BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LESIGNE

Équations fonctionnelles, couplages de produits gauches et théorèmes ergodiques pour mesures diagonales

Bulletin de la S. M. F., tome 121, nº 3 (1993), p. 315-351

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_3_315_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 315–351.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES, COUPLAGES DE PRODUITS GAUCHES ET THÉORÈMES ERGODIQUES POUR MESURES DIAGONALES

PAR

E. LESIGNE (*)

RÉSUMÉ. — On étudie certaines propriétés ergodiques des systèmes dynamiques mesurés qui sont des extensions isométriques abéliennes de systèmes à spectre discret. On démontre pour ces systèmes un théorème ergodique ponctuel du type « récurrence multiple ». On définit pour ces extensions une notion d'irréductibilité. Sous cette condition d'irréductibilité, les couplages d'extensions ont des propriétés remarquables. Si cette condition n'est pas satisfaite, le système étudié est un facteur d'une translation sur un quotient compact de groupe nilpotent.

ABSTRACT. — We study some ergodic properties of measure preserving dynamical systems which are abelian isometric extensions of discrete spectrum systems. We prove for these systems a pointwise ergodic theorem of the type « multiple recurrence ». We define for these extensions an irreducibility condition. Under this condition, the joinings of extensions have good properties. If this condition is not satisfied, the system appears as a factor of a translation on a compact quotient of nilpotent group.

Introduction

On désigne par $(X, +)$ un groupe compact abélien métrisable et connexe, par $T : x \mapsto x + \alpha$ une translation ergodique de X.

Si $(G, \cdot)$ est un groupe compact abélien métrisable, on appelle *cocyle* de X dans G toute application mesurable de X dans G. Si φ est un tel cocycle, on lui associe un système dynamique mesuré

$$\mathcal{S}_\varphi = \big(X \times G, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(G), m_X \otimes m_G, T_\varphi\big),$$

(*) Texte reçu le 22 janvier 1992, révisé le 11 septembre 1992.
E. LESIGNE, Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, Parc de Grandmont, 37200 Tours.
Classification AMS : 28D.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1993/315/$ 5.00

où $\mathcal{B}(\cdot)$ et m désignent respectivement les tribus boréliennes et les probabilités de Haar des groupes considérés, et où la transformation T_φ est définie par $T_\varphi(x,g) = (x+\alpha, g\cdot\varphi(x))$.

Nous allons établir des liens entre propriétés ergodiques du système $\mathcal{S}_\varphi$ et propriétés du cocycle φ.

Nous commencerons par rappeler des définitions usuelles et des résultats connus.

On notera $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

DÉFINITION 1. — Le cocycle φ est dit *ergodique* si le système $\mathcal{S}_\varphi$ est ergodique.

DÉFINITION 2. — Le cocycle φ est dit *faiblement mélangeant* si il est ergodique et si les spectres ponctuels de T_φ et T sont les mêmes, ou — de façon équivalente — si les seules fonctions propres pour l'action de T_φ sur $L^2(X\times G)$ sont les produits d'une constante et d'un caractère de X.

DÉFINITION 3. — Le cocycle φ est appelé un *cobord* si il existe une application mesurable ψ de X dans G telle que

$$\varphi = \psi\circ T\cdot\psi^{-1} \quad \text{(p.p)}.$$

Le cocycle φ est appelé un *quasi-cobord* si il existe g dans G tel que $\varphi\cdot g$ soit un cobord.

PROPOSITION 1 (cf. [A]). — *Soit φ un cocycle de X dans G.*

a) *φ est ergodique si et seulement si il n'existe pas de caractère non trivial σ de G tel que $\sigma\circ\varphi$ soit un cobord (de X dans $\mathbb{U}$).*

b) *φ est faiblement mélangeant si et seulement si il n'existe pas de caractère non trivial σ de G tel que $\sigma\circ\varphi$ soit un quasi-cobord (de X dans $\mathbb{U}$).*

Voici la première définition originale.

DÉFINITION 4. — Un cocycle φ de X dans G sera dit *irréductible* si, pour tout caractère non trivial σ de G,

$$\Big\{t\in X : \sigma\circ\varphi(x+t)/\sigma\circ\varphi(x) \text{ est un quasi-cobord (de } X \text{ dans } \mathbb{U})\Big\}$$

est négligeable.

REMARQUE. — Les cinq notions introduites dans les définitions précédentes dépendent bien sûr du choix de α dans X ; nous devrions parler par exemple de cocycle α-irréductible. Nous nous en dispenserons quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le choix de la translation sur X.

L'étude de la condition d'irréductibilité est développée dans la suite. On y démontre en particulier que si φ est un cocycle de X dans $\mathbb{U}$ tel que, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord, alors le système dynamique $\mathcal{S}_\varphi$ est facteur d'une translation sur un quotient compact de groupe nilpotent. Dans le cas où X est le tore de dimension 1, cette condition sur φ entraîne que le système dynamique $\mathcal{S}_\varphi$ est à spectre quasi-discret.

Remarquons que si φ est un cocycle de X dans $\mathbb{U}$, l'ensemble

$$\big\{t \in X : \varphi(x+t)/\varphi(x) \text{ est un quasi-cobord}\big\}$$

est un sous-groupe de X, stable sous la translation T, et mesurable (PROPOSITION 2). Si cet ensemble est non négligeable, il est donc égal à X.

EXEMPLES :

a) Les exemples immédiats de cocycles non irréductibles sont les cocycles affines, ou les cocycles ne différant d'un cocycle affine que par un cobord, c'est-à-dire les cocycles φ de la forme

$$\varphi(x) = \rho(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)$$

où ρ est un homomorphisme de X dans G et $\tilde{\varphi}$ est un quasi-cobord. H. FURSTENBERG et B. WEISS ont remarqué les premiers qu'il existe des cocycles non irréductibles qui ne sont pas du type précédent ; ils ont noté le rôle important joué par les structures nilpotentes dans ce problème (voir le paragraphe II).

b) Quand X est le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on peut donner des exemples de cocycles en escalier qui sont irréductibles, grâce au travail de J.-P. CONZE présenté dans [C]. Examinons le cas où $G = \mathbb{U}$. On a alors, d'après [C] : pour tout entier $k \geq 2$, pour presque tous $\alpha, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_k$ dans $\mathbb{T}$, le cocycle φ en escalier admettant $t_1, t_2, \dots, t_k$ comme points de discontinuité et prenant les valeurs $\mathrm{e}^{2i\pi a_1}, \dots, \mathrm{e}^{2i\pi a_k}$ est α-irréductible. Une condition suffisante d'irréductibilité peut être donnée par des conditions diophantiennes sur $\alpha, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_k$. Par exemple (en notant, pour tout réel x, $\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$) : si α et t sont dans $[0,1[$ et vérifient « il existe une suite strictement croissante d'entiers (k_n) telle que $\sup_n k_n\|k_n\alpha\| < \frac{1}{16}$ et $\inf_n \|k_n t\| > \frac{1}{4}$ » et si a est irrationnel, alors le cocycle

$$\varphi = \exp\big(2i\pi a \cdot \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\mathbf{t}[}\big)$$

de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{U}$ est α-irréductible.

c) On trouvera également une construction de cocycle en escalier irréductible dans [Lem].

Énoncés des théorèmes. — Soit φ un cocycle de X dans G. Si φ n'est pas irréductible alors il existe un caractère non trivial σ de G tel que, pour tout t dans X, le cocycle $\sigma\varphi(x+t)/\sigma\varphi(x)$ soit un quasi-cobord. D'après la PROPOSITION 1, on en déduit que si φ n'est pas irréductible, alors, pour tout t dans X, le cocycle $(\varphi(x), \varphi(x+t))$ de X dans G^2 n'est pas faiblement mélangeant et le cocycle $(\varphi(x), \varphi(x+t), \varphi(x+2t))$ de X dans G^3 n'est pas ergodique. Nous allons voir que la réciproque est vraie, et même beaucoup plus.

THÉORÈME 1. — *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de cocycles de X dans G ; à tout t dans X, on associe un cocycle $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$ de X dans $G^{\mathbb{Z}}$ défini par :*

$$\varphi_t^{\mathbb{Z}}(x) = \big(\varphi_n(x+nt)\big)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Si tous les φ_n sont irréductibles, alors, pour presque tout t, le cocycle $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$ est faiblement mélangeant.

Application. — Si φ est un cocycle irréductible de X dans G, alors, pour presque tout t dans X, le cocycle $\varphi_t^{\mathbb{N}}(x) = (\varphi(x+nt))_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans $G^{\mathbb{N}}$ est ergodique. Le système $\mathcal{S}_{\varphi_t^{\mathbb{N}}}$ est un autocouplage infini, ergodique et non coalescent du système $\mathcal{S}_\varphi$. Dans [Lem], M. LEMANCZYK utilise une construction de ce type pour donner des exemples de systèmes dynamiques faiblement isomorphes, non isomorphes.

THÉORÈME 2. — *Soit p un entier > 0 et $(\varphi_j)_{-p\le j\le p}$ une famille de cocycles de X dans G. On note T_j la transformation T_{φ_j} de $X\times G$.*

Pour tous $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_p$ dans $L^\infty(X\times G)$, pour presque tout (x,g) dans $X\times G$, la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=-p}^{p} f_j\big(T_j^{jk}(x,g)\big)$$

est convergente.

L'intérêt du THÉORÈME 2 est lié à la question suivante : soit $(\Omega, \mathcal{I}, \mu, S)$ un système dynamique mesuré et $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_p$ des fonctions mesurables bornées sur Ω ; la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=-p}^{p} f_j(S^{jk}\omega) \tag{1}$$

est-elle convergente ?

La réponse à cette question n'est pas connue en général, y compris pour la convergence dans L^1. Mais on sait, grâce aux travaux de H. FURSTENBERG (voir [F1] et [F2]) qu'il suffit d'étudier ce problème pour les systèmes dynamiques à spectre discret généralisé (en un sens à préciser, qui peut dépendre de p). Les produits gauches $\mathcal{S}_\varphi$ étudiés ici forment la première classe de systèmes à spectre discret généralisé sur lesquels la convergence de la suite (1) n'est pas un résultat immédiat. En effet on peut déduire, à partir des inégalités maximales ergodiques standards, une inégalité maximale pour les expressions (1) ; on constate ainsi qu'il suffit d'étudier la convergence de (1) pour les fonctions f_j dans une partie dense de $L^1(m_X \otimes m_G)$; la convergence presque sûre de (1) pour les systèmes dynamiques à spectre discret au sens ordinaire en est une conséquence immédiate (cf. [Les2]).

Pour démontrer le THÉORÈME 2, on utilisera les deux théorèmes suivants; le premier est dû à A. KOČERGIN ; il est également démontré dans [R].

THÉORÈME 3 (cf. [K]). — *Soit Ω un espace métrique compact muni d'une probabilité régulière μ et T un automorphisme ergodique de l'espace mesuré (Ω, μ). Pour toute fonction réelle intégrable sur Ω, il existe une fonction mesurable ψ de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que $f - \psi \circ T + \psi$ soit continue sur Ω.*

En utilisant les notations de l'introduction, on a alors :

COROLLAIRE. — *Pour tout cocycle φ de X dans $\mathbb{U}$, il existe un cocycle continu ψ de X dans $\mathbb{U}$ tel que φ/ψ soit un cobord.*

THÉORÈME 4 (cf. [Les3]). — *Soit N un groupe localement compact, à base dénombrable, et nilpotent d'ordre 2, dont le sous-groupe dérivé N' est compact. Soit D un sous-groupe discret de N tel que le quotient N/D soit compact. Pour toute fonction continue f sur N/D, pour tous a et x dans N, la suite*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a^k x D)$$

est convergente.

Ce théorème peut être démontré, suivant la technique développée dans [Les3], en utilisant le théorème ergodique de Wiener-Wintner.

Si N et D sont donnés comme précédemment, il existe sur l'espace N/D une unique probabilité invariante sous l'action de N par translation à gauche. Dans la suite, les espaces homogènes de ce type seront toujours munis de cette probabilité. En utilisant une inégalité maximale, on peut déduire du THÉORÈME 4 le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Soient N et D donnés comme dans le théorème précédent et a un élément de N. Pour tout entier $p > 0$, pour toutes fonctions $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_p$ dans $L^\infty(N/D)$, la suite*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=-p}^{p} f_j(a^{kj} xD)$$

converge pour presque tout x dans N.

Plan de la suite

I. Questions de mesurabilité

II. Structure des cocycles non irréductibles : équations fonctionnelles et nil-variétés

III. Preuve du théorème 1

IV. Preuve du théorème 2

V. Preuve du résultat énoncé dans I.

Cet article reprend, pour une part importante, un travail réalisé en commun avec J.-P. CONZE. Dans le paragraphe II, on reprend et on prolonge le contenu de [CL1] et [CL2]. La PROPOSITION 4 est une correction (présentée ici pour les équations fonctionnelles scalaires) de [Les1].

