BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VASSEROT

Classe de Segre et multiplicité équivariantes

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 4 (1991), p. 463-477
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_4_463_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 463–477.

CLASSE DE SEGRE ET MULTIPLICITÉ ÉQUIVARIANTES

PAR

E. VASSEROT (*)

RÉSUMÉ. — Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel équivariant pour l'action d'un groupe de Lie compact connexe G, nous définissons la classe de Segre G-équivariante d'un sous-fibré en cônes G-stable $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$. Nous établissons une formule multiplicative pour les classes de Segre G-équivariantes analogue à une égalité conjecturée par W. Borho, J.-L. Brylinski, W. Fulton et R. Mac Pherson.

ABSTRACT. — Let G be a compact connected Lie group and let $\mathcal{E}$ denote a G-equivariant bundle. For every G-equivariant cone bundle $\mathcal{C}$ in $\mathcal{E}$ we define the G-equivariant Segre class of $\mathcal{C}$. We establish a multiplicative formula for G-equivariant Segre class analogous to a conjectural equality of W. Borho, J.-L. Brylinski, W. Fulton and R. Mac Pherson.

0. Introduction

Le but de cet article est de démontrer une formule multiplicative pour les classes de Segre de fibrés en cônes. Dans le cas particulier d'une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0,$$

elle correspond à l'égalité suivante entre les classes d'Euler de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$

$$e(\mathcal{E}) = e(\mathcal{E}')\, e(\mathcal{E}'').$$

Nous démontrons cette formule en cohomologie équivariante.

Dans la première partie nous rappelons la définition du complexe de De Rham et de l'homomorphisme de Chern-Weil équivariants. Dans la

(*) Texte reçu le 19 octobre 1990, révisé le 13 mai 1991
E. VASSEROT, ENS, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris.

Classification AMS : 14 M 10, 55 N 91

seconde nous définissons la classe de Segre équivariante d'un fibré en cônes. Cette classe s'exprime simplement en fonction de la classe de Thom équivariante. Dans la troisième partie nous démontrons la formule annoncée.

1. Cohomologie équivariante, homomorphisme de Chern-Weil

Soient M une variété différentiable réelle et G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui agit à gauche sur M. Notons $\mathcal{A}^\bullet(M)$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur M, $\mathcal{A}^\bullet_c(M)$ la sous-algèbre des formes à support compact et $\mathcal{D}^\bullet(M)$ l'algèbre graduée des courants sur M. Si $X \in \mathfrak{g}$ on note X_M le champ de vecteurs sur M induit par l'action de X et i_X le produit intérieur par X_M. Soit d_X l'opérateur sur $\mathcal{A}^\bullet(M)$ tel que :

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}^\bullet(M), \qquad \mathrm{d}_X\alpha = \mathrm{d}\alpha + 2i\pi \cdot i_X(\alpha).$$

Pour tout $\beta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ et $u \in G$ soit $u \cdot \beta$ l'image directe de β par l'action de u sur M. On appelle *forme différentielle G-équivariante polynômiale* sur M une application polynômiale $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^\bullet(M)$ telle que :

$$(1) \qquad \forall u \in G, \qquad \alpha(uX) = u \cdot \alpha(X).$$

L'algèbre $\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(M)$ des formes différentielles G-équivariantes polynômiales sur M est munie de la différentielle $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$,

$$(\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = \mathrm{d}_X\big(\alpha(X)\big),$$

et de la graduation telle que si P est un polynôme de degré d_1 sur $\mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathcal{A}^{d_2}(M)$,

$$\deg\big(P \otimes \alpha\big) = 2d_1 + d_2.$$

Soient $H^\bullet_{\mathfrak{g}}(M, \mathbb{C})$ les groupes de cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(M), \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$, appelé *complexe de De Rham G-équivariant* de M. Une forme différentielle G-équivariante C^∞ sur M est une application $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}^\bullet(M)$ de classe C^∞ qui vérifie (1). L'opérateur $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$ s'étend à l'algèbre $\mathcal{A}^\infty_{\mathfrak{g}}(M)$ des formes différentielles G-équivariantes C^∞ sur M et on note $H^\infty_{\mathfrak{g}}(M, \mathbb{C})$ le groupe de cohomologie de $(\mathcal{A}^\infty_{\mathfrak{g}}(M), d_{\mathfrak{g}})$. On peut étendre sans difficulté la notion de formes différentielles équivariantes à des applications de classe C^k de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}^\bullet(M)$ pour tout entier k positif ou nul. Soit $\mathfrak{g}'$ une sous-variété différentiable réelle de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Désignons par $\mathcal{A}^\infty_{\mathfrak{g}'}(M)$ l'algèbre des formes différentielles G-équivariantes C^∞ de M définies au voisinage de $\mathfrak{g}'$, et $H^\infty_{\mathfrak{g}'}(M, \mathbb{C})$ le groupe de cohomologie associé. Soit $\mathcal{D}^\infty_{\mathfrak{g}}(M)$

l'algèbre des courants G-équivariants C^∞ sur M, c'est-à-dire des applications $T : \mathfrak{g} \to \mathcal{D}^\bullet(M)$ de classe C^∞ vérifiant l'égalité duale de (1). Si $\alpha \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},c}(M)$, l'application $X \mapsto T(X)(\alpha(X))$ est dans $C^\infty(\mathfrak{g})$. La suite de courants équivariants T_k converge vers T dans $\mathcal{D}^\infty_{\mathfrak{g}}(M)$ si les $T_k(\alpha)$ convergent vers $T(\alpha)$ dans $C^\infty(\mathfrak{g})$ uniformément sur tout compact ainsi que leurs dérivées pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^\infty_{\mathfrak{g},c}(M)$.

