

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. D'ALMEIDA

## Lieu singulier d'une surface réglée

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 118, n° 4 (1990), p. 395-401

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1990\\_\\_118\\_4\\_395\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_395_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LIEU SINGULIER D'UNE SURFACE RÉGLÉE

PAR

J. D'ALMEIDA (\*)

RÉSUMÉ. — On considère une surface réglée de degré  $n$  et de genre  $g$  de  $P_{\mathbb{C}}^3$ . On suppose que la surface  $S$  n'est pas un cône. Le lieu singulier de la surface réglée s'identifie à un diviseur ample du carré symétrique de la section plane de  $S$  dès que  $n \geq 2g + 3$  ( $n \geq 2g + 2$  si la section plane n'est pas hyperelliptique). On montre que le lieu singulier est connexe dès que  $n \geq g + 4$ . Lorsqu'il n'est pas connexe, on montre qu'il est réunion disjointe de deux droites.

ABSTRACT. — Let  $S$  be a ruled surface of degree  $n$  and genus  $g$  in  $P_{\mathbb{C}}^3$ . We suppose that  $S$  is not a cone. We can consider the singular locus of the ruled surface as an ample divisor of the symmetric square of the plane section of  $S$  if  $n \geq 2g + 3$  ( $n \geq 2g + 2$  if the plane section is not hyperelliptic). We show that the singular locus is connected if  $n \geq g + 4$ . When it is not connected, it is the union of two skew lines.

### I. Introduction

On considère une surface réglée de degré  $n$  de  $P_{\mathbb{C}}^3$ . Si  $S$  est un cône, l'étude du lieu singulier de  $S$  se ramène à celle d'une section plane générale de  $S$ . On supposera donc que  $S$  n'est pas un cône. Soit  $C$  le modèle non singulier de la section plane générale de  $S$ . On note  $g$  le genre de  $C$  et  $C_2$  son carré symétrique. La normalisée  $\tilde{S}$  de  $S$  s'écrit  $\tilde{S} = P(E)$  où  $E$  est un fibré de rang 2 et de degré  $n$  sur  $C$ . On note  $\pi : \tilde{S} \rightarrow C$  la projection.

Le morphisme  $p : \tilde{S} \rightarrow P^3 = \text{Proj}(\text{sym } V)$  d'image  $S$  correspond à une surjection  $V \otimes O_{\tilde{S}} \rightarrow O_{\tilde{S}}(1)$  qui se décrit comme suit :  $V$  est un espace vectoriel de dimension 4 contenu dans  $H^0(E)$ . La surjection recherchée est la composée  $V \otimes O_{\tilde{S}} \rightarrow \pi^*E \rightarrow O_{\tilde{S}}(1)$ . Elle provient de l'évaluation  $V \otimes O_C \rightarrow E$  et du quotient tautologique  $\pi^*E \rightarrow O_{\tilde{S}}(1)$ . On remarquera que  $V \otimes O_C \rightarrow E$  est surjectif si et seulement si  $V \otimes O_{\tilde{S}} \rightarrow O_{\tilde{S}}(1)$  l'est. Il faut donc supposer que  $V$  engendre  $E$ . On note  $\Delta \subset C \times C_2$  le diviseur effectif universel de degré 2 sur  $C$ . On désigne par  $a$  et  $b$  les projections

(\*) Texte reçu le 25 septembre 1989, révisé le 10 octobre 1990.  
J. D'ALMEIDA, Univ. de Caen, Dépt. de Mathématiques, 14032 Caen Cedex, France.