I. Questions de mesurabilité

On se place dans ce paragraphe dans une situation plus générale que celle précédemment décrite.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé séparable, et T une transformation inversible bimesurable et préservant μ sur cet espace.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables de X dans $\mathbb{U}$; cet ensemble est muni de la topologie de la convergence en probabilité.

Nous emploierons, dans ce paragraphe, les mots cobords et quasi-cobords aux sens suivants :

- un élément φ de $\mathcal{M}$ est un *cobord* si il existe ψ dans $\mathcal{M}$ tel que $\varphi = \psi \circ T / \psi$ (μ-p.p.) ;
- un élément φ de $\mathcal{M}$ est un *quasi-cobord* si il diffère d'un cobord par une constante multiplicative.

On notera C (resp. Q) l'ensemble des cobords (resp. des quasi-cobords).

PROPOSITION 2.

1) *Q et C sont des parties boréliennes de $\mathcal{M}$.*

2) *Il existe une application ψ de C dans $\mathcal{M}$ telle que pour tout $\varphi \in C$, $\varphi = \psi(\varphi) \circ T/\psi(\varphi)$ (μ-p.p.) et l'application*

$$\begin{aligned} C \times X &\longrightarrow \mathbb{U} \\ (\varphi, x) &\longmapsto \psi(\varphi)(x) \end{aligned}$$

est une application mesurable du couple (φ, x).

3) *Il existe une application Borel-mesurable λ de Q dans $\mathbb{U}$ telle que, pour tout $\varphi \in Q$, on ait $\varphi/\lambda(\varphi) \in C$.*

Un résultat de ce type est démontré par L. BAGGETT dans [B]. Il utilise des arguments topologiques très généraux. Nous donnons, dans le paragraphe V, une preuve plus élémentaire de cette proposition. De cette proposition on déduit que si X est un groupe compact muni de sa mesure de Haar, et si φ est une application mesurable de X dans $\mathbb{U}$, alors l'ensemble $\{t \in X : \varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord$\}$ est un borélien de X. En effet, l'application $t \mapsto \varphi(\cdot + t)/\varphi(\cdot)$ est continue de X dans $\mathcal{M}$.

II. Équations fonctionnelles et nil-variétés

On considère un cocycle φ à valeurs dans le groupe $\mathbb{U}$, défini sur un groupe compact abélien métrisable et connexe X, muni d'une translation ergodique $x \mapsto x + \alpha$.

PROPOSITION 3. — *Si, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t dans X, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un cobord, alors le cocycle φ est un quasi-cobord.*

PROPOSITION 4. — *Si, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t dans X, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord, alors le système dynamique mesuré $\mathcal{S}_\varphi$ est un facteur d'une translation sur un quotient compact de groupe nilpotent ; plus précisément : il existe un groupe nilpotent localement compact à base dénombrable, noté $\mathcal{N}$, il existe un sous-groupe discret $\mathcal{D}$ de $\mathcal{N}$ tel que le quotient $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ soit compact, et il existe un élément $\mathcal{O}$ de $\mathcal{N}$ tels que, si on définit un système dynamique mesuré en munissant l'espace homogène $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ de son unique probabilité $\mathcal{N}$-invariante et en considérant la translation par $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{N}/\mathcal{D}$, notée $R_\mathcal{O}$, alors le système dynamique mesuré $(X \times \mathbb{U}, T_\varphi)$ est un facteur du système dynamique mesuré $(\mathcal{N}/\mathcal{D}, R_\mathcal{O})$.*

REMARQUES :

• la construction de la nil-variété $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ sera précisée dans la preuve de la PROPOSITION 4 (voir LEMME 3).

• la PROPOSITION 4 est une généralisation «naturelle» de la PROPOSITION 3 qui affirme que si $\{t \in X : \varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un cobord$\}$ est non négligeable, alors le système dynamique mesuré $\mathcal{S}_\varphi$ est isomorphe à une translation sur un groupe compact abélien.

• Notons que H. FURSTENBERG et B. WEISS ont les premiers remarqué le rôle essentiel joué par les actions de groupe nilpotent dans ce problème d'équation fonctionnelle (communication personnelle; cf. également [F3]).

PROPOSITION 5. — *Si, pour un ensemble non négligeable de valeurs de* (t,s) *dans* X^2, *le cocycle* $[\varphi(x+t+s)/\varphi(x+s)]/[\varphi(x+t)/\varphi(x)]$ *est un quasi-cobord, alors, pour tous* (t,s) *dans* X^2, *ce cocycle est un cobord et, pour tout* t *dans* X, *le cocycle* $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ *est un quasi-cobord.*

Preuve de la proposition 3. — Si le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un cobord pour un ensemble non négligeable de valeurs de t, alors c'est un cobord pour tout t.

Pour tout t, il existe ψ_t application mesurable de X dans $\mathbb{U}$ telle que :

$$\varphi(x+t)/\varphi(x) = \psi_t(x+\alpha)/\psi_t(x). \tag{2}$$

Grâce à la PROPOSITION 2, on peut supposer que $\psi_t(x)$ dépend mesurablement de (t,x).

On considère les opérateurs unitaires U_1 et U_2 de $L^2(X)$ définis par :

$$U_1 f(x) = f(x+\alpha)\cdot\varphi(x) \quad \text{et} \quad U_2 f(x) = f(x+\alpha)/\varphi(x).$$

L'opérateur unitaire $U_1 \otimes U_2$ agit dans $L^2(X \times X)$. On définit une fonction F sur $X \times X$ par $F(x,x') = \psi_{x'-x}(x)$. On a

$$\big((U_1 \otimes U_2)F\big)(x,x') = \psi_{x'-x}(x+\alpha)\cdot\varphi(x)/\varphi(x'),$$

et donc, d'après (2), $(U_1 \otimes U_2)F = F$. Le fait que l'opérateur unitaire $U_1 \otimes U_2$ admette un vecteur invariant non nul implique que l'opérateur U_1 admet au moins un vecteur propre (ceci est classique, cf. par exemple, [F2, lemme 4.16]). Si $f(x+\alpha)\cdot\varphi(x) = \lambda \cdot f(x)$ avec $|\lambda| = 1$ et $f \not\equiv 0$, alors le module de f est constant, par ergodicité de la translation $x \mapsto x+\alpha$. Ceci prouve que φ est un quasi-cobord. $\square$

Avant de commencer la preuve de la PROPOSITION 4, donnons une définition et un exemple typique de la situation décrite dans cette définition.

DÉFINITION 5. — Soit f une application mesurable de X dans $\mathbb{U}$. Nous dirons que f est un *cobord dans une extension nilpotente* (de la translation sur X) si on est dans la situation suivante :

- il existe un groupe nilpotent localement compact et connexe N, d'ordre 2 ;
- il existe un sous-groupe discret D de N, avec N/D compact ;
- il existe un sous-groupe normal et compact M de N, contenant le sous-groupe dérivé N' et contenu dans le centre de N ;
- il existe $\tilde{\alpha} \in N$ et il existe une application mesurable g de N/D dans $\mathbb{U}$ tels que :
  $N/DM = X$, $\tilde{\alpha}DM = \alpha$,
  pour presque tout $z \in N$, $f(zDM) = g(\tilde{\alpha}zD)/g(zD)$ et pour tout $z' \in M$, la fonction $z \mapsto g(z'zD)/g(zD)$ est constante sur N.

REMARQUE. — Dans la situation décrite dans la définition précédente, on sait qu'il existe sur l'espace homogène quotient N/D une unique mesure de probabilité invariante sous l'action de N. Ces espaces homogènes seront toujours supposés équipés de cette mesure.

EXEMPLE. — Considérons le groupe d'Heisenberg $N = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}, \cdot)$ où

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, (x_3 + y_3 + x_1 y_2) \mod 1\big).$$

On pose $D = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ et $M = N' = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{T}$.

On a $X = \mathbb{T}^2$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ où α_1 et α_2 sont deux nombres réels tels que 1, α_1 et α_2 soient rationnellement indépendants.

On pose $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$.

Il existe une application mesurable θ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{U}$ telle que l'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \theta(x_1, x_2) \cdot \exp(2i\pi x_3)$ soit définie sur le quotient N/D. (On peut choisir par exemple $\theta(x_1, x_2) = \exp(-2i\pi x_1 [x_2])$.)

On pose :

$$g(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1, x_2) \cdot \exp(2i\pi x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = g\big((\alpha_1, \alpha_2, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3)\big)/g(x_1, x_2, x_3).$$

On peut vérifier que la fonction f est en fait définie sur le quotient N/DM (égal à $\mathbb{T}^2$). Cette fonction, définie sur $\mathbb{T}^2$, est un cobord dans une extension nilpotente de la translation par α sur $\mathbb{T}^2$. Dans la suite de cet exemple, on note f comme fonction de (x_1, x_2).

Fixons (t_1, t_2) dans $\mathbb{R}^2$, et posons :

$$\tau(x_1, x_2) = \theta(x_1 + t_1, x_2 + t_2) \cdot \overline{\theta(x_1, x_2)} \cdot (2i\pi t_1 x_2).$$

On vérifie sans peine que la fonction τ est définie sur le tore $\mathbb{T}^2$, et que l'on a :

$$\begin{aligned} &f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)/f(x_1, x_2) \\ &\qquad = \exp\big(2i\pi(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)\big) \cdot \tau\big(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2\big)/\tau(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Cette équation fonctionnelle satisfaite par f est un exemple typique des équations fonctionnelles étudiées dans la PROPOSITION 4.

Cette relation prouve que la fonction f n'est pas un cobord au sens de la définition 1 ; en effet, si c'était le cas, la fonction

$$(f(x_1 + t_1, x_2 + t_2)/f(x_1, x_2)) \cdot (\tau(x_1, x_2)/\tau(x_1 + \alpha_1, x_2 + \alpha_2))$$

serait également un cobord, et la constante $\exp(2i\pi(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1))$ serait de la forme $\exp(2i\pi(p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2))$ avec $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$; or ceci ne peut pas être vrai pour toutes les valeurs de (t_1, t_2).

Énonçons sous forme de lemmes, deux remarques sur les objets introduits dans la définition 5.

LEMME 1. — *Soient f_1 et f_2 deux applications mesurables de X dans $\mathbb{U}$. Si f_1 et f_2 sont chacune un cobord dans une extension nilpotente, alors leur produit est encore un cobord dans une extension nilpotente.*

LEMME 2. — *Soit f une application mesurable de X dans $\mathbb{U}$ et t un élément fixé de X. Si f est un cobord dans une extension nilpotente, alors la fonction $x \mapsto f(x+t)$ est égale au produit d'une constante par un cobord dans une extension nilpotente.*

Preuve du lemme 1. — Chaque fonction f_i est associée à la donnée d'un quintuplet $(N_i, D_i, M_i, \tilde{\alpha}_i, g_i)$ dont les propriétés sont décrites dans la définition 5. On pose :

$$\begin{aligned} &N = \big\{(z_1, z_2) \in N_1 \times N_2 : z_1 D_1 M_1 = z_2 D_2 M_2\big\}, \\ &D = D_1 \times D_2, \quad M = M_1 \times M_2, \quad \tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2), \\ &g(z_1 D_1, z_2 D_2) = g_1(z_1 D_1) \cdot g_2(z_2 D_2) \end{aligned}$$

Le quintuplet $(N, D, M, \tilde{\alpha}, g)$ vérifie les propriétés décrites dans la définition 5, et on a, en posant $z = (z_1, z_2)$:

$$f_1(z_1 D_1 M_1) \cdot f_2(z_2 D_2 M_2) = g(\tilde{\alpha} z D)/g(zD). \quad \square$$

Preuve du lemme 2. — La fonction f est associée à $(N, D, M, \tilde{\alpha}, g)$. Fixons t dans X et $\tilde{t}$ dans N tel que $\tilde{t}DM = t$. La fonction $x \mapsto f(x+t)$ induit la fonction $z \mapsto f(\tilde{t}zDM)$ définie sur N et on a :

$$\begin{aligned} f(\tilde{t}zDM) &= g(\tilde{\alpha}\tilde{t}zD)/g(\tilde{t}zD) \\ &= g\big([\tilde{\alpha}, \tilde{t}]\tilde{t}\tilde{\alpha}\, zD\big)/g(\tilde{t}zD) \end{aligned}$$

où $[\tilde{\alpha}, \tilde{t}] = \tilde{\alpha}\tilde{t}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{t}^{-1}$ appartient à M. La fonction $z \mapsto g([\tilde{\alpha}, \tilde{t}]zD)/g(zD)$ est égale à une constante notée C_t. On a

$$f(\tilde{t}zDM) = C_t \cdot h(\tilde{\alpha}zD)/h(zD),$$

où la fonction h est définie sur N/D par $h(zD) = g(\tilde{t}zD)$. $\square$

Le lemme suivant est l'étape essentielle dans la démonstration de la PROPOSITION 4. Il est contenu dans [CL2].