Soit K un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et $\mathcal{P}$ un fibré principal de groupe structural K et de base M. Supposons que l'action de G sur M se relève en une action à gauche sur $\mathcal{P}$. Fixons une 1-forme de connexion G-invariante ω sur $\mathcal{P}$ et notons $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$ la 2-forme de courbure correspondante. Dans une base $Y_1,\dots,Y_\ell$ de $\mathfrak{k}$ les formes ω et Ω s'écrivent

$$\omega = \sum_{k=1}^{\ell} \omega^k Y_k \quad \text{et} \quad \Omega = \sum_{k=1}^{\ell} \Omega^k Y_k,$$

où $\omega^k \in \mathcal{A}^1(\mathcal{P})$ et $\Omega^k \in \mathcal{A}^2(\mathcal{P})$ pour tout k. Soit F une variété différentiable réelle munie d'une action à gauche de K et $\mathcal{F} = \mathcal{P} \times_K F$ la fibration sur M correspondante. Si $Y \in \mathfrak{k}$ l'opérateur i_Y sur $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)$ est le produit intérieur par $Y_{\mathcal{P}\times F} = Y_{\mathcal{P}} + Y_F$, et si $X \in \mathfrak{g}$, l'opérateur i_X agit sur $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)$ par le produit intérieur par $X_{\mathcal{P}}$ sur $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P})$ et par zéro sur $\mathcal{A}^\bullet(F)$. D'après [MQ, p. 101], on associe à la connection ω l'opérateur de projection h_ω de $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)$ sur la sous-algèbre des formes K-horizontales

$$\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)_{\mathrm{hor}} = \{\alpha \in \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F) \mid i_Y(\alpha) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{k}\}$$

défini par :

$$h_\omega = \prod_{k=1}^{\ell} \big(1 - \omega^k i_{Y_k}\big).$$

Le calcul donne :

$$h_\omega = 1 - \sum_{k=1}^{\ell} \omega^k i_{Y_k} - \sum_{1\le k<k'\le \ell} \omega^k \omega^{k'} i_{Y_k} i_{Y_{k'}} + \cdots. \tag{2}$$

Soient $S(\mathfrak{k}^*)$ et $S(\mathfrak{g}^*)$ les algèbres de polynômes sur $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{g}$. L'algèbre des fonctions polynômiales $\mathfrak{k} \to \mathcal{A}^\bullet(F)$ s'identifie à $S(\mathfrak{k}^*) \otimes \mathcal{A}^\bullet(F)$.

PROPOSITION 1. — *L'application*

$$S(\mathfrak{k}^*) \otimes \mathcal{A}^\bullet(F) \longrightarrow S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)_{\mathrm{hor}}$$

qui à α associe

$$X \in \mathfrak{g} \longmapsto h_\omega\Big(\alpha\Big(\frac{i}{2\pi}\Omega - i_X(\omega)\Big)\Big) \tag{3}$$

se restreint en un morphisme d'algèbres différentielles graduées de $(\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(\mathcal{F}), \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ *appelé* homomorphisme de Chern-Weil équivariant.

Démonstration. — L'algèbre des formes K-basiques $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)_{\mathrm{bas}}$ sur $\mathcal{P} \times F$, c'est-à-dire des formes K-invariantes et K-horizontales sur $\mathcal{P} \times F$, s'identifie à $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{F})$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ notons :

$$\Omega_X = \frac{i}{2\pi}\Omega - i_X(\omega) = \sum_{k=1}^{\ell} \Omega_X^k Y_k.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{k}}(F)$, alors l'image par (3) de α est un élément de

$$S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)_{\mathrm{bas}}$$

qui est G-invariant. En effet h_ω commute à l'action de $v \in K$ sur $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P}\times F)$ et donc

$$\begin{aligned} v \cdot h_\omega\big(\alpha(\Omega_X)\big) &= h_\omega\big(v \cdot \big(\alpha(\Omega_X)\big)\big) \\ &= h_\omega\big(v \cdot \alpha\big(\mathrm{ad}(v^{-1})\Omega_X\big)\big) \\ &= h_\omega\big(\alpha(\Omega_X)\big), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $h_\omega(\alpha(\Omega_X)) \in \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P} \times F)_{\mathrm{bas}}$. De même, ω étant G-invariante, h_ω commute à l'action de $u \in G$ sur $\mathcal{A}^\bullet(\mathcal{P}\times F)$ et $u \cdot \Omega_X = \Omega_{uX}$. Donc

$$\begin{aligned} u \cdot h_\omega\big(\alpha(\Omega_X)\big) &= h_\omega\big(u \cdot \alpha(\Omega_X)\big) \\ &= h_\omega\big(\alpha(\Omega_{uX})\big), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'égalité (1) est vérifiée par $h_\omega(\alpha(\Omega_\bullet))$. Démontrons à présent que l'homomorphisme de Chern-Weil commute aux différentielles équivariantes. Sachant que

$$h_\omega(\omega^k) = 0 \quad \text{et} \quad h_\omega(\mathrm{d}\omega^k) = \Omega^k,$$

on trouve d'après la formule (2) que :

$$h_\omega \circ \mathrm{d}_X \circ h_\omega = h_\omega \circ \Big(\mathrm{d}_X + 2i\pi \sum_{k=1}^{\ell} \Omega_X^k i_{Y_k}\Big).$$

