$ de K^n, linéairement indépendants sur F, contenant une base de K^n sur K, de cardinalité l égale à la partie entière de $(m+d-2)/d$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que E soit étoilé. Alors il contient une base $(u_1, \dots, u_n)$ de K^n sur K, et d'après le THÉORÈME 3.8, il existe une extension F de k, contenue dans K, de degré fini $d \geq 2$ sur k, vérifiant

$$\dim_k \langle E\rangle_F \leq m+d-2. \tag{1}$$

Comme $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants sur K, on peut les compléter en une base $(u_1, \dots, u_l)$ de $\langle E\rangle_F$ sur F. Alors l'inégalité (1) se réécrit $dl \leq m+d-2$. Comme $l \geq n$, cela implique $d \leq (m-2)/(n-1)$. Comme $\langle E\rangle_F$ contient E, on a aussi $m \leq dl$. Donc l est la partie entière de $(m+d-2)/d$, et d ne divise pas $m-1$. Ainsi les conditions du lemme sont nécessaires.

Supposons maintenant que ces conditions soient remplies. On a $\langle E\rangle_F \subset \langle u_1, \dots, u_l\rangle_F$. Comme la dimension sur k du membre de gauche de cette inclusion est $\geq m$, que celle du membre de droite est $\leq m+d-2$, et que toutes deux sont multiples de d, ces dimensions coïncident. Donc (1) est vérifiée, et on a $\langle E\rangle_F = \langle u_1, \dots, u_l\rangle_F$. Cette dernière égalité implique $\langle E\rangle_K = K^n$ puisque la famille $u_1, \dots, u_l$ contient une base de K^n sur K. Alors E est étoilé en vertu du THÉORÈME 3.8.

PROPOSITION 4.5. — *Soient n un entier ≥ 2, et E un k-sous-espace de K^n. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est étoilé de dimension $2n$;*

(ii) *E est minimal de dimension $2n$;*

(iii) *E est étoilé et minimal;*

(iv) *$E = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle_F$ pour une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de K^n sur K, et une extension quadratique F de k contenue dans K.*

Démonstration. — L'équivalence entre les conditions (i) et (iv) est une conséquence directe du LEMME 4.4. Ainsi les k-sous-espaces étoilés de K^n de dimension $2n$ sont les k-sous-espaces de K^n qui s'écrivent $\langle u_1, \ldots, u_n, tu_1, \ldots, tu_n \rangle_k$ pour une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de K^n, et un élément t de K, algébrique de degré 2 sur k. En appliquant la PROPOSITION 2.8, on trouve que les k-sous-espaces minimaux de K^n de dimension $2n$ ont la même forme. Donc les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. Puisqu'elles entraînent la condition (iii), il reste seulement à démontrer que, si E est étoilé et minimal, sa dimension est $2n$. Cela découle des PROPOSITIONS 3.3 et 4.1.

LEMME 4.6. — *Pour $n \geq 3$, il n'existe pas de k-sous-espace étoilé de K^n de dimension $2n+1$. Les k-sous-espaces étoilés de K^2 de dimension 5, s'il en existe, sont les k-sous-espaces de K^2 qui s'écrivent $\langle u_1, u_2, tu_1, tu_2, t^2u_2 \rangle_k$, pour une base (u_1, u_2) de K^2 sur K, et un élément t de K algébrique de degré 3 sur k.*

Démonstration. — Soient n un entier ≥ 2, et E un k-sous-espace de K^n de dimension $2n+1$. Le LEMME 4.4 montre que E est étoilé si et seulement si $n = 2$ et il existe une extension cubique F de k, contenue dans K, et une base (u_1, u_2) de K^2 sur K, telle que E soit de codimension 1 dans $\langle u_1, u_2 \rangle_F$. Si tel est le cas, E est donné par

$$E = \left\{ a_1u_1 + a_2u_2 \; ; \; a_1, a_2 \in F \text{ et } \operatorname{Tr}_{F/k}(a_1b_1 + a_2b_2) = 0 \right\}$$

pour certains $b_1, b_2 \in F$ non tous nuls, où $\operatorname{Tr}_{F/k}$ désigne la trace de F sur k. En effet, F est une extension séparable de k puisque le corps k est parfait. On pose $u' = b_2u_1 - b_1u_2$. Alors $\langle u' \rangle_F$ est contenu dans E, et E s'écrit $E = \langle u, tu \rangle_k \oplus \langle u' \rangle_F$ pour un certain $u \in E$, et un certain $t \in F \setminus k$. Puisque $\langle E \rangle_K = K^2$, les vecteurs u, u' constituent une base de K^2. Enfin, puisque $t \notin k$, on a $F = k(t)$, et E s'écrit aussi $E = \langle u, tu, u', tu', t^2u' \rangle_k$. Réciproquement, si $n = 2$ et si E s'écrit $\langle u_1, u_2, tu_1, tu_2, t^2u_2 \rangle_k$, pour une base (u_1, u_2) de K^2 sur K, et un élément t de K algébrique de degré 3 sur k, alors E est de codimension 1 dans $\langle u_1, u_2 \rangle_F$, où F est le corps $k(t)$, de degré 3 sur k. Alors, suivant le LEMME 4.4, E est un k-sous-espace étoilé de K^2.