LEMME 3. — *Si, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t dans X, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord, alors il existe λ dans $\mathbb{U}$, γ dans $\widehat{X}$ et une fonction mesurable f de X dans $\mathbb{U}$ tels que :*

- $\varphi(x) = \lambda \cdot \gamma(x) \cdot f(x)$,
- *f est un cobord dans une extension nilpotente de la translation sur X.*

REMARQUES :

• Suivant la définition 5, la fonction f apparaissant dans le lemme précédent est associé à un quintuplet $(N, D, M, \tilde{\alpha}, g)$. La preuve du LEMME 3 nous indiquera que ce quintuplet peut être choisi de la forme suivante : il existe un revêtement $\widetilde{X}$ de X, un sous-groupe discret finiment engendré Γ de $\widetilde{X}$ tel que $X = \widetilde{X}/\Gamma$; il existe un bihomomorphisme B de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $B(\Gamma \times \Gamma) \subset \mathbb{Z}$; on définit une loi de groupe $*$ sur $\widetilde{X} \times \mathbb{T}$ par $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + B(x_1, x_2))$; on pose $N = (\widetilde{X} \times \mathbb{T}, *)$, $D = \Gamma \times \{0\}$, $M = \{0\} \times \mathbb{T}$ et la fonction g est de la forme $g(x, y) = \tilde{g}(x) \cdot \exp(2i\pi y)$.

• Dans le cas où X est le tore de dimension 1, la fonction f du LEMME 3 est un cobord ordinaire.

Preuve de la proposition 4 à partir du lemme 3. — On part de l'égalité $\varphi(x) = \lambda \cdot \gamma(x) \cdot f(x)$ où f est un cobord dans une extension nilpotente.

Suivant la définition 5, f est associée à un quintuplet $(N, D, M, \tilde{\alpha}, g)$. On définit un nouveau groupe nilpotent $\mathcal{N} = (N \times \widehat{X} \times \mathbb{U}, \perp)$ par

$$(z, \sigma, y) \perp (z', \sigma', y') = \big(zz', \sigma\sigma', yy'\sigma(z'DM)\big)$$

où $z, z' \in N$, où $\sigma, \sigma' \in \widehat{X}$ et où $y, y' \in \mathbb{U}$. Le groupe $\mathcal{D} = D \times \widehat{X} \times \{0\}$ est un sous-groupe discret de $\mathcal{N}$. On pose $\mathcal{O} = (\tilde{\alpha}, \gamma, \lambda)$. On définit une application A de $\mathcal{N}$ dans $X \times \mathbb{U}$ par :

$$A(z, \sigma, y) = \big(zDM, y\, g(zD)\big).$$

L'application A induit une surjection mesurable de $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ sur $X \times \mathbb{U}$, qui envoie la probabilité uniforme sur $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ sur la probabilité uniforme sur $X \times \mathbb{U}$. Si on note $R_{\mathcal{O}}$ la translation par $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{N}/\mathcal{D}$, on a :

$$T_\varphi \circ A = A \circ R_{\mathcal{O}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} T_\varphi \circ A(z, \sigma, y) &= T_\varphi\big(zDM, yg(zD)\big) = \big(\tilde{\alpha} zDM, yg(zD)\varphi(zDM)\big),\\ A \circ R_{\mathcal{O}}(z, \sigma, y) &= A\big(\tilde{\alpha} z, \gamma\sigma, y\lambda\gamma(zDM)\big) = \big(\tilde{\alpha} zDM, y\lambda\gamma(zDM) g(\tilde{\alpha} zD)\big), \end{aligned}$$

et d'après le LEMME 3, $g(zD)\varphi(zDM) = \lambda\gamma(zDM) g(\tilde{\alpha} zD)$.

Ceci prouve que le système dynamique mesuré $\mathcal{S}_\varphi$ est un facteur de la translation par $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{N}/\mathcal{D}$. □

Preuve du lemme 3. — φ est un cocycle de X dans $\mathbb{U}$ tel que, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ soit un quasi-cobord. Ceci entraîne que, pour tout t, le cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord. Ainsi, pour tout t dans X, il existe une constante λ_t dans $\mathbb{U}$ et une application mesurable ψ_t de X dans $\mathbb{U}$ telles que :

$$\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \psi_t(x+\alpha)/\psi_t(x). \tag{3}$$

Grâce à la PROPOSITION 2, on peut supposer que λ_t est une fonction mesurable de t et que $\psi_t(x)$ est une fonction mesurable du couple (t, x).

Dans (3), on peut toujours — quitte à changer λ_t — modifier ψ_t en le multipliant par une constante et un caractère de X. Nous allons montrer que pour une modification convenable de ψ_t, on a $\lim_{t\to 0} \psi_t = 1$ au sens de la convergence en mesure.

A chaque ψ_t on peut associer une constante μ_t de $\mathbb{U}$ et un caractère γ_t de X tels que :

$$\Big|\int_X \psi_t(x)\gamma_t(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \sup_{\gamma\in\widehat{X}} \Big|\int_X \psi_t(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x\Big|,$$
$$\int_X \mu_t\psi_t(x)\gamma_t(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^+.$$

Autrement dit, quitte à modifier ψ_t et λ_t, on peut supposer que (3) est satisfait avec la condition supplémentaire :

$$\int_X \psi_t(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\gamma\in\widehat{X}} \Big|\int_X \psi_t(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x\Big|.$$

De (3) on déduit que, pour tous t et s dans X :

$$\varphi(x+t+s)/\varphi(x) = \lambda_{t+s}\cdot\psi_{t+s}(x+\alpha)/\psi_{t+s}(x),$$

$$\varphi(x+t+s)/\varphi(x) = \big(\lambda_t\cdot\psi_t(x+\alpha)/\psi_t(x)\big)\cdot\big(\lambda_s\cdot\psi_s(x+t+\alpha)/\psi_s(x+t)\big).$$

L'association de ces deux égalités prouve que la fonction

$$\psi_{t+s}(x)\cdot\overline{\psi_s(x+t)}\cdot\overline{\psi_t(x)}$$

est une fonction propre pour la translation sur X. On a donc, avec $\delta_{t,s}\in\mathbb{U}$ et $\gamma_{t,s}\in\widehat{X}$,

$$\psi_{t+s}(x)\cdot\overline{\psi_s(x+t)}\cdot\overline{\psi_t(x)} = \delta_{t,s}\cdot\gamma_{t,s}(x). \tag{4}$$

Soit (s_n) une suite qui tend vers zéro dans X. Du fait que, dans $L^2(\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}x)$, la suite $\psi_{s_n+t}(x)/\psi_t(x)$ tend vers 1, on déduit que la suite (s_n) possède une sous-suite (s'_n) telle que, pour presque tout t, la suite $\psi_{s'_n+t}/\psi_t$ tend vers 1 dans $L^2(\mathrm{d}x)$. Fixons une suite (s'_n) et une valeur de t satisfaisant cette condition. De (4) on déduit que la suite

$$\psi_{s'_n}(x+t)\cdot\delta_{t,s'_n}\cdot\gamma_{t,s'_n}$$

tend vers 1 dans $L^2(\mathrm{d}x)$. En particulier

$$\lim_{n\to+\infty}\Big|\int_X \psi_{s'_n}(x+t)\cdot\delta_{t,s'_n}\cdot\gamma_{t,s'_n}(x)\,\mathrm{d}x\Big| = 1.$$

Autrement dit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big|\int_X \psi_{s'_n}(x)\cdot\gamma_{t,s'_n}(x)\,\mathrm{d}x\Big| = 1$. Or :

$$\Big|\int_X \psi_{s'_n}(x)\cdot\gamma_{t,s'_n}(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_X \psi_{s'_n}(x)\,\mathrm{d}x \le 1.$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X \psi_{s'_n}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

La suite (s_n) ayant été choisie arbitrairement, nous avons montré que

$$\lim_{s\to 0}\int_X \psi_s(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

ce qui prouve que ψ_s tend vers 1 en mesure quand s tend vers zéro. Cette condition de régularité étant satisfaite, nous allons voir que la fonction $t \mapsto \lambda_t$ est un homomorphisme local sur X.

On fait tendre t et s vers zéro dans l'identité (4); on en déduit que $\lim_{t,s\to 0}\delta_{t,s}\cdot\gamma_{t,s} = 1$. Les caractères de X formant une famille orthonormée dans $L^2(X)$, cela entraîne qu'il existe un voisinage V de zéro dans X tel que, pour tous t, s dans V, on ait $\gamma_{t,s} = 1$.

Or, par construction de $\gamma_{t,s}$, on a $\lambda_t\cdot\lambda_s/\lambda_{t+s} = \gamma_{t,s}(\alpha)$. Pour tous t, s dans V, on a finalement $\lambda_{t+s} = \lambda_t\cdot\lambda_s$.

La prochaine étape de la preuve consiste à construire la forme bilinéaire qui nous permettra de définir l'extension nilpotente.

De (3) on déduit que, pour tous t et s dans X,

$$\varphi(x+t+s)/\varphi(x) = \lambda_t\cdot\lambda_s\cdot\psi_s(x+t+\alpha)\cdot\psi_t(x+\alpha)\cdot\overline{\psi_s(x+t)}\cdot\overline{\psi_t(x)}.$$

Dans le membre de gauche, les variables t et s jouent un rôle symétrique. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \psi_s(x+t)\cdot\overline{\psi_t(x+s)}\cdot\overline{\psi_s(x)}$$

est invariante par la translation $x \mapsto x+\alpha$, donc est constante. Ainsi, pour tous t et s dans X, il existe $\lambda(s,t) \in \mathbb{U}$ tel que :

$$(5)\qquad \psi_s(x+t)\cdot\psi_t(x) = \lambda(s,t)\cdot\psi_t(x+s)\cdot\psi_s(x).$$

On a $\lambda(s,t) = \overline{\lambda(t,s)}$ et $\lim_{t\to 0}\lambda(s,t) = 1$.

Montrons que $\lambda(s,t)$ vérifie une propriété de bihomomorphisme local. Fixons t_1 et t_2 dans V et s dans X. D'après (5), on a :

$$\lambda(s,t_1+t_2) = \psi_s(x+t_1+t_2)\cdot\psi_{t_1+t_2}(x)\cdot\overline{\psi_{t_1+t_2}(x+s)}\cdot\overline{\psi_s(x)}.$$

D'après (4) et grâce au fait que $\gamma_{t_1,t_2} = 1$, on a :

$$\psi_{t_1+t_2}(x)\cdot\overline{\psi_{t_1+t_2}(x+s)} = \psi_{t_1}(x+t_2)\cdot\psi_{t_2}(x)\cdot\overline{\psi_{t_1}(x+s+t_2)}\cdot\overline{\psi_{t_2}(x+s)}.$$

D'après (5), on a :

$$\begin{aligned}\psi_s(x+t_1+t_2) &= \lambda(s,t_1)\cdot\psi_{t_1}(x+t_2+s)\cdot\psi_s(x+t_2)\cdot\overline{\psi_{t_1}(x+t_2)}\\ &= \lambda(s,t_1)\cdot\lambda(s,t_2)\cdot\psi_{t_1}(x+t_2+s)\cdot\psi_{t_2}(x+s)\\ &\qquad\cdot\psi_s(x)\cdot\overline{\psi_{t_2}(x)}\cdot\overline{\psi_{t_1}(x+t_2)}.\end{aligned}$$

En associant ces trois égalités, on obtient :

$$\lambda(s,t_1+t_2) = \lambda(s,t_1)\cdot\lambda(s,t_2).$$

Pour poursuivre la démonstration du LEMME 3, énonçons en un nouveau.

LEMME 4. — *Soient V un voisinage de zéro dans X et λ une application de $V \times V$ dans $\mathbb{U}$ telle que :*

(i) *pour tous t_1, t_2 et s dans V, si $t_1 + t_2 \in V$ alors*

$$\lambda(s, t_1 + t_2) = \lambda(s, t_1) \cdot \lambda(s, t_2)\,;$$

(ii) *pour tous t et s dans V, on a $\lambda(t,s) \cdot \lambda(s,t) = 1$;*

(iii) *pour tout t dans V, on a $\lim_{s\to 0} \lambda(t,s) = 1$.*

Il existe alors un homomorphisme continu et surjectif Π de X dans un tore $\mathbb{T}^n$ de dimension finie, il existe une matrice antisymétrique réelle A, d'ordre n, et il existe un voisinage V' de zéro dans X tels que :

- $\operatorname{Ker}\Pi \subset V'$;
- *pour tous t et s dans V', si $\Pi(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \bmod \mathbb{Z}^n$ avec $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et si $\Pi(s) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \bmod \mathbb{Z}^n$ avec $y \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ alors :*

$$\lambda(s,t) = \exp\bigl(2i\pi (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot A^t \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)\bigr).$$

Preuve du lemme 4. — Commençons par examiner le cas où X est un tore $\mathbb{T}^n$. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $]-\delta, +\delta[^n \bmod \mathbb{Z}^n \subset V$.