Donc si $f \in S(\mathfrak{k}^*)$ et $\alpha \in \mathcal{A}^\bullet(F)$,

$$\begin{aligned} h_\omega \circ \mathrm{d}_X \circ h_\omega\big(f(\Omega_X)\otimes\alpha\big) &= h_\omega\Big\{\mathrm{d}_X\big(f(\Omega_X)\otimes\alpha\big) \\ &\qquad + 2i\pi\sum_{k=1}^{\ell}\Omega_X^k i_{Y_k}\big(f(\Omega_X)\otimes\alpha\big)\Big\} \\ &= h_\omega\big(f(\Omega_X)\otimes(\mathrm{d}\alpha + 2i\pi\cdot i_{\Omega_X}\alpha)\big), \\ &= h_\omega\big(\mathrm{d}_{\mathfrak{k}}(f\otimes\alpha)(\Omega_X)\big), \end{aligned}$$

parce que :

$$h_\omega\big(\mathrm{d}_X(\Omega_X)\big) = 0 \quad \text{et} \quad i_Y(\Omega) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{k}.$$

Remarque 1. — La démonstration de la PROPOSITION 1 (qui est une version équivariante de l'homomorphisme de Chern-Weil défini dans [MQ], [BGV] et [C]) est essentiellement une adaptation des démonstrations des Lemmes 5.9 et 5.11 dans [MQ].

2. Classe de Segre et classe de Thom équivariantes

Fixons une représentation orthogonale de K sur $\mathbb{R}^n$ (n entier pair) qui préserve l'orientation canonique et notons $\mathcal{E} = \mathcal{P}\times_K\mathbb{R}^n$ le fibré vectoriel orienté sur M associé. Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est naturellement muni d'un produit scalaire G-invariant noté $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Désignons par $\mathcal{A}^\bullet_{\mathrm{cv}}(\mathcal{E})$ l'algèbre des formes différentielles sur $\mathcal{E}$ à support compact dans les fibres et par $\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E})$ le sous-espace de $\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(\mathcal{E})$ des applications polynômiales $\mathfrak{g}\to\mathcal{A}^\bullet_{\mathrm{cv}}(\mathcal{E})$ qui vérifient l'égalité (1). Soient $H^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E},\mathbb{C})$ les groupes de cohomologie de $(\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E}),\mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$, p la projection $\mathcal{E}\to M$ et $p_* = \int_{\mathcal{E}/M}$ l'intégration fibre à fibre $\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E})\to\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(M)$ (voir [BT, p. 61] pour la construction de p_*). Pour tout $X\in\mathfrak{g}$ notons L_X la dérivée de Lie de l'action sur l'espace des sections de $\mathcal{E}$. Soit ∇ la connection unitaire G-invariante sur $\mathcal{E}$ associée à ω et $R=\nabla^2$ la 2-forme de courbure de ∇. On appelle partie verticale de l'action de X sur $\mathcal{E}$ la section C^∞ de $\operatorname{End}\mathcal{E}$:

$$J_X = L_X - \nabla_{X_M} = -\omega(X_{\mathcal{P}}).$$

Notons Pf le Pfaffien des matrices antisymétriques à coefficients complexes. Soit $e(.,\mathcal{E},\nabla)$ la forme différentielle G-équivariante sur M de degré n définie pour tout $X\in\mathfrak{g}$ par :

$$e(X,\mathcal{E},\nabla) = \mathrm{Pf}\Big(\frac{i}{2\pi}R + J_X\Big).$$

Le calcul montre que :

$$\mathrm{d}_X\big(e(X,\mathcal{E},\nabla)\big) = 0.$$

La classe d'Euler G-équivariante de $\mathcal{E}$ est la classe $e(\,\cdot\,,\mathcal{E}) \in H^n_{\mathfrak{g}}(M,\mathbb{C})$ de $e(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla)$. La classe de Thom G-équivariante de $\mathcal{E}$ l'unique classe $\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E}) \in H^n_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E},\mathbb{C})$ qui donne 1 après intégration fibre à fibre. Soient $x_1,\dots,x_n$ les coordonnées dans les fibres de $\mathcal{E}$ dans une trivialisation locale orthogonale. Notons θ la 1-forme de connexion de ∇ dans la trivialisation et $x = (x_1,\dots,x_n)$. Pour tout j dans $\{1,\dots,n\}$ on désigne par Dx_j la j-ème composante de $\mathrm{d}x + \theta x$. A chaque sous-ensemble $I = \{i_1,\dots,i_\ell\}$ de $\{1,\dots,n\}$ associons son complémentaire I^c dans $\{1,\dots,n\}$, son cardinal $|I|$, et pour $i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$:

$$Dx_I = Dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge Dx_{i_\ell}.$$

D'après [MQ] il existe des polynômes P_I sur $\mathfrak{so}(n)$ coïncidant au signe près avec le Pfaffien des matrices partielles indicées par I, tels que la forme différentielle sur $\mathcal{E}$ à décroissance rapide dans les fibres qui s'écrit en coordonnées locales

$$\forall X \in \mathfrak{g},\qquad \mathrm{Th}\big(X,\mathcal{E},\nabla\big) = \mathrm{e}^{-|x|^2}\sum_I P_{I^c}\Big(\frac{i}{2\pi}R + J_X\Big)\frac{D_{x_I}}{\pi^{|I|/2}} \tag{4}$$

représente $\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E})$.