PROPOSITION 4.7. — *Pour $n \geq 4$, il n'existe pas de k-sous-espace minimal de K^n de dimension $2n-1$. Les k-sous-espaces minimaux de K^3 de dimension 5, s'il en existe, sont les k-sous-espaces de K^3 qui s'écrivent $\langle v_1, v_2, v_3, tv_1, tv_2 + t^2 v_3 \rangle_k$, pour une base (v_1, v_2, v_3) de K^3 sur K, et un élément t de K algébrique de degré 3 sur k.*

Démonstration. — En vertu des PROPOSITIONS 2.5 et 2.7, un k-sous-espace de K^n de dimension $2n-1$ est minimal si et seulement s'il admet pour dual un k-sous-espace étoilé de K^{n-1} de dimension $2n-1$. Le LEMME 4.6 montre que, pour $n \geq 4$, l'existence de ce dernier est exclue, alors l'existence du premier l'est aussi. Suivant la PROPOSITION 2.8, les dernières assertions de la proposition et du LEMME 4.6 sont équivalentes.

Des PROPOSITIONS 4.5 et 4.7, on retient la conséquence suivante, dont découle la proposition 1.9 de [3] :

COROLLAIRE 4.8. — *Soit n un entier positif. Supposons qu'il existe un k-sous-espace minimal E de K^n, et soit m sa dimension. Si $n \geq 2$ et $m = 2n$, ou si $n \geq 3$ et $m = 2n-1$, alors il existe deux éléments de E qui sont linéairement indépendants sur k, mais linéairement dépendants sur la clôture algébrique de k dans K.*

L'énoncé suivant est dual du THÉORÈME 3.9, et le théorème 1.11 de [3] s'en déduit :

THÉORÈME 4.9. — *Soient n un entier ≥ 2, et $B \subset E$ des k-sous-espaces de dimension finie de K^n. Supposons B de dimension 1, et E de dimension $m \geq n+2$. Soit $\pi : K^n \to K^{n-1}$ une application K-linéaire de noyau $\langle B \rangle_K$. Alors E est un k-sous-espace minimal de K^n relativement à B si et seulement si, ou bien E est un k-sous-espace minimal de K^n, ou bien E est un k-sous-espace de type* (D) *de K^n, et $\pi(E)$ est un k-sous-espace minimal de dimension $m-1$ de K^{n-1}.*

Démonstration. — Si E est minimal, il est minimal relativement à B. Donc pour montrer que la condition est suffisante, on peut supposer que E est de type (D), et que $\pi(E)$ est un k-sous-espace minimal de dimension $m-1$ de K^{n-1}. Alors B est le noyau de la restriction de π à E. Soit E_1 un sous-espace de E de dimension $m-1$ contenant B. Son image par π est un sous-espace propre de $\pi(E)$. Donc elle n'est pas de type (D) dans K^{n-1}. Alors E_1 n'est pas de type (D) dans K^n, car ${}^t\pi$ est injective et applique

$(\pi(E_1))_{\mathrm{ass}/k}$ dans $(E_1)_{\mathrm{ass}/k}$. Le choix de E_1 étant arbitraire, E est un k-sous-espace minimal de K^n relativement à B.