Notons U le voisinage $]-\delta, +\delta[^n$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On définit sur $U \times U$ une fonction $\ell(y,x)$ par $\ell(y,x) = \lambda(s,t)$ si $s = y \bmod \mathbb{Z}^n$ et $t = x \bmod \mathbb{Z}^n$. Cette fonction ℓ vérifie, pour tous x, y et y' dans U,

- si $y + y' \in U$, alors $\ell(y+y', x) = \ell(y,x) \cdot \ell(y',x)$;
- $\ell(y,x) = \overline{\ell(x,y)}$

et la fonction $z \mapsto \ell(y,z)$ est continue en 0. On peut prolonger cette fonction à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en posant, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\ell(y,x) = \Bigl[\ell\Bigl(\frac{y}{m}, \frac{x}{m}\Bigr)\Bigr]^{m^2}$$

où m est un entier choisi suffisamment grand pour que y/m et x/m soient dans U.

Cette définition a bien un sens grâce à la propriété de bi-homomorphisme local de ℓ. La fonction ℓ ainsi prolongée est antisymétrique et vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\ell(\cdot, x)$ est continue et est un homomorphisme de groupe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{U}$. Les homomorphismes continus de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{U}$ sont bien connus : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\ell(y,x) = \exp\bigl(2i\pi \langle y, a_x \rangle\bigr).$$

Grâce à la bilinéarité de ℓ on obtient : pour tous y, x et x' dans $\mathbb{R}^n$,

$$\langle y, a_x\rangle + \langle y, a_{x'}\rangle = \langle y, a_{x+x'}\rangle \mod \mathbb{Z}.$$

On en déduit que a_x est une fonction linéaire de x. En notant les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs lignes, on arrive à : il existe une matrice réelle A, d'ordre n telle que

$${}^t a_x = A\,{}^t x \quad \text{et } \ell(y,x) = \exp(2i\pi y A\,{}^t x).$$

Du fait que ℓ est antisymétrique, on déduit enfin que A l'est. Le résultat du lemme est ainsi établi quand $x = \mathbb{T}^n$ (avec $\Pi = \mathrm{id}$).

Examinons le cas général d'un groupe compact abélien connexe X. Nous allons nous ramener à la situation précédente par un passage au quotient. Il existe un sous-groupe fermé X' de X tel que $X' \subset V$ et tel que X/X' soit un tore de dimension finie (cf. par exemple [HR, th. 24.7]). Pour tout $t \in V$ notons ρ_t la restriction de $\lambda(\,\cdot, t)$ à X'. Les hypothèses du LEMME 4 entraînent que ρ_t est un caractère de X'. De plus, pour tout $s \in X'$, on a $\lim_{t\to 0} \rho_t(s) = 1$. Le groupe dual de X' étant discret on en déduit qu'il existe un voisinage V_1 de zéro dans X tel que $V_1 \subset V$ et, pour tout $t \in V_1$, on a $\rho_t = 1$. Dans le groupe X', la partie $V_1 \cap X'$ est un voisinage de zéro. On utilise à nouveau le théorème sur la structure des groupes compacts abéliens pour obtenir : il existe un sous-groupe fermé X'' de X' tel que $X'' \subset V_1$ et tel que X'/X'' soit produit d'un groupe fini et d'un tore de dimension finie. Du fait que les groupes duaux de X/X' et X'/X'' admettent chacun un nombre fini de générateurs, on déduit que le dual de X/X'' admet un nombre fini de générateurs. Le groupe X/X'' étant abélien et connexe, c'est nécessairement un tore de dimension finie. Posons $X/X'' = \mathbb{T}^n$, notons Π la projection de X sur $\mathbb{T}^n$ et notons $W = \Pi(V_1)$. La projection Π est ouverte et W est donc un voisinage de zéro dans $\mathbb{T}^n$.

On définit une application $\tilde{\lambda}$ de $W \times W$ dans $\mathbb{U}$ en posant

$$\tilde{\lambda}\big(\Pi(s), \Pi(t)\big) = \lambda(s,t)$$

pour tous s et t dans V_1. En utilisant le fait que λ est localement un bihomomorphisme et que, si $s \in X'' = \operatorname{Ker}\Pi$ et $t \in V_1$ alors $\lambda(s,t) = \lambda(t,s) = 1$, on vérifie que $\tilde{\lambda}$ est bien défini. Les hypothèses (i), (ii) et (iii) du LEMME 4 sont vérifiées par $\tilde{\lambda}$. On peut appliquer à $\tilde{\lambda}$ la première partie de la preuve, et on obtient exactement la conclusion du LEMME 4. $\square$

Suite de la preuve du lemme 3. — Le LEMME 4 s'applique à la fonction λ définie par (5). Grâce à ce lemme, on associe à λ un entier n, un projecteur Π de X sur $\mathbb{T}^n$, une matrice antisymétrique A et un voisinage V' de zéro dans X. Fixons β dans V' et d dans $\mathbb{N}$ tels que $d\beta = \alpha$. Posons :

$$\tilde{\varphi}(x) = \psi_\beta(x) \cdot \psi_\beta(x+\beta) \cdots \psi_\beta(x+(d-1)\beta).$$

De (3) on déduit que

$$\tilde{\varphi}(x+\alpha)/\tilde{\varphi}(x) = \lambda_\beta^d \cdot \varphi(x+\alpha)/\varphi(x)$$

et donc il existe $\gamma \in \widehat{X}$ et $\delta \in \mathbb{U}$ tels que $\varphi(x) = \delta \cdot \gamma(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)$. La fonction ψ_β vérifie, pour tout $t \in V'$,

$$\psi_\beta(x+t)/\psi_\beta(x) = \lambda(\beta, t) \cdot \psi_t(x+\beta)/\psi_t(x) \tag{6}$$

où $\lambda(\beta, t)$ est de la forme indiquée dans le LEMME 4.

Examinons tout d'abord le cas simple où la matrice A est nulle (ou la dimension n est nulle), ce qui est toujours le cas si $X = \mathbb{T}$. On a alors $\lambda(\beta, t) = 1$.

En appliquant la PROPOSITION 3 à la fonction ψ_β et à la translation par β sur X, on obtient : il existe une constante δ' dans $\mathbb{U}$ et une application mesurable $\mathcal{X}$ de X dans $\mathbb{U}$ telles que

$$\psi_\beta(x) = \delta' \cdot \mathcal{X}(x+\beta)/\mathcal{X}(x).$$

On en déduit que $\tilde{\varphi}(x) = (\delta')^d \cdot \mathcal{X}(x+\alpha)/\mathcal{X}(x)$ et on a démontré que $\varphi/(\delta \cdot (\delta')^d \cdot \gamma)$ est un cobord, ce qui achève la preuve du LEMME 3 dans le cas simple.

Résumons la fin de la preuve du LEMME 3 dans le cas général. La fonction ψ_β vérifie l'équation fonctionnelle suivante : pour tout t dans V', il existe une fonction mesurable ψ_t de X dans $\mathbb{U}$, telle que (6) soit satisfait. Nous allons construire, dans une extension nilpotente de la translation sur X, une autre solution f_2 de cette équation fonctionnelle, et nous pourrons appliquer la PROPOSITION 3 au quotient ψ_β/f_2.

Fin de la preuve du lemme 3. — Démontrons tout d'abord que la matrice A est à coefficients entiers. Fixons $\delta > 0$ tel que :

$$\Pi^{-1}\big(\,]-\delta, \delta\,[^n \bmod \mathbb{Z}^n\big) \subset V'.$$

Soit $p > 0$ un entier tel que $1/p < \delta$. Si j est un entier entre 1 et n, on fixe un élément t_j de X tel que $\Pi(t_j) = (0, \dots, 0, 1/p \bmod \mathbb{Z}, 0, \dots, 0)$ où la composante non nulle apparaît au rang j. Posons :

$$\tilde{\psi}_j(x) = \psi_{t_j}(x + (p-1)t_j) \cdot \psi_{t_j}(x + (p-2)t_j) \cdots \psi_{t_j}(x) / \psi_{pt_j}(x).$$

Un calcul simple à partir de (5), conduit, pour tout s dans X, à :

$$\tilde{\psi}_j(x + s) = \big(\lambda(t_j, s)^p / \lambda(pt_j, s)\big) \cdot \tilde{\psi}_j(x). \tag{7}$$

Si de plus $s \in V'$, du fait que $pt_j \in \operatorname{Ker} \Pi$, on déduit que :

$$\lambda(pt_j, s) = 1. \tag{8}$$

Soit k un autre entier entre 1 et n. De (7) et (8) on déduit que

$$\tilde{\psi}_j(x + t_k) = \big(\lambda(t_j, t_k)\big)^p \cdot \tilde{\psi}_j(x)$$

d'où $\tilde{\psi}_j(x + pt_k) = (\lambda(t_j, t_k))^{p^2} \cdot \tilde{\psi}_j(x)$.

De (7) et (8) on déduit également que $\tilde{\psi}_j(x + pt_k) = \tilde{\psi}_j(x)$.

Finalement, on aboutit à $(\lambda(t_j, t_k))^{p^2} = 1$, ce qui signifie que le coefficient de la j-ième ligne et k-ième colonne de la matrice A est un entier.

Construisons à présent un revêtement $\widetilde{X}$ de X. On note Π_n la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{T}^n$ et on pose :

$$\widetilde{X} = \big\{(x, u) \in X \times \mathbb{R}^n : \Pi(x) = \Pi_n(u)\big\}.$$

Si on note $\Gamma = \{(0, u) : u \in \mathbb{Z}^n\}$, on a $\widetilde{X}/\Gamma = X$.

On définit une forme bilinéaire B sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$B(u_1, u_2) = u_1 \cdot A' \cdot {}^t u_2,$$

où A' est la matrice triangulaire supérieure telle que $A = A' - {}^t A'$.

On définit une loi de groupe $*$ sur $\widetilde{X} \times \mathbb{T}$ par

$$(x_1, u_1, v_1) * (x_2, u_2, v_2) = \big(x_1 + x_2, u_1 + u_2, v_1 + v_2 + B(u_1, u_2)\big)$$

où $x_i \in X, u_i \in \mathbb{R}^n, (x_i, u_i) \in \widetilde{X}$ et $v_i \in \mathbb{T}$.

La matrice A' étant à coefficients entiers, $D = \Gamma \times \{0\}$ est un sous-groupe discret du groupe nilpotent $N = (\widetilde{X} \times \mathbb{T}, *)$.

Dans la suite la loi du groupe N est notée multiplicativement. Le groupe dérivé N' de N est contenu dans le sous-groupe $M = \{0\} \times \mathbb{T}$, et on a $N/DM = X$.

On fixe un élément u_β de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Pi_n(u_\beta) = \Pi(\beta)$, et on pose :

$$\tilde{\beta} = (\beta, u_\beta, 0).$$

Il existe une fonction g, définie sur N/D et à valeurs dans $\mathbb{U}$ telle que si $v \in M$ et $z \in N$, on ait l'égalité $g(vzD) = g(zD) \cdot \exp(2i\pi v)$. (Poser $g(x,u,v) = \exp(2i\pi(v - B(u,[u])))$ et vérifier que g est bien définie sur N/D).

On pose $f_1(z) = g(\tilde{\beta}zD)/g(zD)$ si z est dans N et on remarque que f_1 est bien définie modulo MD.

La fonction f_1 est donc en fait définie sur le groupe X. Afin d'éviter l'excès d'abus de notation, nous noterons f_2 la fonction de X dans $\mathbb{U}$ définie par $f_2(x) = f_1(x,u,v)$, où $(x,u,v) \in N$. Pour tout z' dans N, on a

$$\begin{aligned} f_1(z'z)/f_1(z) &= g(\tilde{\beta}z'zD) \cdot g(zD)/\big(g(z'zD) \cdot g(\tilde{\beta}zD)\big) \\ &= g\big([\tilde{\beta}, z']z'\tilde{\beta}zD\big) \cdot g(zD)/\big(g(z'zD) \cdot g(\tilde{\beta}zD)\big) \end{aligned}$$

où $[\tilde{\beta}, z'] = \tilde{\beta}z'(\tilde{\beta})^{-1}(z')^{-1}$.