Soit ε la section nulle de $\mathcal{E}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ notons σ_t l'action de t sur $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{E} \oplus \mathcal{E},\qquad \sigma_t(x,y) = \big(x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t\big).$$

Posons $S = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)_{\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}}$. On désigne par $\tilde{\alpha}$ l'image réciproque par $x \mapsto -x$ d'une forme α sur $\mathcal{E}$ et par $p_2 : \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la projection sur la seconde composante.

PROPOSITION 2. — *Pour tous $\alpha,\beta \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E})$ soient :*

$$\begin{aligned} P(\beta,\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\sigma_t^*\big(\alpha\wedge\beta\big) \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}\big(\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}\big),\\ Q(\beta,\alpha) &= p_{2*}i_S P(\beta,\alpha) \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Alors :

$$\tilde{\beta}\wedge\alpha - \alpha\wedge\beta = \big(\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} i_S + i_S \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\big)P(\beta,\alpha). \tag{5}$$

En particulier si $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$:

$$\alpha - p_*(\alpha) \wedge \mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla) = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} Q\big(\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla),\alpha\big). \tag{6}$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} \wedge \alpha - \alpha \wedge \beta &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\sigma_t^*(\alpha \wedge \beta)}{\mathrm{d}t},\\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\big(\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} i_S + i_S \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\big)\sigma_t^*(\alpha \wedge \beta),\\ &= \big(\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} i_S + i_S \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\big) P(\beta,\alpha).\end{aligned}$$

D'autre part $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} P(\beta,\alpha) = 0$ si $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\alpha = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\beta = 0$. La formule (6) s'obtient donc en prenant $\beta = \mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla)$ dans (5) et en intégrant fibre à fibre suivant p_2.

Remarque 2. — L'égalité (5) que m'a indiqué M. VERGNE est un analogue de l'invariance d'homotopie de la cohomologie de De Rham (voir par exemple [DNF, p. 11]). La formule (6) est une version en cohomologie équivariante de l'isomorphisme de Thom bien connu en cohomologie usuelle (voir [BT, prop. 6.18 et 12.4]) déjà mentionnée dans [AB, p. 5].

Supposons que $\mathcal{E}$ soit un fibré vectoriel complexe Hermitien, c'est-à-dire qu'il existe une représentation unitaire de K sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \times_K \mathbb{C}^n$. Le produit scalaire Hermitien est G-invariant. Soit $C \subset \mathbb{C}^n$ un cône de dimension m, c'est-à-dire une sous-variété analytique de dimension m de $\mathbb{C}^n$ stable par multiplication par $\mathbb{C}$. Supposons que C est stable par l'action de K, et notons $\mathcal{C} = \mathcal{P} \times_K C$ le fibré en cônes G-invariant sur M correspondant. Fixons $m \geq 1$ et notons $\mathbb{P}\mathcal{E}$ et $\mathbb{P}\mathcal{C}$ les fibrés projectifiés de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$. L'action quotient de G sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$ se relève naturellement au fibré en droites universel $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}^\times = \mathcal{E} - \varepsilon(M)$. Le fibré $\mathcal{E}^\times \to \mathbb{P}\mathcal{E}$ est isomorphe au fibré des repères de $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$. Le fibré vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ est muni d'une connexion G-invariante naturelle ∇', à savoir la connexion associée à la 1-forme sur $\mathcal{E}^\times$ qui vaut :

$$\frac{\langle Dz, z\rangle}{\langle z, z\rangle} \quad \text{en} \quad z \in \mathcal{E}^\times.$$

La partie verticale de l'action de $X \in \mathfrak{g}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ est la fonction J'_X sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$ définie par :

$$J'_X(\mathbb{C}z) = \frac{\langle J_X(z), z\rangle}{\langle z, z\rangle}, \quad \forall\, z \in \mathcal{E}^\times.$$

On suppose maintenant qu'il existe un sous-groupe d'algèbre de Lie $i\mathbb{R} \subset \mathfrak{g}$ qui agit verticalement sur $\mathcal{E}$ de sorte que i opère par multiplication par i fibre à fibre. Fixons un espace vectoriel $\mathfrak{g}_0$ supplémentaire de $i\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{g}$ et posons :

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}^\times \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}.$$

La forme $e(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla')$ est inversible pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

DÉFINITION. — On appelle *classe de Segre G-équivariante* de $\mathcal{C}$ la classe $s(\cdot, \mathcal{C}) \in H^\infty_{\mathfrak{g}}(M, \mathbb{C})$ de la forme différentielle G-équivariante $s(\cdot, \mathcal{C}, \nabla)$ telle que :

$$\forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}, \quad s(X, C, \nabla) = \int_{\mathbb{P}C/M} e\big(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'\big)^{-1}. \tag{7}$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}_0$, on a :

$$s\big(1 + X, \mathcal{C}, \nabla\big) = \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{P}C/M} (-1)^k e\big(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'\big)^k.$$

La classe de Segre équivariante est donc un analogue en cohomologie de De Rham équivariante de la classe de Segre définie dans [F, § 4].