de  $C \times C_2$  sur  $C$  et  $C_2$ . On pose  $\varepsilon = b_*(a^*E \otimes O_\delta)$ . Le module  $\varepsilon$  est localement libre de rang 4 car la restriction de  $b$  à  $\Delta$  est un morphisme plat et fini de degré 2. L'image directe par  $b$  du morphisme de restriction  $a^*E \rightarrow a^*E \otimes O_\Delta$  donne l'application  $H^0(C, E) \otimes O_{C_2} \rightarrow \varepsilon$  et donc la flèche  $\sigma : V \otimes O_{C_2} \rightarrow \varepsilon$ . Si  $D$  est un élément de  $C_2$  on a  $\varepsilon_D = H^0(E/E(-D))$ . On note  $\Gamma$  le schéma des zéros de  $\det \sigma = \Lambda^4 \sigma$ . On vérifie, en utilisant le fait que  $V$  engendre  $E$ , que  $\det \sigma$  n'est pas identiquement nul. Décrivons maintenant le lieu double de  $p$  [4, pages 165–166]. On part de la suite exacte suivante sur  $P^3 \times P^3$  :

$$V \otimes O_{P_3 \times P_3} \rightarrow O_{P_3 \times P_3}(1, 0) \oplus O_{P_3 \times P_3}(0, 1) \rightarrow O_{\Delta'}(1) \rightarrow 0,$$

où  $\Delta'$  désigne la diagonale de  $P_3 \times P_3$ . On considère alors l'image réciproque de cette suite exacte sur l'éclatement  $T$  de la diagonale de  $\tilde{S} \times \tilde{S}$ . Soit  $F$  le noyau de l'application évidente de  $O_T(1, 0) \oplus O_T(0, 1)$  dans  $O_K(1)$  où  $K$  est le diviseur exceptionnel de  $T$ . C'est un  $O_T$ -module localement libre de rang 2. La suite exacte ci-dessus donne une application  $O_T$ -linéaire  $u : V \otimes O_T \rightarrow F$ . Le cycle associé à coker  $u$  est le lieu double de  $p$ .

L'image directe de  $u$  par la projection de  $T$  dans  $C \times C$  est identique à l'image réciproque de  $\sigma$  par la projection de  $C \times C$  dans  $C_2$ . Le schéma des zéros de  $\det \sigma$  admet donc pour image réciproque dans  $C \times C$  l'image directe du cycle "lieu double de  $p$ ".

On a alors le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $S$  une surface réglée de degré  $n$  et de genre  $g$  de  $P_C^3$ . On suppose que  $S$  n'est pas un cône et on note  $C$  le modèle lisse de la section plane générale de  $S$  et  $\Gamma$  le diviseur du carré symétrique de  $C$  défini ci-dessus.*

- Si  $g = 0$ ,  $\Gamma$  est ample.
- Si  $g = 1$ ,  $\Gamma$  est ample dès que  $n \geq 5$ .
- Si  $g \geq 2$  et  $C$  hyperelliptique,  $\Gamma$  est ample dès que  $n \geq 2g + 3$ .
- Si  $g \geq 2$  et  $C$  non hyperelliptique,  $\Gamma$  est ample dès que  $n \geq 2g + 2$ .

Le cas le plus simple de lieu singulier non connexe s'obtient lorsqu'on considère une surface réglée elliptique de degré 4. Le lieu singulier est alors la réunion de deux droites disjointes. De façon générale, on a le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $S$  une surface réglée de degré  $n$  et de genre  $g$  de  $P^3$ . Le lieu singulier de  $S$  est connexe dès que  $n \geq g + 4$ . Lorsqu'il n'est pas connexe, le lieu singulier est réunion de deux droites disjointes (ensemblistement).*

## 2. Classes de Chern de $\varepsilon$

On utilisera les résultats suivants [1, page 338]. Soit  $u : C_2 \rightarrow J$  l'application de  $C_2$  dans la jacobienne de  $C$  [1, page 18]. Les classes de Chern sont prises dans  $H^{\text{pair}}(\quad, \mathcal{Z})$ . On note  $\theta$  l'image réciproque sur  $C_2$  de la classe du diviseur theta de  $J$ . On note  $x$  la classe du diviseur  $X_q = q + C \subset C_2$  avec  $q \in C$ . La formule de Poincaré et la formule de projection permettent d'établir les relations  $x^2 = 1$ ,  $x\theta = g$ ,  $\theta^2 = g(g-1)$ .