On a $\tilde{\beta} = (\beta, u_\beta, 0)$ et si on note $z' = (t,u,v)$, le commutateur $[\tilde{\beta}, z']$ est l'élément de $\widetilde{X} \times \mathbb{T}$ égal à :

$$\big(0, B(u_\beta, u) - B(u, u_\beta)\big).$$

Grâce au choix de g, on a :

$$\begin{aligned} \text{(9)} \qquad f_1(z'z)/f_1(z) &= \exp\big(2i\pi(B(u_\beta,u) - B(u,u_\beta))\big) \\ &\quad \cdot \big[g(z'\tilde{\beta}zD)/g(\tilde{\beta}zD)\big] \;/\; \big[g(z'zD)/g(zD)\big]. \end{aligned}$$

Or si $t \in V'$, on a $B(u_\beta, u) - B(u, u_\beta) = \lambda(\beta, t)$. Remarquons de plus que la fonction $z \mapsto g(z'zD)/g(zD)$ est définie modulo MD. L'identité (9) peut se lire dans le groupe X : pour tout $t \in V'$, il existe une fonction ψ'_t de X dans $\mathbb{U}$ telle que

$$\text{(10)} \qquad f_2(x+t)/f_2(x) = \lambda(\beta, t) \cdot \psi'_t(x+\beta)/\psi'_t(x).$$

Posons $\psi''_t = \psi_t/\psi'_t$. D'après (6) et (10), on a pour tout $t \in V'$,

$$\big[\psi_\beta(x+t)/f_2(x+t)\big] \;/\; \big[\psi_\beta(x)/f_2(x)\big] = \psi''_t(x+\beta)/\psi''_t(x).$$

Grâce à la PROPOSITION 3, ceci entraîne qu'il existe une constante δ' dans $\mathbb{U}$ et une fonction mesurable $\mathcal{X}$ de X dans $\mathbb{U}$ telles que :

$$\psi_\beta(x) = f_2(x) \cdot \delta' \cdot \mathcal{X}(x+\beta)/\mathcal{X}(x).$$

On pose $f_3(x) = f_2(x) \cdot f_2(x+\beta) \cdots f_2(x+(d-1)\beta)$.

On arrive ainsi à : $\tilde{\varphi}/f_3$ est un quasi-cobord, d'où $\varphi/\gamma f_3$ est un quasi-cobord. Il existe une constante λ dans $\mathbb{U}$ et une fonction mesurable $\mathcal{X}'$ de X dans $\mathbb{U}$ telles que $\varphi(x) = \lambda \cdot \gamma(x) \cdot f_3(x) \cdot \mathcal{X}'(x+\alpha)/\mathcal{X}'(x)$.

La fonction $f_3(x) \cdot \mathcal{X}'(x+\alpha)/\mathcal{X}'(x)$ est un cobord dans une extension nilpotente de la translation sur X, car si $z = (x, u, v)$ est dans N, on a

$$f_3(x) = g(\tilde{\alpha} zD)/g(zD)$$

(où on note $\tilde{\alpha} = (\tilde{\beta})^d$). Ceci achève la preuve du LEMME 3, et de la PROPOSITION 4. $\square$

Pour démontrer la PROPOSITION 5, nous aurons besoin de préciser légèrement la conclusion du LEMME 3. C'est l'objet des lemmes 5 et 6 que nous énonçons à présent.

LEMME 5. — *Soit γ un caractère non trivial de X. Il n'existe pas de constante λ dans $\mathbb{U}$ telle que $\lambda\gamma$ soit un cobord dans une extension nilpotente de la translation sur X.*

Preuve du lemme 5.—Supposons que, pour un λ fixé, la fonction $\lambda\gamma$ soit un cobord dans une extension nilpotente. On a donc, suivant la définition 5, un quintuplet $(N, D, M, \tilde{\alpha}, g)$ et la relation :

$$\gamma(zDM) = \bar{\lambda} \cdot g(\tilde{\alpha} zD)/g(zD).$$

Le groupe compact abélien M agit sur l'espace mesuré N/D. Il existe donc un caractère σ de M tel que la fonction $zD \mapsto \int_M g(yzD) \cdot \overline{\sigma(y)}\,\mathrm{d}y$ n'est pas presque partout nulle.

On fixe un tel σ, et on pose $g'(zD) = \int_M g(yzD) \cdot \overline{\sigma(y)}\,\mathrm{d}y$.

Si $y \in M$, on a $g'(yzD) = \sigma(y) \cdot g'(zD)$ et, en particulier, la fonction $|g'|$ est définie sur le quotient N/DM (égal à X).

On a $g'(\tilde{\alpha} zD) = \lambda \cdot \gamma(zDM) \cdot g'(zD)$. En effet

$$\begin{aligned} g'(\tilde{\alpha} zD) &= \int_M g(y\tilde{\alpha} zD) \cdot \overline{\sigma(y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_M g(\tilde{\alpha} yzD) \cdot \overline{\sigma(y)}\,\mathrm{d}y \quad \text{(car } M \text{ est inclus dans le centre de } N\text{)} \\ &= \int_M \lambda \cdot \gamma(yzDM) \cdot g(yzD) \cdot \overline{\sigma(y)}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

et $\gamma(yzDM) = \gamma(zDM)$ si $y \in M$.

La fonction $|g'|$, définie sur X, est donc invariante par la translation T. Elle est donc constante, et on l'a supposée non nulle. Fixons u dans N et posons $h_u(zD) = g'(uzD)/g'(zD)$ $(z \in N)$. On a

$$h_u(\tilde{\alpha} zD) = \sigma\big([u, \tilde{\alpha}]\big) \cdot \gamma(uDM) \cdot h_u(zD)$$

où $[u, \tilde{\alpha}]$ est le commutateur $u\tilde{\alpha}u^{-1}\tilde{\alpha}^{-1}$. En effet :

$$\begin{aligned}
h_u(\tilde{\alpha} zD) &= g'(u\tilde{\alpha} zD)/g'(\tilde{\alpha} zD)\\
&= g'\big([u, \tilde{\alpha}]\tilde{\alpha} uzD\big)/g'(\tilde{\alpha} zD)\\
&= \sigma\big([u, \tilde{\alpha}]\big) \cdot g'(\tilde{\alpha} uzD)/g'(\tilde{\alpha} zD)\\
&= \sigma\big([u, \tilde{\alpha}]\big) \cdot \lambda \cdot \gamma(uzDM) \cdot g'(uzD)/\big(\lambda \cdot \gamma(zDM) \cdot g'(zD)\big)\\
&= \sigma\big([u, \tilde{\alpha}]\big) \cdot \gamma(uDM) \cdot h_u(zD).
\end{aligned}$$

D'autre part, si $y \in M$, on a $h_u(yzD) = h_u(zD)$.

La fonction h_u est donc définie sur le quotient N/DM (égal à X) et est une fonction propre pour la translation T. On en déduit que la valeur propre $\sigma([u, \tilde{\alpha}]) \cdot \gamma(uDM)$ est de la forme $\tau(\alpha)$ où τ est un caractère de X.

Or $\{\tau(\alpha) : \tau \in \widehat{X}\}$ est une partie dénombrable de $\mathbb{U}$, alors que $\sigma([u, \tilde{\alpha}]) \cdot \gamma(uDM)$ est une fonction continue de u. On en déduit que, pour tout $u \in N$, $\sigma([u, \tilde{\alpha}]) \cdot \gamma(uDM) = 1$. En particulier, si u est une puissance de $\tilde{\alpha}$, on a $\gamma(uDM) = 1$. Par densité, ceci assure que $\gamma \equiv 1$. $\square$

LEMME 6. — *Dans la conclusion du lemme* 3, *le caractère* γ *est déterminé de façon unique.*

Preuve du lemme 6. — C'est une conséquence immédiate des LEMMES 1 et 5. En effet, si l'on reprend la conclusion du LEMME 1 en supposant que

$$\varphi(x) = \lambda_1 \cdot \gamma_1(x) \cdot f_1(x) = \lambda_2 \cdot \gamma_2(x) \cdot f_2(x)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{X}$ et f_1, f_2 sont des cobords dans une extension nilpotente, alors $f_1(x)/f_2(x)$ est encore un cobord dans une extension nilpotente (LEMME 1) et donc $\gamma_1/\gamma_2 = 1$ (LEMME 5). $\square$

Résumé de la preuve de la proposition 5. — Le cocycle

$$\big[\varphi(x+s+t)/\varphi(x+t)\big] \;/\; \big[\varphi(x+s)/\varphi(x)\big]$$

est un quasi-cobord. Du LEMME 3, on déduira que

$$\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \gamma_t(x) \cdot f_t(x) \tag{11}$$

où $\lambda_t \in \mathbb{U}$, $\gamma_t \in \widehat{X}$ et f_t est un cobord dans une extension nilpotente.

Le LEMME 6 nous permettra d'affirmer que γ_t est déterminé de façon unique par (11) ; on montrera ensuite que $t \mapsto \gamma_t$ est un homomorphisme de X dans $\widehat{X}$, puis que cet homomorphisme est nécessairement trivial ($\gamma_t = 1$). On saura alors que $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord dans une extension nilpotente; en étudiant le comportement de ce cocycle pour t proche de zéro, on montrera finalement que $\varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un quasi-cobord ordinaire.

Preuve de la proposition 5. — Soit φ un cocycle de X dans $\mathbb{U}$ tel que, pour un ensemble non négligeable de valeurs de (t,s) dans X^2,

$$\varphi(x+t+s)\cdot\varphi(x)/\big(\varphi(x+t)\cdot\varphi(x+s)\big)$$

est un quasi-cobord. Comme précédemment, on remarque que ceci est vrai pour tout couple (t,s). Pour tout t dans X, on peut appliquer les LEMMES 3 et 6 au cocycle $\varphi(x+t)/\varphi(x)$. Ainsi, pour tout t, il existe $\lambda_t \in \mathbb{U}$, il existe un unique γ_t dans $\widehat{X}$ et il existe une application mesurable f_t de X dans $\mathbb{U}$ tels que :

- $\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \gamma_t(x) \cdot f_t(x)$;
- f_t est un cobord dans une extension nilpotente de la translation sur X.

Soient t et t' deux éléments de X. On a

$$\varphi(x+t+t')/\varphi(x) = \lambda_{t+t'} \cdot \gamma_{t+t'}(x) \cdot f_{t+t'}(x),$$

$$\varphi(x+t+t')/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \lambda_{t'} \cdot \gamma_{t'}(t) \cdot \gamma_t(x) \cdot \gamma_{t'}(x) \cdot f_t(x) \cdot f_{t'}(x+t).$$

D'après les LEMMES 1 et 2, la fonction $f_t(x)\cdot f_{t'}(x+t)\cdot \overline{f_{t+t'}(x)}$ est, à une constante multiplicative près, un cobord dans une extension nilpotente. On montre ainsi que le caractère $\gamma_t\cdot\gamma_{t'}\cdot\bar{\gamma}_{t+t'}$ est, à constante multiplicative près, un cobord dans une extension nilpotente.

Le LEMME 5 permet alors d'affirmer que $\gamma_{t+t'} = \gamma_t \cdot \gamma_{t'}$. Ainsi l'application $t \mapsto \gamma_t$ est un homomorphisme de groupe de X dans son dual $\widehat{X}$.

Si X est un tore, il n'existe pas d'autre homomorphisme de X dans $\widehat{X}$ que l'homomorphisme trivial (utiliser des arguments de divisibilité). Dans le cas général nous allons démontrer que l'homomorphisme $t \mapsto \gamma_t$ est continu, ce qui prouvera qu'il est trivial puisque X est connexe et $\widehat{X}$ est discret.

Nous commencerons par remarquer que les applications f_t peuvent être toutes décrites comme des cobords dans une même extension nilpotente de la translation sur X.

LEMME 7. — *Sous les hypothèses de la proposition* 5, *on a : il existe une extension nilpotente de la translation sur* X, *notée* $(N, D, M, \tilde{\alpha})$ *telle que, pour tout* t *dans* X, *il existe* λ_t *dans* $\mathbb{U}$, *il existe un unique* γ_t *dans* $\widehat{X}$ *et il existe une application mesurable* f_t *de* X *dans* $\mathbb{U}$ *tels que :*

- $\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \gamma_t(x) \cdot f_t(x)$;
- f_t *est un cobord dans l'extension nilpotente* $(N, D, M, \tilde{\alpha})$ *de la translation sur* X.

Preuve du lemme 7. — On applique le LEMME 3 à chacun des cocycles $\varphi_t(x) = \varphi(x+t)/\varphi(x)$. Ceci donne une décomposition du type, pour tout t dans X,

$$\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t \cdot \gamma_t(x) \cdot f_t(x)$$

où f_t est un cobord dans une extension nilpotente $(N_t, D_t, M_t, \tilde{\alpha}_t)$.

En observant la preuve du LEMME 3, on remarque que toutes ces extensions peuvent être choisies dans une famille dénombrable d'extensions. En construisant un nouveau groupe nilpotent N par produit fibré dénombrable (suivant le modèle de ce qui est fait dans la preuve du LEMME 1 pour un produit fini), on constate que l'on peut regarder les f_t comme des cobords dans une extension nilpotente $(N, D, M, \tilde{\alpha})$ indépendante de t. $\square$

Suite de la preuve de la proposition 5. — Une extension nilpotente $(N, D, M, \tilde{\alpha})$ est à présent fixée. Pour chaque t il existe une application mesurable g_t de N/D dans $\mathbb{U}$ telle que :

$$f_t(zDM) = g_t(\tilde{\alpha} zD)/g_t(zD). \tag{12}$$

En utilisant la même méthode que dans la preuve du LEMME 3, montrons que l'on peut supposer de plus que $\lim_{t\to 0} g_t = 1$.