L'espace total de $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ est obtenu par éclatement de $\varepsilon(M)$ dans $\mathcal{E}$. Soit π la projection de l'espace total de $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$, et q celle de $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ sur $\mathbb{P}\mathcal{E}$. Notons λ la section nulle de $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$.

THÉORÈME 3. — *L'égalité suivante est vérifiée dans* $\mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(\mathbb{P}\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} e(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla') \wedge \int_{\mathcal{E}^\times/\mathbb{P}\mathcal{E}} \mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{E}, \nabla) \\ = e(\cdot, \mathcal{E}, \nabla) - \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\Big(\lambda^* Q\big(\mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'), \pi^* \mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{E}, \nabla)\big)\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

De même dans $\mathcal{A}^\infty_{\mathfrak{g}}(M)$:

$$\begin{aligned} s(\cdot, \mathcal{C}, \nabla) \wedge e(\cdot, \mathcal{E}, \nabla) = \int_{C/M} \mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{E}, \nabla) \\ + \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \int_{\mathbb{P}C/M} e(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla')^{-1} \wedge \lambda^* Q\Big(\mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'), \pi^* \mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{E}, \nabla)\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

Démonstration. — D'après la PROPOSITION 2, si $\alpha \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g},\mathrm{cv}}(\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}})$ vérifie $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$:

$$\lambda^*\alpha - e\big(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'\big) \wedge q_*\alpha = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\Big(\lambda^* Q\big(\mathrm{Th}(\cdot, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'), \alpha\big)\Big).$$

Cette formule appliquée à $\alpha = \pi^* \operatorname{Th}(\,\cdot\,, \mathcal{E}, \nabla)$ donne l'égalité (8). Soit $X \in \tilde{g}$, d'après (8) :

$$\int_{\mathcal{E}^\times/\mathbb{P}\mathcal{E}} \operatorname{Th}(X, \mathcal{E}, \nabla) = e(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla')^{-1} \wedge e(X, \mathcal{E}, \nabla) \\ - \mathrm{d}_X \Big(e(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla')^{-1} \wedge \lambda^* Q\big(\operatorname{Th}(X, \mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}, \nabla'), \pi^* \operatorname{Th}(X, \mathcal{E}, \nabla)\big)\Big).$$

La formule (9) s'obtient alors en appliquant $\int_{\mathbb{P}\mathcal{C}/M}$ à chacun des termes.

Remarque 3. — Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel réel orienté l'expression (7) n'a pas de sens parce que le fibré en droites $\mathcal{L}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}$ n'est pas orientable et n'admet donc pas de classe d'Euler dans les groupes de cohomologie à coefficients complexes. On appelle *cône* de $\mathbb{R}^n$ un sous-espace C de $\mathbb{R}^n$ muni d'une stratification de Whitney stable pour l'action scalaire de $\mathbb{R}_+^\times$. Un *cycle cônique* est un cône dont la partie lisse est une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$ et dont le courant d'intégration associé par [Va] est fermé. La classe de Segre d'un sous-fibré en cycles côniques $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ peut être définie par :

$$s(\,\cdot\,, \mathcal{C}) = e(\,\cdot\,, \mathcal{E})^{-1} \int_{\mathcal{C}/M} \operatorname{Th}(\,\cdot\,, \mathcal{E}).$$

Remarque 4. — Notons $\mathbb{H}$ le corps des quaternions et fixons une représentation unitaire de K sur $\mathbb{H}^n$. Le fibré $\mathcal{E}$ est donc muni d'une structure de fibré vectoriel quaternionique Hermitien. La formule (8) est encore vraie, $\mathbb{P}\mathcal{E}$ désignant le projectifié quaternionique associé à $\mathcal{E}$.

Soient M une variété complexe compacte de dimension complexe N et $p : \mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel holomorphe Hermitien G-équivariant de rang n. On suppose que $\mathcal{E}$ est muni d'une section holomorphe G-invariante f dont l'ensemble des zéros V est un sous-espace analytique de M de codimension n. Soient $V_1, \dots, V_r$ les composantes irréductibles de V. Notons

$$[V]_f = \sum_{i=1}^{n} m_i [V_i]$$

le cycle analytique sur M des zéros de f (voir [F, p. 15, 384]).