On note  $\eta$  l'image réciproque sur  $C \times C_2$  de la classe d'un point de  $C$ . Si  $\delta$  est la classe du diviseur  $\Delta$  on a  $\delta = \delta^{20} + \delta^{11} + \delta^{02}$  dans la décomposition de Kunneth. On a  $\delta = 2\eta + \gamma + x$  avec  $\gamma^2 = -2\eta\theta$ ,  $\eta^2 = \eta\gamma = \gamma^3 = 0$ ,  $x^2\gamma = \theta^2\gamma = 0$ . De plus  $b_*$  est une forme linéaire vérifiant  $b_*(x) = b_*(\theta) = b_*(\gamma) = 0$ ,  $b_*(\eta) = 1$ .

PROPOSITION. — Les classes de Chern de  $\varepsilon$  sont :

$$\begin{aligned} c_1(\varepsilon) &= 2\theta + (n-2-2g)x; \\ c_2(\varepsilon) &= 2(g-1)g + \frac{1}{2}(n+2g-2)(n-2g-1). \end{aligned}$$

*Preuve.* — On applique le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au morphisme  $b$  et au fibré  $a^*E \otimes O_\Delta$ . La restriction de  $b$  à  $\Delta$  étant finie, le théorème s'écrit

$$\text{td}(C_2) \text{ch}(\varepsilon) = b_*[\text{td}(C \times C_2) \text{ch}(a^*E \otimes O_\Delta)]$$

où  $\text{td}$  désigne la classe de Todd et  $\text{ch}$  le caractère de Chern.

On a  $c_1(a^*E \otimes O(-\Delta)) = n\eta - 2\delta$ ,  $c_2(a^*E \otimes O(-\Delta)) = -n\eta\delta + \delta^2$ . La relation  $\text{ch}(a^*E \otimes O_\Delta) = \text{ch}(a^*E) - \text{ch}(a^*E \otimes O(-\Delta))$  permet alors d'obtenir :

$$\text{ch}(\varepsilon) = b_*[(1 + (1-g)\eta)(2\delta - \delta^2 + n\eta\delta + \frac{1}{6}(2\delta^3 - 3n\eta\delta^2)).$$

En utilisant les relations rappelées ci-dessus on obtient

$$\text{ch}(\varepsilon) = 4 + 2\theta + (n-2-2g)x + (1+g-\frac{1}{2}n)x^2 - 2\theta x.$$

Il en résulte les classes de Chern annoncées.

REMARQUE. — La formule d'adjonction dans  $C_2$  s'écrit :

$$2g(\Gamma) - 2 = c_1(\varepsilon)(c_1(\varepsilon) + K_{C_2}),$$

où  $K_{C_2}$  est le diviseur canonique. En utilisant les relations

$$x^2 = 1, \quad x\theta = g, \quad \theta^2 = g(g-1), \quad c_1(C_2) = -\theta + (3-g)x,$$

[1, page 322], on obtient  $2g(\Gamma) - 2 = (n-5)(n+2g-2)$ .

On retrouve ainsi la formule classique donnant le genre géométrique du lieu singulier d'une surface réglée [2].