Commençons par assurer un choix mesurable : grâce à la PROPOSITION 2, on peut affirmer que, pour chaque γ dans $\widehat{X}$, l'ensemble X_γ des t pour lesquels « $\gamma(t) \cdot \varphi(x+t)/\varphi(x)$ est un cobord » est une partie mesurable de X ; on a $X_\gamma = \{t \in X : \gamma_t = \bar{\gamma}\}$. On obtient ainsi une partition mesurable de X et la PROPOSITION 2 permet d'affirmer que l'on peut choisir $(\lambda_t, g_t)_{t\in X}$ de façon que λ_t soit une fonction mesurable de t et $g_t(z)$ une fonction mesurable de $(t, z) \in X \times N/D$. On suppose ce choix mesurable effectué.

Du fait que la fonction f_t est définie sur le quotient N/DM, on déduit de (12) que, si $z' \in M$ et $z \in N/D$,

$$g_t(z'\tilde{\alpha} z)/g_t(\tilde{\alpha} z) = g_t(z'z)/g_t(z).$$

D'autre part, on sait que la fonction $z \mapsto g_t(z'z)/g_t(z)$ est définie sur le quotient N/DM. Grâce à l'ergodicité de la translation par $\tilde{\alpha}$ sur N/DM, on en déduit que cette fonction est constante. Notons $c_t(z') = g_t(z'z)/g_t(z)$. Ceci définit, pour chaque t dans X un caractère c_t de M.

Reprenant les calculs effectués au début de la preuve de la PROPOSITION 5, si t, t' sont dans X, on a

$$f_{t+t'}(x) \cdot \overline{f_t(x)} \cdot \overline{f_{t'}(x+t)} = \lambda_t \cdot \lambda_{t'} \cdot \overline{\lambda_{t+t'}} \cdot \gamma_{t'}(t)$$

et donc, en notant $\tilde{t}$ un élément de N tel que $\tilde{t}DM = t$,

$$g_{t+t'}(\tilde{\alpha}z) \cdot \overline{g_t(\tilde{\alpha}z)} \cdot \overline{g_{t'}(\tilde{\alpha}\tilde{t}z)} \\ = \lambda_t \cdot \lambda_{t'} \cdot \gamma_{t'}(t) \cdot \overline{\lambda_{t+t'}} \cdot g_{t+t'}(z) \cdot \overline{g_t(z)} \cdot \overline{g_{t'}(\tilde{t}z)}.$$

En posant $h_{t,t'}(z) = g_{t+t'}(z) \cdot \overline{g_t(z)} \cdot \overline{g_{t'}(\tilde{t}z)}$, on obtient

$$h_{t,t'}(\tilde{\alpha}z) = c_{t'}\big(\tilde{\alpha}\tilde{t}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{t}^{-1}\big) \cdot \lambda_t \cdot \lambda_{t'} \cdot \overline{\lambda_{t+t'}} \cdot \gamma_{t'}(t) \cdot h_{t,t'}(z)$$

(pour presque tout z dans N/D).

Ainsi, la fonction $h_{t,t'}$ est une fonction propre pour la translation par $\tilde{\alpha}$ sur N/D. Notons E une famille orthonormée, formée de fonctions propres pour la translation par $\tilde{\alpha}$, maximale dans $L^2(N/D)$. A tout couple (t,t') dans X^2, on peut associer $\delta_{t,t'}$ dans $\mathbb{U}$ et $\sigma_{t,t'}$ dans E tels que $h_{t,t'} = \delta_{t,t'}\,\sigma_{t,t'}$.

Nous allons utiliser à présent le fait que l'on peut, quitte à modifier λ_t, multiplier g_t par une constante et un élément de E. A chaque t dans X, on peut associer un élément σ_t de E et une constante μ_t dans $\mathbb{U}$ tels que

$$\Big|\int_{N/D} g_t(z) \cdot \sigma_t(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \sup_{\sigma \in E}\Big|\int_{N/D} g_t(z) \cdot \sigma(z)\,\mathrm{d}z\Big|,$$

$$\int_{N/D} g_t(z) \cdot \sigma_t(z) \cdot \mu_t\,\mathrm{d}z \in \mathbb{R}^+.$$

En utilisant le même argument que dans la preuve du LEMME 3, on montre que $\mu_t \cdot \sigma_t \cdot g_t$ tend vers 1 quand t tend vers zéro.

Résumons cet argument : soit (s_n) une suite qui tend vers zéro dans X. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut affirmer qu'il existe t dans X tel que $\lim_{n\to+\infty} g_{s_n+t}/g_t = 1$; or

$$g_{s_n+t}(z)/g_t(z) = g_{s_n}(\tilde{t}z) \cdot \delta_{t,s_n} \cdot \sigma_{t,s_n}(z).$$

De $\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{N/D} g_{s_n}(\tilde{t}z)\cdot\delta_{t,s_n}\cdot\sigma_{t,s_n}(z)\,\mathrm{d}z\right| = 1$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{N/D} g_{s_n}(z)\cdot\sigma_{t,s_n}(z)\,\mathrm{d}z\right| = 1$$

puis que $\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{N/D} g_{s_n}(z)\cdot\sigma_{s_n}(z)\cdot\mu_{s_n}\,\mathrm{d}z\right| = 1.$

Ceci permet d'établir que $\lim_{s\to 0} g_s\cdot\sigma_s\cdot\mu_s = 1$.

Quitte à remplacer chaque g_t par $\mu_t\cdot\sigma_t\cdot g_t$ on a bien $\lim_{t\to 0} g_t = 1$. Revenons à l'équation :

$$\begin{cases}\varphi(x+t)/\varphi(x) = \lambda_t\cdot\gamma_t(x)\cdot f_t(x),\\ f_t(zDM) = g_t(\tilde{\alpha}zD)/g_t(zD).\end{cases}$$

Si $\lim_{t\to 0} g_t = 1$, alors $\lim_{t\to 0}\lambda_t\gamma_t = 1$. Or γ_t varie dans $\widehat{X}$ qui est une famille orthonormale dans $L^2(X)$.

Pour tout t suffisamment proche de zéro, on a donc $\gamma_t = 1$. Puisque $t\mapsto\gamma_t$ est un homomorphisme, on en déduit que $\gamma_t = 1$ pour tout t dans X. D'autre part, on a, pour tout z' dans M, $g_t(z'z)/g_t(z) = c_t(z')$. Pour tout $z'\in M$, on a donc $\lim_{t\to 0} c_t(z') = 1$.

Par convergence dominée, on a également $\lim_{t\to 0} c_t = 1$ dans $L^2(M)$. Or c_t varie dans une partie discrète de $L^2(M)$. Il existe donc un voisinage V de 0 dans X tel que, pour tout $t\in V$, $c_t = 1$. Si $t\in V$, la fonction g_t est définie sur le quotient $N/DM(=X)$, et la fonction f_t est alors un cobord « ordinaire ».

Soit $t\in X$. Il existe $t_1, t_2, \dots, t_k\in V$ tels que $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_k$. En posant $\tilde{g}_t(x) = g_{t_1}\big(x + t_2 + \cdots + t_k\big)\cdot g_{t_2}\big(x + t_3 + \cdots + t_k\big)\cdots g_{t_k}(x)$, on construit sur X une fonction $\tilde{g}_t$ telle que

$$\big(\varphi(x+t)/\varphi(x)\big)/\big(\tilde{g}_t(x+\alpha)/\tilde{g}_t(x)\big)$$

est une constante. Ceci achève la preuve de la PROPOSITION 5. $\square$

III. Preuve du théorème 1

Les données sont X, α, G et une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cocycles de X dans G. On note, pour chaque t dans X, $\varphi_t^{\mathbb{Z}} = (\varphi_n(\,\cdot + nt))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $t \in X$ tel que le cocycle $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$ (de X dans $G^{\mathbb{Z}}$) ne soit pas faiblement mélangeant. D'après la PROPOSITION 1, il existe des entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_d$ et des caractères non triviaux $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ de G tels que $\prod_{i=1}^d \sigma_i\varphi_{n_i}(x + n_i t)$ soit un quasi-cobord.

Supposons que, pour un ensemble non négligeable de valeurs de t, le cocycle $\varphi_t^{\mathbb{Z}}$ ne soit pas faiblement mélangeant. L'ensemble des choix de $(d, n_1, n_2, \dots, n_d, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$ étant dénombrable, on a alors : il existe $n_1, n_2, \dots, n_d$ et $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ tels que pour un ensemble non négligeable de valeurs de t,

$$\prod_{i=1}^{d} \sigma_i\varphi_{n_i}(x + n_i t) \quad \text{est un quasi-cobord.} \tag{13}$$

Fixons $d, n_1, n_2, \dots, n_d, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ vérifiant cette condition.

D'après la PROPOSITION 2, l'ensemble des t vérifiant (13) est mesurable et il est clair que cet ensemble est invariant par la translation $t \mapsto t+\alpha$. Cet ensemble est donc de mesure 1 dès qu'il n'est pas négligeable. Finalement, on a : pour presque tout t dans X,

$$\prod_{i=1}^{d} \sigma_i\varphi_{n_i}(x + n_i t) \quad \text{est un quasi-cobord.}$$

La preuve du théorème s'achève en appliquant le lemme suivant aux cocycles $\varphi_i = \sigma_i\varphi_{n_i}$.

LEMME 8. — *Soient $n_1, n_2, \dots, n_d$ des entiers deux à deux distincts et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ des cocycles de X dans $\mathbb{U}$. Si pour presque tout t dans X, le cocycle $\prod_{i=1}^d \varphi_i(x + n_i t)$ est un quasi-cobord, alors, pour presque tout t dans X, le cocycle $\varphi_1(x+t)/\varphi_1(x)$ est un quasi-cobord.*

Preuve du lemme 8. — On raisonne par récurrence sur d.

Si $d = 1$, le résultat est évident.

Fixons $d > 1$ et supposons le résultat vrai au rang $(d-1)$. On suppose que, pour presque tout t, $\prod_{i=1}^d \varphi_i(x + n_i t)$ est un quasi-cobord.

D'après la PROPOSITION 2, il existe une fonction mesurable λ de X dans $\mathbb{U}$ et une fonction mesurable ψ de $X \times X$ dans $\mathbb{U}$ telles que, pour presque tout (t, x), on ait $\prod_{i=1}^d \varphi_i(x + n_i t) = \lambda(t) \cdot \psi(t, x+\alpha)/\psi(t, x)$.

Pour presque tout (t,x,y) dans X^3 on a :

$$\prod_{i=1}^{d}\varphi_i\big(x+n_dy+n_it\big)=\lambda(t)\cdot\psi(t,x+n_dy+\alpha)/\psi(t,x+n_dy),$$

$$\prod_{i=1}^{d}\varphi_i\big(x+n_iy+n_it\big)=\lambda(t+y)\cdot\psi(t+y,x+\alpha)/\psi(t+y,x).$$

Donc

$$\prod_{i=1}^{d-1}\big[\varphi_i(x+n_dy+n_it)/\varphi_i(x+n_iy+n_it)\big] \\ =\big[\lambda(t)/\lambda(t+y)\big]\cdot\big[\psi'(t,y,x+\alpha)/\psi'(t,y,x)\big]$$

où $\psi'(t,y,x)=\psi(t,x+n_dy)/\psi(t+y,x)$. Posons :

$$\varphi_{i,y}(x)=\varphi_i(x+n_dy)/\varphi_i(x+n_iy).$$

Pour presque tout y, on a : pour presque tout t, $\prod_{i=1}^{d-1}\varphi_{i,y}(x+n_it)$ est un quasi-cobord.

Avec l'hypothèse de récurrence, on en déduit que, pour presque tout y, pour presque tout t, $\varphi_{1,y}(x+t)/\varphi_{1,y}(x)$ est un quasi-cobord.

En effectuant le changement de variable $s=(n_d-n_1)y$, on obtient : pour presque tout (s,t), $\varphi_1(x+s+t)\cdot\varphi_1(x)/(\varphi_1(x+s)\cdot\varphi_1(x+t))$ est un quasi-cobord.

La Proposition 5 permet de conclure que $\varphi_1(x+t)/\varphi_1(x)$ est un quasi-cobord, ce qui achève le raisonnement par récurrence. $\square$

IV. Preuve du théorème 2

Si φ est un cocycle de X dans $\mathbb{U}$ nous utiliserons la notation usuelle :

$$\varphi^{(k)}(x)=\begin{cases}\varphi(x)\cdot\varphi(x+\alpha)\dots\varphi(x+(k-1)\alpha) & \text{si } k\geq 1,\\ 1 & \text{si } k=0,\\ [\varphi(x+k\alpha)\cdot\varphi(x+(k+1)\alpha)\dots\varphi(x-\alpha)]^{-1} & \text{si } k\leq -1.\end{cases}$$

Ainsi on a, pour $(x,u)\in X\times\mathbb{U}$ et $k\in\mathbb{Z}$:

$$T_\varphi^k(x,u)=\big(x+k\alpha,\varphi^{(k)}(x)\cdot u\big).$$

Nous démontrerons successivement les résultats suivants :

LEMME 9. — *Soit φ un cocycle continu de X dans $\mathbb{U}$. Si la suite*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^{(k)}(0)$$

ne converge pas vers zéro, alors φ est un cobord.

