

BULLETIN DE LA S. M. F.

BENJAMIN ENRIQUEZ

**Le centre des algèbres de coordonnées des groupes
quantiques aux racines p^α -ièmes de l'unité**

Bulletin de la S. M. F., tome 122, n° 4 (1994), p. 443-485

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_4_443_0

© Bulletin de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE CENTRE DES ALGÈBRES DE COORDONNÉES
DES GROUPES QUANTIQUES AUX RACINES
 p^α -IÈMES DE L'UNITÉ

PAR

BENJAMIN ENRIQUEZ (*)

RÉSUMÉ. — Certaines complétions p -adiques des algèbres de coordonnées sur les groupes quantiques aux racines p^α -ièmes de l'unité sont des modules de type fini sur leur centre. Nous décrivons ces centres dans le cas complété et nous déduisons de cette analyse les centres des algèbres non complétées, ainsi que leurs structures de Poisson. Comme dans la situation décrite par Kac, de Concini et Procesi, ils sont engendrés par leurs sous-algèbres « de Poisson » et « de Frobenius ».

ABSTRACT. — The coordinate algebras of quantum groups at p^α -th roots of unity are finite modules over their centers, at least in a suitable completed sense. We describe their centers in the completed case, and deduce from this the centers of the non-completed algebras. As in the situation described by Kac, de Concini and Procesi, they are generated by their « Poisson » and « Frobenius » parts.

0. Introduction

Nous poursuivons l'étude, commencée dans [E], des algèbres de coordonnées sur les groupes quantiques aux racines de l'unité. En particulier, nous donnons une description de leur centre. Il resterait à prolonger ce travail par l'analyse de sous-algèbres commutatives maximales, comme celle engendrée par l'image du morphisme de Frobenius-Lusztig et les mineurs associés à deux éléments de la seconde diagonale (dans le cas de $\mathfrak{sl}(n)$); et par la mise à jour d'une éventuelle structure de produit croisé, au dessus d'ouverts du spectre du centre.

(*) Texte reçu le 23 novembre 1992, révisé le 16 mars 1993.

B. ENRIQUEZ, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, URA 169 du CNRS, F 91128 Palaiseau, France. Email : enriquez@orphee.polytechnique.fr.

Classification AMS : 17B37

L'intérêt d'une telle étude (ou d'une étude analogue pour les variétés de drapeaux quantiques) pourrait être d'aider à éclaircir les relations des groupes quantiques avec les groupes en caractéristique p .

Notre premier objectif est de définir des éléments centraux, à l'aide de coefficients de représentations b_{ϖ_i} et c_{ϖ_i} . Ces éléments avaient été étudiés par Y. SOIBELMAN, dans son étude des C^* -algèbres associées aux valeurs réelles du paramètre (section 2).

Il faut ensuite comprendre comment ces éléments sont reliés à la partie de Frobenius du centre, définie par G. LUSZTIG (cf. [L1]). C'est fait dans la section 3; pour cela, on étudie leurs transformés par un morphisme de variétés $(\mathrm{SL}_2)^\nu \rightarrow G$ correspondant à une décomposition de l'élément w_0 du groupe de Weyl de plus grande longueur, déjà utilisé par SOIBELMAN; c'est l'objet de la section 1 et d'une partie de 3. Pour comprendre ces transformés, la théorie des poids n'a que peu d'utilité (sauf dans les cas de poids minuscules); dans le cas classique, c'est la décomposition en cellules de Schubert qui résoud la question. Cet outil nous fait défaut dans le cas quantique. L'argument repose alors sur l'argument classique et sur l'emploi du morphisme de Frobenius. Le résultat étant prouvé pour toutes les racines possibles de l'unité, on en déduit le résultat analogue dans le cas transcendant, selon la méthode de [E, 2.4].

Les éléments centraux construits à partir des b_{ϖ_i} et c_{ϖ_i} satisfont quelques relations évidentes; pour montrer que ce sont les seules relations satisfaites, nous utilisons le passage à la caractéristique p (section 6), et de nouveau le morphisme $(\mathrm{SL}_2)^\nu \rightarrow G$.

Il reste à montrer la sous-algèbre centrale ainsi trouvée est tout le centre. Pour cela, nous suivons la stratégie de V. KAC, C. DE CONCINI et C. PROCESI (cf. [dCKP]) :

- Il faut prouver que cette sous-algèbre centrale est normale; c'est fait en 7. Dans cette situation, le critère de normalité de Serre ne s'applique pas : les équations la définissant n'en faisant pas une intersection complète. Nous jouons donc sur le fait que cet anneau est une extension galoisienne des fonctions sur le groupe, de groupe de Galois $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$, où n est le rang de la matrice de Cartan; le lien entre les fonctions b_{ϖ_i} , c_{ϖ_i} et les cellules de Schubert permet alors de conclure en reprenant les arguments du théorème de Serre, sous la forme exposée par GROTHENDIECK [EGA]. Nous adaptons ensuite ces arguments au cas complété.