Pour montrer la réciproque, supposons que E soit un k-sous-espace minimal de K^n relativement à B, mais qu'il ne soit pas minimal. Puisque E est de type (D), il s'agit de montrer que $\pi(E)$ est un k-sous-espace minimal de dimension $m-1$ de K^{n-1}. Soit $f\colon K \times K^{m-1} \to K^n$ une application linéaire surjective telle que $f(k \times 0) = B$ et $f(k \times k^{m-1}) = E$, et soit $f'\colon K \times K^{m-1} \to K^{m-n}$ une application linéaire surjective de noyau $(\ker f)^\perp$. On pose $B' = f'(0 \times k^{m-1})$ et $E' = f'(k \times k^{m-1})$. Puisque E est un k-sous-espace de type (D) de K^n de dimension m, le LEMME 2.2 montre que E' est un k-sous-espace de type (D) de K^{m-n} de dimension m. Donc les couples (B, E) et (B', E') sont duaux. En vertu de la PROPOSITION 2.5, cela implique que E' est étoilé relativement à B', mais non étoilé, et que B' est un sous-espace de codimension 1 de E', vérifiant $\langle B'\rangle_K = K^{m-n}$. Donc, suivant le THÉORÈME 3.9, B' est un k-sous-espace étoilé de K^{m-n}. Soit $\Phi\colon K^{m-1} \to K \times K^{m-1}$ l'application linéaire donnée par $\Phi(x) = (0, x)$ pour tout $x \in K^{m-1}$. On pose $g = \pi \circ f \circ \Phi\colon K^{m-1} \to K^{n-1}$ et $g' = f' \circ \Phi\colon K^{m-1} \to K^{m-n}$. Ce sont deux applications linéaires de noyaux supplémentaires orthogonaux dans K^{m-1}. En effet, leurs noyaux sont respectivement les images réciproques par Φ de $\ker(\pi \circ f) = (\ker f) + (K \times 0)$ et $(\ker f') \cap (0 \times K^{m-1})$, et ceux-ci sont supplémentaires orthogonaux dans K^m. Puisque $g'(k^{m-1}) = B'$ est un k-sous-espace étoilé de dimension $m-1$ de K^{m-n}, le LEMME 2.2 montre que $g(k^{m-1}) = \pi(E)$ est un k-sous-espace de type (D) et de dimension $m-1$ de K^{n-1}. Donc B' et $\pi(E)$ sont duaux. Puisque B' est étoilé, la PROPOSITION 2.5 montre que $\pi(E)$ est minimal.

On conclut par le critère suivant, dont découle la proposition 1.12 de [3] :

PROPOSITION 4.10. — *Soient n un entier positif, et $B \subset E$ des k-sous-espaces de K^n de dimension finie, avec $B \neq E$. Supposons que E soit de type* (D) *dans K^n, et désignons par q et $m+q$ les dimensions respectives de B et de E. Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_m)$ une base du sous-espace de* $\mathrm{Hom}_k(E, k)$ *constitué des applications linéaires qui s'annulent sur B, et soient $A_1, \ldots, A_m$ des sous-ensembles de k de cardinalité $> m+q$. Alors E est un k-sous-espace minimal de K^n relativement à B si et seulement si, pour tout $(a_1, \ldots, a_m) \in A_1 \times \cdots \times A_m$ non nul, le noyau de $a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m$ n'est pas un k-sous-espace de type* (D) *de K^n.*

Démonstration. — Soit $f\colon K^m \times K^q \to K^n$ une application linéaire telle que $f(0 \times k^q) = B$ et $f(k^m \times k^q) = E$, et soit $f'\colon K^m \times K^q \to K^{m+q-n}$

une application linéaire de noyau $(\ker f)^{\perp}$. On pose $B' = f'(k^m \times 0)$ et $E' = f'(k^m \times k^q)$. En vertu du LEMME 2.2, E' est de dimension $m+q$ sur k. Alors les couples (B,E) et (B',E') sont duaux. Suivant la PROPOSITION 2.5, cela entraîne que E est un k-sous-espace minimal de K^n relativement à B si et seulement si E' est un k-sous-espace étoilé de K^{m+q-n} relativement à B'. Pour $i = 1,\dots,m$, on désigne par x_i l'élément de $k^m \times 0$ qui vérifie $(x_i, y)_{m+q} = \phi_i(f(y))$ pour tout $y \in k^m \times k^q$, et on pose $u_i = f'(x_i)$. Alors $(u_1,\dots,u_m)$ constitue une base de B' sur k. De plus, pour $(a_1,\dots,a_m) \in k^m$ non nul, le noyau de $a_1\phi_1+\cdots+a_m\phi_m$ est $f((a_1x_1+\cdots+a_mx_m)^{\perp})$, où $(a_1x_1+\cdots+a_mx_m)^{\perp}$ désigne le sous-espace de $k^m \times k^q$ orthogonal à $a_1x_1+\cdots+a_mx_m$. D'après le LEMME 2.3, ce noyau n'est pas un k-sous-espace de type (D) de K^n si et seulement si la dimension de $E' \cap \langle a_1u_1+\cdots+a_mu_m\rangle_K$ sur k est ≥ 2. La PROPOSITION 3.7 montre que E' est étoilé relativement à B' si et seulement si cette dernière condition est remplie pour tout $(a_1,\dots,a_m) \in A_1 \times \cdots \times A_m$ non nul. La conclusion s'ensuit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI. — *Topologie générale, chap. VII.* — Hermann, Paris, 1974.

[2] S. LANG. — *Algebra.* — Addison Wesley, Don Mills, Ontario, 1971.

[3] D. ROY. — Sous-groupes minimaux des groupes de Lie commutatifs réels et applications arithmétiques, *Acta arith.*, t. **56**, 1990, (à paraître).