PROPOSITION 4. — *Pour toute classe de cohomologie équivariante* $\alpha \in H_{\mathfrak{g}}^\bullet(M, \mathbb{C})$:

$$\int_M e(\,\cdot\,, \mathcal{E})\alpha = \int_{[V]_f} \alpha. \tag{10}$$

Démonstration. — A chaque $t > 0$ on associe le courant équivariant T_t défini par :

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(M), \qquad T_t(\alpha) = \int_M (tf)^*\big(\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla)\big) \wedge \alpha.$$

La section tf étant G-invariante la forme $(tf)^*(\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla))$ est fermée pour l'opérateur de cobord $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$. D'après l'invariance par homotopie de la cohomologie équivariante, $T_t(\alpha)$ est donc indépendant de t dès lors que $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$. D'autre part pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^\bullet_{\mathfrak{g}}(M)$,

$$T_0(\alpha) = \int_M e(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla) \wedge \alpha.$$

Étudions T_t lorsque $t \uparrow \infty$. Notons p_2 la projection $\mathcal{E} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et z la coordonnée sur $\mathbb{C}$. Soit Z le sous-espace analytique de $\mathcal{E} \times \mathbb{C}$ d'équation

$$f \circ p - z\,\mathrm{Id} = 0.$$

La fibration $p_{2|Z}$ étant localement triviale au-dessus de $\mathbb{C}^*$ la fonction

$$\begin{aligned} z \longmapsto \int_{Z\cap p_2^{-1}(z)} & \mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla) \wedge p^*\alpha \\ &= \int_M (z^{-1}f)^*\,\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla) \wedge \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

est C^∞ sur $\mathbb{C}^*$. D'après [K, th. 3.3.2] elle s'étend continûment à $\mathbb{C}$ et est donnée en 0 par intégration sur un cycle de support V. Pour en déterminer les multiplicités, il suffit de se restreindre au voisinage d'un point lisse de V dans un ouvert de carte $U \subset M$ muni d'une trivialisation holomorphe de $\mathcal{E}$. Notons $x = (x_1, \ldots, x_N)$ des coordonnées holomorphes sur U telles que

$$U \cap V = \{x_1 = \cdots = x_n = 0\}$$

et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées dans les fibres de $\mathcal{E}$. On désigne par $f = (f_1, \ldots, f_n)$ les composantes de f dans ces coordonnées. D'après la formule (4), en posant

$$\alpha = \mathrm{d}x_{n+1}\,\mathrm{d}\bar{x}_{n+1} \cdots \mathrm{d}\bar{x}_N,$$

on trouve quand $t \uparrow \infty$:

$$\begin{aligned}
&\int_U (tf)^*\big(\mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E},\nabla)\big)\alpha \\
&\sim \frac{1}{(-2i\pi)^n}\int_U (tf)^*\big(\mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}\bar{y}_1\cdots\mathrm{d}\bar{y}_n\big)\alpha \\
&\sim \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{U\setminus(U\cap V)} (tf)^*\big(\mathrm{e}^{-|y|^2}\,\mathrm{d}|y_1|^2\cdots\mathrm{d}|y_n|^2\big)f^*\Big(\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n}{y_1\cdots y_n}\Big)\alpha \\
&\sim \frac{1}{(-2i\pi)^n}\int_{U\setminus(U\cap V)} \mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-t^2|f_1|^2}\big)\cdots\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-t^2|f_n|^2}\big)f^*\Big(\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n}{y_1\ldots y_n}\Big)\alpha.
\end{aligned}$$

Le terme de droite est égal à

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(-2i\pi)^n}\int_{U\cap\{|f_k|>\varepsilon\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-t^2|f_1|^2}\big)\cdots\mathrm{d}\big(\mathrm{e}^{-t^2|f_n|^2}\big)f^*\Big(\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n}{y_1\cdots y_n}\Big)\alpha,$$

c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\mathrm{e}^{-nt^2\varepsilon^2}}{(2i\pi)^n}\int_{U\cap\{|f_k|=\varepsilon\}} f^*\Big(\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n}{y_1\cdots y_n}\Big)\alpha \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{U\cap\{|f_k|=\varepsilon\}} f^*\Big(\frac{\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n}{y_1\cdots y_n}\Big)\alpha.
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant la formule de Cauchy (voir [GH, § 5.2]).

Remarque 5. — La PROPOSITION 4 est une version en cohomologie équivariante d'un résultat classique en cohomologie (voir par exemple [CG, appendix 1] et [BT, prop. 12.8]).

3. Classe de Segre et multiplicité équivariantes

Soit M une variété complexe de dimension N. Soit H un tore compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ qui agit holomorphiquement à gauche sur M de telle manière que l'action de H n'admette que des points fixes isolés. Soit V une sous-variété analytique de M de dimension N' stable pour l'action de H et $p \in V$ un point fixe. Fixons un ouvert de carte U de M centré en p stable pour l'action de H, des coordonnées holomorphes $x_1,\ldots,x_N$ sur U et des poids $a_1,\ldots,a_N \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ tels que :

$$\forall X \in \mathfrak{h},\qquad \mathrm{e}^X\cdot\big(x_1,\ldots,x_N\big) = \big(\mathrm{e}^{a_1(X)}x_1,\ldots,\mathrm{e}^{a_N(X)}x_N\big).$$

Soit B_ε la boule de $\mathbb{C}^N$ de rayon ε centrée en 0. L'ouvert U s'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^N$ contenant B_1. Notons :

$$\omega(\,\cdot\,) = \frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}\bar{x}_k}{a_k(\,\cdot\,)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Det}(X) = \prod_{k=1}^{N} a_k(X).$$

Dans [J] JOSEPH associe à p une multiplicité équivariante

$$m_p(\,\cdot\,, V) \in S(\mathfrak{h}^*)$$

définie comme une généralisation de la multiplicité d'un anneau nœthérien gradué. ROSSMANN a démontré dans [R] que la multiplicité équivariante s'exprime analytiquement par :