**3. Amplitude**

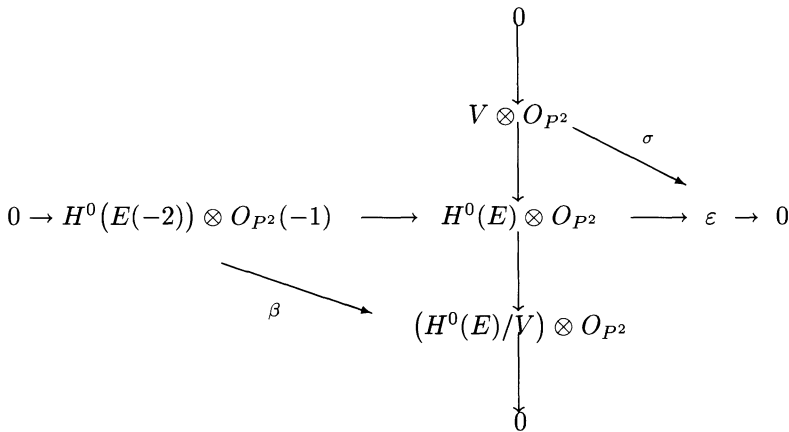
a) *Cas rationnel* : on a  $C = P^1$  et  $C_2 = P^2$ . On identifie  $P^1$  à une conique de  $P_2^*$  par le plongement de Veronese. Le diviseur universel est alors la restriction à  $C \times P^2$  de la variété d'incidence point-droite de  $P^{2*} \times P^2$ . On a la résolution suivante :

$$0 \rightarrow O_{P^1}(-2) \otimes O_{P^2}(-1) \rightarrow O_{P^1 \times P^2} \rightarrow O_{\Delta} \rightarrow 0.$$

Après tensorisation par  $a^*E$  et image directe par  $b$  on obtient :

$$0 \rightarrow H^0(E(-2)) \otimes O_{P^2}(-1) \rightarrow H^0(E) \otimes O_{P^2} \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0.$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant :



La courbe  $\Gamma$  a pour équation  $\det \beta = 0$ . Elle est de degré  $(n - 2)$ . On a évidemment  $n \geq 3$ !

b) *Cas elliptique* : la courbe  $C$  est isomorphe à la jacobienne  $J(C)$ . On a  $C_2 = P(F)$  où  $F$  est un fibré de rang 2. La surface  $C_2$  est donc réglée. Le fibré  $F$  correspond à un élément non nul de  $\text{Ext}^1(O_C(A), O_C)$ .

Cet espace vectoriel est de dimension 1 et  $F$  est unique à isomorphisme près modulo une translation sur  $C$ . Le diviseur  $\Gamma$  de classe  $2\theta + (n - 4)x$  est ample pour  $n \geq 5$ . ([7, page 382]. Le cas  $n = 4$  correspond à une surface réglée dont le lieu singulier est la réunion de droites disjointes.

c) *Cas  $g \geq 2$*  : on considère le morphisme  $u : C_2 \rightarrow J$ . On pose  $W_2 = u(C_2)$ . La classe fondamentale de  $W_2$  est donnée par la

formule de Poincaré :  $w_2 = \theta^{g-2}/(g-2)!$ . Il faut ici distinguer deux cas. Si  $C$  est hyperelliptique,  $C_2$  est l'éclatement dans  $W_2$  de la classe de l'unique  $g_2^1$  (involution hyper-elliptique). Le diviseur  $X_g$  de classe  $x$  est ample. Pour  $n \geq 2g+3$ ,  $\Gamma$  est donc ample. Si  $C$  n'est pas hyperelliptique,  $u$  établit un isomorphisme entre  $C_2$  et  $W_2$ . La restriction de  $\theta$  à  $W_2$  étant ample, on obtient que  $\Gamma$  est ample pour  $n \geq 2g+2$ . Le THÉORÈME 1 est donc démontré.

THÉORÈME 2. — Soit  $S$  une surface réglée de degré  $n$  et de genre  $g$  de  $P^3$ . Le lieu singulier de  $S$  est connexe dès que  $n \geq g+4$ . Lorsqu'il n'est pas connexe, il est (ensemblément) réunion de deux droites disjointes.

Démonstration. — La première partie du théorème se déduit de la deuxième partie. En effet la surface réglée peut être vue comme la courbe  $C$  tracée sur la grassmannienne des droites de  $P^3$ . Le fait que les génératrices rencontrent les deux droites disjointes signifie que la courbe  $C$  est tracée sur une quadrique d'un espace projectif de dimension 3. Son degré est  $n = d_1 + d_2$  et son genre est  $g = (d_1 - 1)(d_2 - 1)$ . On a nécessairement  $g \geq 1$  car  $d_1 \geq 2$ ,  $d_2 \geq 2$ . On en déduit aisément que  $n \leq g+3$ .