LEMME 10. — *Soit φ un cocycle de X dans $\mathbb{U}$ et $j \in \mathbb{Z}$, $j \neq 0$. Si $\varphi(jx)$ est un cobord alors il existe $\gamma \in \widehat{X}$ et il existe une fonction mesurable a de X dans $\mathbb{U}$ tels que :*

$$\varphi(x) = \gamma(\alpha)\cdot a(x+j\alpha)/a(x).$$

LEMME 11. — *Soit $(\varphi_j)_{-p\le j\le p}$ une famille de cocycles continus de X dans $\mathbb{U}$. Si la suite*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=-p}^{p}\varphi_j^{(jk)}$$

ne converge pas presque partout vers zéro, alors, pour chaque j, on a : pour tout $t \in X$, il existe $\lambda_t \in \mathbb{U}$ et a_t fonction mesurable de X dans $\mathbb{U}$ tels que, pour presque tout x :

$$\varphi_j^{(j)}(x+t)/\varphi_j^{(j)}(x) = \lambda_t\cdot a_t(x+j\alpha)/a_t(x) \quad .$$

Le LEMME 11, associé à la PROPOSITION 4 et au THÉORÈME 4, permettra de démontrer le THÉORÈME 2 dans le cas où les cocycles sont continus. A l'aide du THÉORÈME 3 on en déduira le résultat complet.

Preuve du lemme 9. — Ce résultat est connu [V]. On peut en redonner rapidement une démonstration. Considérons l'opérateur unitaire U de $L^2(X)$ défini par $Uf(x) = \varphi(x)\cdot f(x+\alpha)$. On a, si $n \in \mathbb{N}$, $U^n f(x) = \varphi^{(n)}(x)\cdot f(x+n\alpha)$, et, en particulier, $U^n 1(x) = \varphi^{(n)}(x)$.

D'autre part U laisse stable l'espace $\mathcal{T}$ des fonctions continues sur X, et si $f \in \mathcal{T}$, $\|Uf\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Si la suite $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1}U^k 1(0)$ ne converge pas vers zéro, il existe une suite croissante d'entiers $(n_j)_{j\ge 0}$ telle que $\lim_{j\to+\infty}(1/n_j)\sum_{k=0}^{n_j}U^k 1(0)$ existe et est non nulle. En utilisant un procédé diagonal sur une partie dénombrable dense de $\mathcal{T}$, on peut extraire de (n_j) une sous-suite (n'_j) telle que, pour tout $f \in \mathcal{T}$, la suite $(1/n'_j)\sum_{k=0}^{n'_j-1}U^k f(0)$ converge. On pose :

$$Lf = \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{n'_j}\sum_{k=0}^{n'_j-1}U^k f(0).$$

On a :

$$|Lf| \leq \lim \frac{1}{n'_j} \sum_{k=0}^{n'_j-1} \left|U^k f(0)\right| = \lim \frac{1}{n'_j} \sum_{k=0}^{n'_j-1} \left|f(k\alpha)\right| = \int \left|f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \|f\|_2.$$

La forme linéaire L définie sur $\mathcal{T}$ se prolonge donc en une forme linéaire continue sur $L^2(X)$, notée encore L.

Il existe $\psi \in L^2(X)$ tel que, pour tout $f \in L^2(X)$, $Lf = \int_X f(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x$. On remarque que, si $f \in \mathcal{T}, LUf = Lf$ et cette identité s'étend par densité à tous les éléments f de $L^2(X)$. Ceci entraîne que $U\psi = \psi$, c'est-à-dire $\varphi(x) \cdot \psi(x+\alpha) = \psi(x)$ p.p.

Finalement, la forme linéaire L ayant été construite de façon que $L1 \neq 0$, on sait que $\psi \neq 0$. L'ergodicité de la translation par α sur X assure que $|\psi|$ est constant. En posant $\tilde{\psi}(x) = |\psi(x)|/\psi(x)$, on arrive à :

$$\varphi(x) = \tilde{\psi}(x+\alpha)/\tilde{\psi}(x). \quad \square$$

Preuve du lemme 10. — φ est un cocycle de X dans $\mathbb{U}$, j est un entier non nul et b est une fonction mesurable de X dans $\mathbb{U}$ tels que :

$$\varphi(jx) = b(x+\alpha)/b(x).$$

Soit γ un caractère de X tel que $\delta = \int_X b(x) \cdot \overline{\gamma(x)}\, dx \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(jx) \cdot \varphi(jx+j\alpha) \cdots \varphi\big(jx+(k-1)j\alpha\big) \cdot \bar{\gamma}(x+k\alpha)& \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b(x+k\alpha) \cdot \overline{b(x)} \cdot \bar{\gamma}(x+k\alpha)&\end{aligned}$$

qui converge presque partout vers $\delta \cdot \overline{b(x)}$. Posons $X_j = \{x \in X : jx = 0\}$.

Soit $z \in X_j$. Si on remplace x par $x+z$ dans le calcul précédent, on obtient $b(x+z) = \gamma(z) \cdot b(x)$. La fonction $b(x) \cdot \bar{\gamma}(x)$ ne dépend donc que de jx. Il existe une fonction mesurable a de X dans $\mathbb{U}$ telle que

$$b(x) \cdot \bar{\gamma}(x) = a(jx),$$

et on a :

$$\begin{aligned} a(jx+j\alpha) &= b(x+\alpha) \cdot \bar{\gamma}(x+\alpha) \\ &= \varphi(jx) \cdot b(x) \cdot \overline{\gamma(x)} \cdot \overline{\gamma(\alpha)} \\ &= \varphi(jx) \cdot a(jx) \cdot \bar{\gamma}(\alpha). \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de noter que, le groupe X étant connexe, l'homomorphisme $x \mapsto jx$ est surjectif. $\square$

Preuve du lemme 11. — Posons :

$$M_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=-p}^{p} \varphi_j^{(jk)}(x).$$

A chaque t dans X, on associe un cocycle θ_t de X dans $\mathbb{U}$ défini par

$$\theta_t(x) = \prod_{j=-p}^{p} \varphi_j^{(j)}(t+jx)$$

et on remarque que $M_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_t^{(k)}(0)$.

Si cette suite ne converge pas vers zéro, alors, d'après le LEMME 9, θ_t est un cobord. Supposons que la suite M_n n'est pas presque partout convergente vers zéro. Notons $\rho_j(x) = \varphi_j^{(j)}(jx)$. Si $t = p\,! \cdot t'$, on a :

$$\theta_t(x) = \prod_{\substack{j=-p \\ j\neq 0}}^{p} \rho_j\Big(x + \frac{p\,!}{j} t'\Big).$$

Ce cocycle est un cobord pour un ensemble non négligeable de valeurs de t', et donc, par invariance par translation, ce cocycle est un cobord pour presque tout t'. On peut alors, grâce au LEMME 8, affirmer que, pour presque tout t', pour tout j entre $-p$ et p, le cocycle $\rho_j(x+t')/\rho_j(x)$ est un quasi-cobord. Ainsi, pour tout j, pour presque tout t, il existe une constante $\lambda_{t,j}$ dans $\mathbb{U}$ telle que : $\lambda_{t,j} \cdot \varphi_j^{(j)}(jx+t)/\varphi_j^{(j)}(jx)$ soit un cobord.

En utilisant le LEMME 10, on en déduit que, pour tout j, pour presque tout t, il existe une constante $\lambda'_{t,j}$ dans $\mathbb{U}$ et une fonction mesurable $a_{t,j}$ de X dans $\mathbb{U}$ telles que

$$\varphi_j^{(j)}(x+t)/\varphi_j^{(j)}(x) = \lambda'_{t,j} \cdot a_{t,j}(x+j\alpha)/a_{t,j}(x).$$

Finalement, en remarquant que l'ensemble des t satisfaisant cette condition est un sous-groupe de X, on obtient le résultat pour tout t. Le LEMME 11 est démontré.

Preuve du théorème 2. — Nous commencerons par établir le résultat suivant :

$$(14)\qquad \begin{cases} \text{soit } (\varphi_j)_{-p\le j\le p} \text{ une famille de cocycles continus de } X \\ \text{dans } \mathbb{U}\text{; la suite } M_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=-p}^{p}\varphi_j^{(jk)}(x) \\ \text{converge presque partout} \end{cases}$$

D'après le LEMME 11, il suffit, pour démontrer (12), d'examiner le cas où, pour chaque j, pour tout t dans X,

$$\varphi_j^{(j)}(x+t)/\varphi_j^{(j)}(x) = \lambda_{t,j} \cdot a_{t,j}(x+j\alpha)/a_{t,j}(x). \tag{15}$$

Nous pouvons alors appliquer la PROPOSITION 4 à chaque cocycle $\varphi_j^{(j)}$, défini sur X muni de la translation $x \mapsto x + j\alpha$. On se ramènera ainsi à un problème de convergence en presque tout point de la diagonale, pour un système dynamique qui est une translation sur un quotient d'un produit fibré de groupes nilpotents. Décrivons à présent cette construction.

Posons $q = p!$. De (15), on déduit, que, pour chaque j, pour tout t dans X,

$$\varphi_j^{(q)}(x+t)/\varphi_j^{(q)}(x) = \lambda_{t,j}^{q/j} \cdot a_{t,j}(x+q\alpha)/a_{t,j}(x).$$

Appliquons la PROPOSITION 4 à chaque cocycle $\varphi_j^{(q)}$ défini sur X muni de la translation $x \mapsto x + q\alpha$. A chaque j on associe, suivant les notations utilisées dans la PROPOSITION 4, un triplet $(\mathcal{N}_j, \mathcal{D}_j, \mathcal{O}_j)$. Le système dynamique mesuré $(X \times \mathbb{U}, (T_{\varphi_j})^q : (x,z) \mapsto (x + q\alpha, z \cdot \varphi_j^{(q)}(x)))$ est un facteur de la translation par $\mathcal{O}_j$ sur $\mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j$: il existe une application mesurable A_j de $\mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j$ sur $X \times \mathbb{U}$, qui envoie la probabilité uniforme sur $\mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j$ sur la probabilité uniforme sur $X \times \mathbb{U}$, et qui conjugue $(T_{\varphi_j})^q$ et la translation $R_{\mathcal{O}_j}$; la première composante A_j^1 de A_j est une projection algébrique de $\mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j$ sur X, qui envoie $\mathcal{O}_j$ sur $q\alpha$.

On définit un nouveau groupe nilpotent $\mathcal{N}$ en posant :

$$\mathcal{N} = \Big\{(u_j)_{|j|\le p} \in \prod_{|j|\le p} \mathcal{N}_j : A_j^1(u_j) \text{ est indépendant de } j\Big\}.$$

Alors $\mathcal{D} = \prod_{|j|\le p} \mathcal{D}_j$ est un sous-groupe discret de $\mathcal{N}$ et le quotient $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ est compact.

On pose $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_j)_{|j|\le p}$. On note φ le cocycle de X dans $\mathbb{U}^{2p+1}$ défini par

$$\varphi(x) = \big(\varphi_j^{(q)}(x)\big)_{|j|\le p},$$

et on note T_φ la transformation de $X \times \mathbb{U}^{2p+1}$ définie par :

$$T_\varphi\big(x, (z_j)_{|j|\le p}\big) = \big(x + q\alpha, (z_j \cdot \varphi_j^{(q)}(x))_{|j|\le p}\big).$$

Le système dynamique mesuré $(X \times \mathbb{U}^{2p+1}, T_\varphi)$ est un facteur de la translation par $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{N}/\mathcal{D}$; il suffit, pour s'en convaincre, de noter

$A_j = (A_j^1, A_j^2)$ avec $A_j^1 : \mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j \to X$ et $A_j^2 : \mathcal{N}_j/\mathcal{D}_j \to \mathbb{U}$, et de définir A de $\mathcal{N}/\mathcal{D}$ dans $X \times \mathbb{U}^{2p+1}$ par :

$$A\big((u_j)_{|j|\le p}\big) = \big(A_j^1(u_j), (A_j^2(u_j))_{|j|\le p}\big).$$

Le corollaire du THÉORÈME 4 permet alors d'affirmer que, si $(f_j)_{|j|\le p}$ est une famille de fonctions mesurables bornées sur $X \times \mathbb{U}^{2p+1}$, alors la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\le p} f_j\big((T_\varphi)^{jk}(x,z)\big)$$

converge pour presque tout $(x,z) \in X \times \mathbb{U}^{2p+1}$.

Pour chaque ℓ entre 0 et $(q-1)$, posons :

$$M_n^{(\ell)}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\le p} \varphi_j^{(j(kq+\ell))}(x).$$

On a $M_{nq} = (1/q)\sum_{\ell=0}^{q-1} M_n^{(\ell)}$ et, puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{nq\le m<(n+1)q} |M_{nq} - M_m| = 0 \quad \text{p.p.},$$

il suffit, pour démontrer la convergence presque sûre de la suite M_n de démontrer la convergence de chacune des suites $M_n^{(\ell)}$.