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \qquad m_p(X,V) = \operatorname{Det}(X)\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\varepsilon^{-2N'}\int_{V\cap B_\varepsilon}\omega(X)^{N'}.$$

PROPOSITION 5. — *Supposons que V soit localement une intersection complète dans M. Soit $\mathcal{N}_V$ le fibré normal à V dans M. Pour tout $X \in \mathfrak{h}$ la multiplicité H-équivariante $m_p(X,V)$ de V en p est le déterminant de l'action de X sur la fibre $\mathcal{N}_{V,p}$.*

Démonstration. — Quitte à restreindre U le fibré vectoriel $\mathcal{N}_V$ sur V s'étend en un fibré vectoriel H-équivariant $\mathcal{E}$ sur U. D'autre part le calcul montre que, pour $X \in \mathfrak{h}$,

$$\mathrm{d}_X\big(-|x|^2 + \omega(X)\big) = 0.$$

Si $f \in C_c^N(\,]-1,0])$ posons :

$$f\big(-|x|^2 + \omega\big) = \sum_{k=0}^{N} f^{(k)}\big(-|x|^2\big)\frac{\omega^k}{k!} \in C^0\big(\mathfrak{g}, \mathcal{A}_c^\bullet(B_1)\big).$$

La forme équivariante $f(-|x|^2+\omega)$ est fermée. Par exemple soit $\varepsilon \in]0,1[$ et posons :

$$f(t) = \begin{cases} (t+\varepsilon^2)^{n+1} & \forall t \in \left]-\varepsilon^2, 0\right], \\ 0 & \forall t \in \left]-1, -\varepsilon^2\right]. \end{cases}$$

D'après la PROPOSITION 4 :

$$\text{(11)} \qquad \int_{B_\varepsilon} e(X,\mathcal{E})\, f\big(-|x|^2 + \omega(X)\big) = \int_{V\cap B_\varepsilon} f\big(-|x|^2 + \omega(X)\big).$$

La boule B_1 étant contractile fixons une connexion équivariante plate ∇ de $\mathcal{E}$ sur B_1. Alors $e(X,\mathcal{E},\nabla) \in S(\mathfrak{h}^*)$ est exactement le déterminant de l'action de X sur $\mathcal{N}_p$. L'égalité (11) est équivalente à :

$$e(X,\mathcal{E},\nabla)\int_{B_\varepsilon}(-|x|^2+\varepsilon^2)\omega^N$$
$$=\frac{1}{N+1}\int_{V\cap B_\varepsilon}\Big\{\sum_{k=N'}^{N+1}\binom{N+1}{k}\binom{k}{N'}\varepsilon^{2(N+1-k)}\big(-|x|^2\big)^{k-N'}\Big\}\omega^{N'}.$$

D'autre part soit :

$$\theta(X)=\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k\,\mathrm{d}\bar{x}_k}{a_k(X)}.$$

Le calcul donne :

$$\mathrm{d}_X\theta(X)=-|x|^2+\omega(X).$$

Donc pour tout entier ℓ positif :

$$(12)\qquad \int_{V\cap B_\varepsilon}\big(-|x|^2\big)^{\ell}\omega(X)^{N'}$$
$$=\binom{N'+\ell}{\ell}^{-1}\int_{V\cap B_\varepsilon}\mathrm{d}_X\Big(\theta(X)\wedge\big(-|x|^2+\omega(X)\big)^{N'+\ell-1}\Big),$$
$$=\binom{N'+\ell}{\ell}^{-1}\int_{V\cap\partial B_\varepsilon}\theta(X)\wedge\big(-\varepsilon^2+\omega(X)\big)^{N'+\ell-1},$$
$$=(-\varepsilon^2)^{\ell}\frac{N'}{N'+\ell}\int_{V\cap B_\varepsilon}\omega(X)^{N'}.$$

Les formules (11) et (12) donnent :

$$\varepsilon^2 e(X,\mathcal{E},\nabla)\int_{B_\varepsilon}\omega(X)^N=\varepsilon^{2(N+1-N')}N'\binom{N+1}{N'}$$
$$\times\int_{V\cap B_\varepsilon}\Big\{\sum_{k=N'}^{N+1}\binom{N+1-N'}{k-N'}\frac{(-1)^{k-N'}}{k}\Big\}\omega(X)^{N'}.$$

Puis en faisant tendre ε vers 0 :

$$e(X,\mathcal{E},\nabla)=N'\binom{N+1}{N'}\Big(\int_0^1 t^{N'-1}(1-t)^{N+1-N'}\,\mathrm{d}t\Big)m_p(X,V),$$
$$=m_p(X,V).$$

Reprenons les notations des §§ 1 et 2, c'est-à-dire que nous supposons que M est une variété complexe et que $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel complexe Hermitien G-équivariant sur M. Désignons par $\mathcal{C}\subset\mathcal{E}$ un fibré en cônes G-équivariant sur M de fibre typique $C\subset\mathbb{C}^n$.