Supposons donc que le lieu singulier de  $S$  ne soit pas connexe. Dans  $O_{\tilde{S}}$ , le conducteur de  $S$  est alors intersection de deux idéaux  $I$  et  $J$  de somme  $O_{\tilde{S}}$ ; on a donc une suite exacte  $0 \rightarrow \omega_{\tilde{S}}(4-s) \rightarrow I \oplus J \rightarrow O_{\tilde{S}} \rightarrow 0$ . On en déduit, en appliquant  $\pi_*$ , une suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_*(I(n-4)) \oplus \pi_*(J(n-4)) \rightarrow \text{sym}_{n-4} E \rightarrow \omega_C$$

et un isomorphisme  $\pi_*(I(n-3)) \oplus \pi_*(J(n-3)) \xrightarrow{\sim} \text{sym}_{n-3} E$ .

Cette décomposition est non triviale car  $I$  et  $J$  sont distincts de  $O_{\tilde{S}}$ . Le fibré  $\text{sym}_{n-4} E$  est de rang  $(n-3)$  et de degré  $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)$ ; s'il est semi-stable, on a selon la suite exacte  $\frac{1}{2}n(n-4) \leq 2g-2$ . D'après la majoration du genre de Castelnuovo, appliquée à l'image de  $C$  dans la grassmannienne des droites de  $P^3$ , cela impose que cette image soit lisse et intersection complète sur l'intersection de cette grassmannienne et d'une variété linéaire de dimension 3 du  $P^5$  ambiant (*i.e.* une "congruence linéaire de droites"). Cette congruence admet deux droites "directrices" (pouvant être confondues) qui contiennent le lieu singulier (ensembliste) de  $S$ , d'où le théorème dans ce cas. On peut donc supposer  $\text{sym}_{n-4} E$  instable, donc  $E$  instable [8].

Soit  $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $O_C$ -module localement libres telle que  $\text{deg}(E'') < \text{deg}(E')$ . La filtration de Harder-Narasimhan [6] de  $\text{sym}_{n-3} E$  a pour gradué associé  $E' \otimes^{n-3-i} \otimes E'' \otimes^i$

$0 \leq i \leq n - 3$ . L'argument de Krull-Schmidt montre qu'il existe une partie  $H$  de  $[0, n - 3]$  non vide et de complémentaire non vide telle que la filtration de H-N de  $\pi_* I(n - 3)$  (resp. de  $\pi_* J(n - 3)$ ) soit induite par  $F_i$ ,  $i \in H$  (resp.  $i \in CH$ ). Supposons par exemple que  $0 \in H$  et notons  $i_0$  le plus petit élément de  $CH$ . Il est clair que  $F_{i_0}/F_{i_0-2}$  (où  $F_{i_0}$  si  $i_0 = 1$ ) est isomorphe à  $E \otimes E'^{\otimes n-3-i_0}$  et est scindé, donc  $E$  est scindé.

Dans ce cas, et si l'on a  $V = H^0(E)$ , le fait que  $E$  est engendré par ses sections et que  $S$  n'est pas un cône impose que  $H^0(E')$  (resp.  $H^0(E'')$ ), soit de rang 2 et engendre  $E'$  (resp.  $E''$ ); donc  $E'$  et  $E''$  définissent des morphismes de  $C$  dans des droites  $L'$  et  $L''$  de  $P^3$ , et  $S$  est le lieu des droites joignant les points de  $L'$  et  $L''$  ayant un antécédent commun sur  $C$ . Le théorème est donc démontré dans ce cas.