Fixons ℓ entre 0 et $(q-1)$. Définissons, pour chaque j_0 entre $-p$ et p une fonction f_{j_0} sur $X \times \mathbb{U}^{2p+1}$ par :

$$f_{j_0}\big(x,(z_j)\big) = \varphi_{j_0}^{(j_0\ell)}(x)\cdot z_{j_0}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
M_n^{(\ell)}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\le p} \varphi_j^{(jkq)}(x)\cdot\varphi_j^{(j\ell)}(x+jkq\alpha)\\
&= \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\le p} f_j\big((T_\varphi)^{jk}(x,(z_j))\big)\Big]\prod_{|j|\le p}\bar z_j.
\end{aligned}$$

Cette expression converge pour presque tout x, d'après ce qui précède. L'affirmation (14) est établie.

L'étape suivante de la démonstration est la preuve du THÉORÈME 2 dans le cas où les cocycles $\varphi_j, |j| \leq p$, sont continus :

- $(\varphi_j)_{|j|\leq p}$ est une famille de cocycles de X dans G, supposés continus.
- $(f_j)_{|j|\leq p}$ est une famille de fonctions mesurables bornées sur $X \times G$.

On veut établir la convergence presque sûre de la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p} f_j(T_j^{jk}(x,g)) \quad \text{où} \quad T_j = T_{\varphi_j}.$$

Grâce à l'inégalité maximale satisfaite par ces expressions, il suffit d'établir le résultat quand les fonctions f_j varient dans une partie de $L^\infty(X \times G)$ engendrant un sous-espace dense de $L^1(X \times G)$. Nous allons étudier le cas où $f_j(x,g) = \gamma_j(x) \cdot \sigma_j(g)$ avec γ_j caractère de X et σ_j caractère de G. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p} f_j(T_j^{jk}(x,g)) = \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p}\tilde{\varphi}_j^{(jk)}(x)\Big]\cdot\prod_{|j|\leq p}\gamma_j(x)\cdot\sigma_j(g)$$

où $\tilde{\varphi}_j(x) = \gamma_j(\alpha)\cdot\sigma_j(\varphi_j(x))$ est une famille de cocycles continus de X dans $\mathbb{U}$. Cette expression est presque sûrement convergente, d'après (14).

Le THÉORÈME 2 est donc démontré dans le cas des cocycles continus. Le raisonnement précédent montre également que, pour établir le THÉORÈME 2 dans toute sa généralité, il suffit de démontrer le résultat suivant :

$$\begin{cases}\text{soit } (\varphi_j)_{|j|\leq p} \text{ une famille de cocycles de } X \text{ dans } \mathbb{U}\,;\text{ la suite}\\ (1/n)\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p}\varphi_j^{(jk)}(x) \text{ converge pour presque tout } x.\end{cases}$$

Le corollaire du théorème de Kočergin affirme qu'il existe une famille $(\psi_j)_{|j|\leq p}$ de cocycles continus de X dans $\mathbb{U}$ telle que, pour chaque j, il existe une fonction mesurable a_j de X dans $\mathbb{U}$ vérifiant

$$\varphi_j(x) = \psi_j(x)\cdot a_j(x+\alpha)/a_j(x).$$

On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p}\varphi_j^{(jk)}(x) = \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{|j|\leq p} a_j(x+jk\alpha)\cdot\psi_j^{(jk)}(x)\Big]\Big/\prod_{|j|\leq p} a_j(x),$$

et la convergence de cette expression se déduit du THÉORÈME 2 appliqué à la transformation T, aux cocycles continus $(\psi_j)_{|j|\leq p}$, et aux fonctions $f_j(x,z) = a_j(x)\cdot z$. La démonstration du THÉORÈME 2 est achevée. □

V. Preuve de la proposition 2

Ici, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique mesuré inversible et D désigne une partie dénombrable de $L^2(\mu)$, engendrant un sous-espace vectoriel dense; $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des applications mesurables de X dans $\mathbb{U}$.

LEMME 12. — *Soit $\varphi \in \mathcal{M}$. φ est un cobord si et seulement si, pour μ-presque tout x, il existe $d \in D$ tel que :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) \Big| \neq 0.$$

Preuve du lemme 12.—Supposons que φ est un cobord. Il existe $\psi \in \mathcal{M}$ tel que $\varphi = \psi \circ T/\psi$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \psi(T^k x)/\psi(x).$$

On a alors, d'après le théorème ergodique de Birkhoff, pour μ-presque tout x, pour tout $d \in D$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = E(d \cdot \psi \mid \mathfrak{I})(x)/\psi(x)$$

où $\mathfrak{I}$ désigne la tribu des événements T-invariants du système dynamique.

Du fait que $|\psi| \equiv 1$ on déduit que, pour μ-presque tout x, il existe $d \in D$ tel que $E(d\psi \mid \mathfrak{I})(x) \neq 0$. En effet si $A = \{x : E(d\psi \mid \mathfrak{I})(x) = 0,\ \forall d \in D\}$ alors $A \in \mathfrak{I}$ et pour tout d dans D :

$$\int_A E(d\psi \mid \mathfrak{I})(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 0, \qquad \int_A d(x) \cdot \psi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

d'où $\psi\, \mathbf{1}_A = 0$ p.p. Ceci prouve la première implication du LEMME 12.

Démontrons sa réciproque. On suppose que, pour μ-presque tout x, il existe $d \in D$ tel que :

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) \Big| \neq 0.$$

Le théorème ergodique de Birkhoff, appliqué au produit gauche construit à l'aide de φ au-dessus du système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et à la fonction

$\tilde{d}(x,z) = d(x) \cdot z$, permet d'affirmer que, pour μ-presque tout x et pour tout $d \in D$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) \quad \text{existe.}$$

On note $F_d(\varphi, x)$ cette limite.

On a $F_d(\varphi, Tx) = \overline{\varphi(x)} \cdot F_d(\varphi, x)$ et $|F_d(\varphi, Tx)| = |F_d(\varphi, x)|$. A chaque d dans D, on associe $X_d = \{x \in X : F_d(\varphi, x) \neq 0\}$.

Par hypothèse, on obtient ainsi un recouvrement (p.s) de X par des parties mesurables; de plus chaque X_d est T-invariant et T^{-1}-invariant. On peut donc associer mesurablement à presque tout x de X, un élément d_x de D tel que $F_{d_x}(\varphi, x) \neq 0$ et $d_{Tx} = d_x$.

En posant $\psi(x) = \overline{F_{d_x}(\varphi, x)} / |F_{d_x}(\varphi, x)|$, on construit un élément ψ de $\mathcal{M}$ qui vérifie $\varphi = \psi \circ T/\psi$. Le LEMME 12 est démontré. □

On déduit de ce lemme que l'ensemble C des cobords est un borélien de $\mathcal{M}$. L'ensemble Q des quasi-cobords étant égal à $\mathbb{U} \cdot C$ est donc également un borélien. Ceci établit la première affirmation de la PROPOSITION 2.

La preuve du LEMME 12 nous donne également le renseignement suivant : si φ est un cobord, on peut associer mesurablement à presque tout x de X, un élément d_x de D tel que

$$F_{d_x}(\varphi, x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^k x) \cdot \varphi^{(k)}(x) \neq 0$$

et, si $\psi(x) = \overline{F_{d_x}(\varphi, x)} / |F_{d_x}(\varphi, x)|$, alors $\varphi = \psi \circ T/\psi$.

La fonction ψ ainsi définie est une fonction mesurable du couple (φ, x). Ceci établit la seconde affirmation de la PROPOSITION 2.

Il nous reste à prouver que l'on peut associer mesurablement à chaque quasi-cobord φ, une constante $\lambda(\varphi)$ telle que $\varphi/\lambda(\varphi)$ soit un cobord. A chaque φ dans $\mathcal{M}$, on associe un opérateur unitaire de $L^2(\mu)$, noté U_φ, et défini par $U_\varphi f(x) = \varphi(x) \cdot f(Tx)$. Si φ/λ est un cobord, alors λ est une valeur propre de U_φ (la réciproque n'est pas nécessairement vraie si T n'est pas ergodique). Nous allons démontrer que :

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} \text{on peut associer mesurablement, à chaque quasi-cobord } \varphi, \\ \text{une suite } (\lambda_n)_{n\geq 0} \text{ dans } \mathbb{U} \text{ décrivant l'ensemble des valeurs} \\ \text{propres de } U_\varphi. \end{cases}$$

A partir de (16), on peut démontrer la troisième affirmation de la PROPOSITION 2 en remarquant que, pour chaque φ dans Q, si on pose

$$n(\varphi) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \varphi/\lambda_n \in C\}, \quad \lambda(\varphi) = \lambda_{n(\varphi)},$$

on définit une application mesurable $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ de Q dans $\mathbb{U}$ vérifiant la propriété annoncée.

Démontrons (16). Notons, pour chaque $d \in D$ et pour chaque $\varphi \in Q$, $\nu_{\varphi,d}$ la mesure spectrale associée à (U_φ, d). C'est une mesure sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ caractérisée par $\hat{\nu}_{\varphi,d}(n) = \langle U_\varphi^n d, d\rangle$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$$\hat{\nu}_{\varphi,d}(n) = \int_X \varphi^{(n)}(x) \cdot d(T^n x) \cdot \overline{d(x)} \,\mathrm{d}\mu(x).$$

L'ensemble des valeurs propres de U_φ est égal à :

$$\bigcup_{d \in D} \{\lambda \in \mathbb{U} : \nu_{\varphi,d}(\{\lambda\}) \neq 0\}.$$

Soit (P_m) une suite de polynômes trigonométriques qui forment une résolution de l'identité. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} P_m(\lambda - t) \,\mathrm{d}\nu_{\varphi,d}(t)$$

est une combinaison linéaire des coefficients de Fourier de $\nu_{\varphi,d}$, avec des coefficients dépendant continument de λ ; c'est donc une fonction continue de (φ, λ). D'autre part :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^{2\pi} P_m(\lambda - t) \,\mathrm{d}\nu_{\varphi,d}(t) = \nu_{\varphi,d}(\{\lambda\}).$$

Ceci prouve que, pour chaque $d \in D$,

$$\{(\varphi, \lambda) \in Q \times \mathbb{U} : \nu_{\varphi,d}(\{\lambda\}) \neq 0\}$$

est un borélien de $Q \times \mathbb{U}$.

Pour chaque $d \in D$, $\{\nu_{\varphi,d}(\{\lambda\}) : \lambda \in \mathbb{U}\}$ est sommable ; il est donc aisé de décrire un procédé mesurable associant à chaque φ dans Q, une suite décrivant $\{\lambda : \nu_{\varphi,d}(\{\lambda\}) \neq 0\}$. Par réunion sur d, l'affirmation (16) s'en déduit immédiatement. Ceci achève la preuve de la PROPOSITION 2. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[A] ANZAI (H.). — *Ergodic skew product transformations of the torus*, Osaka J. Math., t. **3**, 1951, p. 83–99.

[B] BAGGETT (L.). — *On circle-valued cocycles of an ergodic measure preserving transformation*, Israël J. Math., t. **61,** 1, 1988, p. 29–38.

[C] CONZE (J.-P.). — Équirépartition et ergodicité de transformations cylindriques, *Séminaire de Probabilités,* I, *Université de Rennes*, 1976.

[CL1] CONZE (J.-P.) et LESIGNE (E.). — *Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **306,** I, 1988, p. 491–493.

[CL2] CONZE (J.-P.) et LESIGNE (E.). — Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *Publications de l'IRMAR, Probabilités*, Université de Rennes, 1987.

[F1] FURSTENBERG (H.). — *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math., t. **34**, 1978, p. 275–291.

[F2] FURSTENBERG (H.). — *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* — Princeton University Press, 1981.

[F3] FURSTENBERG (H.). — Non conventional Ergodic Averages, (dans *The Legacy of John von Neumann*), Proc. Sympos. Pure Math., t. **50**, 1990, p. 43–56.

[HR] HEWITT (E.) and ROSS (K.A.). — *Abstract Harmonic Analysis.* — Springer Verlag, Berlin, 1963.

[K] KOČERGIN (A.V.). — *On the homology of functions over dynamical systems*, Soviet. Math. Dokl., t. **17,** 6, 1976, p. 1637–1641.

[Lem] LEMAŃCZYK (M.). — *Ergodic Compact Abelian Group Extensions of Rotations.* — Toruń, 1990.

[Les1] LESIGNE (E.). — *Résolution d'une équation fonctionnelle*, Bull. Soc. Math. France, t. **112**, 1984, p. 177–196.

[Les2] LESIGNE (E.). — *Sur la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **298,** I, 1984, p. 425–428.

[Les3] LESIGNE (E.). — *Théorèmes ergodiques pour une translation sur une nil-variété*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **9,** I, 1989, p. 115–126.

[R] RUDOLPH (D.). — *$\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$ cocycle extensions and complementary algebra*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **6**, 1986, p. 583–599.

[V] VEECH (W.A.). — *Some questions of uniform distribution*, Ann. of Math., t. **94,** 1, 1971, p. 125–138.