THÉORÈME 6. — *Supposons que le fibré en cônes $\mathcal{C}$ soit localement une intersection complète. Notons $\mathcal{N}$ le fibré normal de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$. L'égalité suivante est vérifiée dans $H^{\infty}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(M,\mathbb{C})$:*

$$s(\,\cdot\,,\mathcal{E}) = s(\,\cdot\,,\mathcal{C})\, s\big(\,\cdot\,,\varepsilon^*\mathcal{N}\big). \tag{13}$$

Démonstration. — Soit $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. De l'égalité (9) on tire

$$s(X,\mathcal{E})\, e(X,\mathcal{E}) = s\big(X,\varepsilon^*\mathcal{N}\big)\, e\big(X,\varepsilon^*\mathcal{N}\big) = 1$$

et

$$s(X,\mathcal{C})\, e(X,\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{C}/M} \mathrm{Th}(X,\mathcal{E}).$$

La formule (13) est donc équivalente à

$$\int_{\mathcal{C}/M} \mathrm{Th}(\,\cdot\,,\mathcal{E}) = e(\,\cdot\,,\varepsilon^*\mathcal{N}).$$

Soit H un tore maximal de K et $\mathcal{N}_C$ le fibré normal de C dans $\mathbb{C}^n$. D'après l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant, pour démontrer le THÉORÈME 6 il suffit de vérifier que $\int_C \mathrm{Th}(Y,\mathbb{C}^n)$ est le déterminant de l'action de Y sur la fibre $\mathcal{N}_{C,0}$ pour tout $Y \in \mathfrak{k}$. Nous pouvons supposer que $Y \in \mathfrak{h}$. En effet tout vecteur de $\mathfrak{k}$ s'écrit vY avec $v \in K$ et $Y \in \mathfrak{h}$, les actions de Y et de vY sur $\mathcal{N}_{C,0}$ ont même déterminant et d'après (1) :

$$\int_C \mathrm{Th}\big(vY,\mathbb{C}^n\big) = \int_C \mathrm{Th}(Y,\mathbb{C}^n).$$

Le théorème découle donc de l'égalité suivante (voir [V, th. 12]) et de la PROPOSITION 5 :

$$m_p(Y,C) = \int_C \mathrm{Th}(Y,\mathbb{C}^n).$$

Remarque 6. — Le formule (13) est un analogue en cohomologie de De Rham équivariante de la formule conjecturée par W. BORHO, J.-L. BRYLINSKI, W. FULTON et R. MAC PHERSON dans [BBM, p. 94]. En effet, supposons qu'il existe un fibré vectoriel $\mathcal{F}$ sur M et des applications holomorphes $f_1,\dots,f_{n-m}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ préservant les fibres, telles que :

$$\mathcal{C} = \big\{f_1 = f_2 = \cdots = f_{n-m} = 0\big\}\cdot$$

Alors les f_j s'identifiant à des sections de $p^*\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$, et $\mathcal{C}$ est localement une intersection complète de fibré normal $p^*\mathcal{F}$. La formule (13) s'écrit donc :

$$s(\,\cdot\,,\mathcal{E}) = s(\,\cdot\,,\mathcal{C})\, s(\,\cdot\,,\mathcal{F}).$$

Je remercie M. VERGNE pour m'avoir présenté ce sujet ainsi que pour ses indications.

BIBLIOGRAPHIE

[AB] ATIYAH (M.F.) and BOTT (R.). — *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, t. **23**, 1984, p. 1–28.

[BBM] BORHO (W.), BRYLINSKI (J.-L.) and MAC PHERSON (R.). — *Nilpotent Orbits, Primitive Ideals and Characteristic Classes*, Progress in Mathematics, **78**, Birkhäuser, 1989.

[BGV] BERLINE (N.), GETZLER (E.) and VERGNE (M.). — *Heat kernels and the Dirac operator*. — A paraître.

[BT] BOTT (R.) and TU (L.W.). — *Differential Forms in Algebraic Topology*. — Springer-Verlag, 1982.

[C] CARTAN (H.). — *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Coll. Topologie CBRM, 1950, p. 57–71.

[CG] CORNALBA (M.) and GRIFFITHS (P.). — *Analytic Cycles and Vector Bundles on Non-Compact Algebraic Varieties*, Invent. Math., t. **28**, 1975, p. 1–106.

[DNF] DOUBROVINE (B.), NOVIKOV (S.) and FOMENKO (A.). — *Géométrie contemporaine III*. — Mir, 1987.

[F] FULTON (W.). — *Intersection theory*. — Springer-Verlag, 1984.

[GH] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). — *Principles of Algebraic Geometry*. — John Wiley and Sons, 1978.

[J] JOSEPH (A.). — *On the variety of a highest weight module*, J. Algebra, t. **88**, 1984, p. 238–278.

[K] KING (J.R.). — *The currents defined by analytic varieties*, Acta Math., t. **127**, 1971, p. 185–220.

[MQ] MATHAI (V.) and QUILLEN (D.). — *Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms*, Topology, t. **25**, 1986, p. 85–110.

[R] ROSSMANN (W.). — *Equivariant multiplicities on complex varieties*, Astérisque, t. **173/174**, 1989, p. 313–330.

[V] VERGNE (M.). — *Polynômes de Joseph et représentations de Springer*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **23**, 1990, p. 543–562.

[Va] VERONA (A.). — *Integration on Whitney prestratifications*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., t. **17**, 1972, p. 1473–1480.