On a enfin le lemme suivant :

LEMME. — Soit  $\tilde{S}$  une surface lisse et  $p : \tilde{S} \rightarrow P^3$  un morphisme fini birationnel sur son image  $S$ . Supposons  $H^0(O_{P^3}(1)) \neq H^0 O_{\tilde{S}}(1)$ . Le lieu singulier de  $S$  est alors connexe.

*Preuve.* — En effet, dans le cas contraire on a  $H^1(\omega_{\tilde{S}}(4 - n)) \neq 0$  ( $n$  désigne le degré de  $S$ ). Si  $\tilde{C}$  est une section de  $O_{\tilde{S}}(1)$  d'équation  $h \in H^0(O_{\tilde{S}}(1))$ , d'image  $C$  dans l'espace projectif (de dimension  $\geq 3$ )  $P = \text{Proj}(\text{sym } H^0(O_{\tilde{S}}(1)/\mathbb{C}h)$ ,  $C$  est une courbe de degré  $n$  telle que  $h^1(J_{C/P}(n - 3)) \neq 0$ , donc d'après le théorème de Castelnuovo sur les séries linéaires incomplètes [5],  $C$  est irréductible lisse et rationnelle si  $h$  est assez générale.  $\tilde{C}$  est un diviseur ample sur  $\tilde{S}$ . On a donc  $\tilde{C}\tilde{C} > 0$  et  $\tilde{S}$  est rationnelle [3, V 4.3, page 142]. La formule de Riemann-Roch donne alors  $h^0(O_{\tilde{S}}(\tilde{C})) \geq n + 2$  avec  $n = \deg S = \tilde{C}\tilde{C}$ . Le modèle normal de  $S$  est alors une surface réglée rationnelle ou une surface de Veronese [10, page 525]. Dans le premier cas le lieu singulier est connexe d'après le THÉORÈME 1. Dans le second cas  $S$  est une surface romaine de Steiner. Son lieu singulier est la réunion de trois droites concourantes.

CONCLUSION. — Le THÉORÈME 1 implique la connexité de  $\Gamma$  pour  $n \geq 2g + 3$ . Le THÉORÈME 2 suggère évidemment la question de la connexité de  $\Gamma$  pour  $n \geq g + 4$ . En d'autres termes, existe-t-il un exemple de surface non située sur une congruence linéaire et telle que  $\Gamma$  soit non connexe? Cette question est à rapprocher du "théorème" de Franchetta : le lieu double apparent en un point général de  $P^4$  d'une surface lisse est irréductible.

Je tiens à remercier L. GRUSON pour ses multiples suggestions.

## BIBLIOGRAPHY

- [1] ARBARELLO (E.), CORNALBA (M.), GRIFFITHS (P.), HARRIS (J.). — *Geometry of Algebraic Curves I.* — Springer, 1985.
- [2] BAKER (H.F.). — *Principles of Geometry*, Vol. VI. — Cambridge Univ. Press, 1933.
- [3] BARTH (W.), PETERS (C.) and VAN DE VEN (A.). — *Compact complex Surfaces.* — Springer Verlag, 1984.
- [4] FULTON (W.). — *Intersection Theory.* — Springer, 1984.
- [5] GRUSON (L.), LAZARSFELD (R.) and PESKINE (C.). — On a theorem of Castelnuovo and equations defining space curves, *Inv. Math.*, t. **72**, 1983, p. 491–506.
- [6] HARDER (G.) and NARASIMHAN (M.S.). — On the cohomology groups of moduli spaces of vectors bundles on curves, *Math. Ann.*, t. **212**, 1975, p. 215–248.
- [7] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry.* — GTM 52, Springer, 1977.
- [8] MARUYAMA (M.). — The Theorem of Grauert-Mullich-Splinder, *Math. Ann.*, t. **255**, 1981, p. 317–333.
- [9] MUMFORD (D.). — *Curves and their Jacobians.* — Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1975.
- [10] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). — *Principles of Algebraic Geometry.* — Wiley Interscience, 1978.