- Par ailleurs, nous construisons (section 5) une représentation irréductible de dimension ℓ^ν de l'algèbre de coordonnées sur le groupe quantique; pour cela, nous nous appuyons sur l'étude en 4 d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$ de dimension le complément $\dim(\mathrm{SL}_2)^\nu - \dim G$, qui

permet de comprendre la réduction de l'algèbre \widehat{O}_ℓ au-dessus de certains points du spectre du centre de Frobenius (notons la possibilité d'une analyse similaire, correspondant à un élément arbitraire du groupe de Weyl, qui permettrait de comprendre une partie des algèbres réduites sur d'autres points).

- On a donc affaire — comme dans [dCKP] — à une suite d'extension de corps dont on sait minorer un degré; cette minoration est une conséquence de ce qui précède et du théorème d'Amitsur-Levitsky, comme nous l'a fait remarquer J. ALEV; et par la théorie de Galois, on connaît le degré de l'autre extension.

- On sait que ces minoration sont des égalités, par comparaison avec la caractéristique p et en utilisant la complétude p -adique des algèbres. Cela permet en outre d'affirmer que le vrai centre et le candidat centre sont birationnellement équivalents.

- La normalité du candidat centre et la finitude du vrai centre comme module sur celui-ci (conséquence de [E, cor. 4.3]) permettent alors de conclure à leur égalité (section 8).

Le passage de ce résultat au résultat analogue non complété est réalisé dans la section 9. Le spectre du centre a alors une structure de produit fibré, correspondant à sa décomposition en parties «de Poisson» et «de Frobenius», au-dessus d'une base fixée (l'espace affine de dimension $2n$). Alors que le morphisme de la partie «de Frobenius» sur la base est indépendant de ℓ , et devrait définir la stratification du groupe de Poisson G en feuilles symplectiques, la partie «de Poisson», ainsi que son morphisme vers la base, dépendent de ℓ (noter la différence avec la situation de [dCKP], où seul le morphisme est variable; le terme «de Poisson» repose sur des remarques communes à N. ANDRUSKIEWITSCH et l'auteur).

Par contre, si on considère le corps de fractions du centre comme inclus dans celui de l'algèbre, l'expression algébrique du sous-corps de Frobenius est variable avec ℓ , alors que le sous-corps de Poisson est engendré par des éléments fixes (les $b_{\varpi_i}/c_{\varpi_i}$). Nous pensons que les $b_{\varpi_i}/c_{\varpi_i}$ engendrent le centre du corps associé à l'anneau de coordonnées, dans le cas d'un paramètre générique. On note l'analogie de ces résultats avec ceux de [dCKP].

Une autre observation de [dCKP] est que pour une algèbre A définie sur $\mathbb{C}[v, v^{-1}]$, le centre de sa spécialisation $A_\epsilon = A/(v - \epsilon)$ à une valeur complexe du paramètre a naturellement une structure de Poisson, obtenue par variations infinitésimales du paramètre. Nous terminons avec l'analyse de la structure de Poisson du centre de $O_\ell(A)$. Elle repose sur l'analyse du cas SL_2 et la quantification du morphisme $(SL_2)^\nu \rightarrow G$.

Je voudrais remercier J. ALEV, F. du CLOUX, C. DE CONCINI, T. LEVASSEUR, C. PROCESI, Y. SOIBELMAN et C. WENZEL pour d'utiles entretiens à propos de ce travail.

1. La quantification du morphisme $(\mathbf{SL}_2)^\nu \rightarrow G$

Rappelons le cadre de [L1], [E]. Soit A une matrice de Cartan, de rang n , soient R le système de racines associé et R_+ un sous-système de racines positives. Posons $\nu = \text{card } R_+$. Pour toute racine simple positive α_i , $i = 1, \dots, n$, notons s_i le générateur du groupe de Weyl W associé à α_i .

Soit w_0 le plus long élément de W . Il admet des décompositions

$$w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\nu}, \quad i_k \in \{1, \dots, n\};$$

nous fixons une telle décomposition.

Soient $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, $\mathcal{A}' = \mathbb{Q}(v)$ son corps de fractions, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ℓ un entier strictement positif, ϕ_ℓ le ℓ -ième polynôme cyclotomique et posons $\mathcal{B}_\ell = \mathcal{A}/(\phi_\ell)$. Alors \mathcal{B}_ℓ est l'anneau des entiers de son corps de fractions $B_\ell = \mathcal{A}_0/(\phi_\ell)$, le ℓ -ième corps cyclotomique.

Soit \mathbb{U} la \mathcal{A}' -algèbre de Hopf définie dans [L1, 1.1] et soit U la sous- \mathcal{A} -algèbre de Hopf définie dans [L1, 1.3]. Pour A de type A_1 , \mathbb{U} et U sont notées $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2)$ et $U(\mathfrak{sl}_2)$; les générateurs de $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2)$ ne sont alors plus indicés. Pour $i = 1, \dots, n$, on note $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i)$ l'algèbre obtenue à partir des relations définissant $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2)$ en remplaçant v par v^{d_i} . Il existe un morphisme d'algèbres de Hopf de $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i)$ dans \mathbb{U} , noté σ_i , tel que $\sigma_i(E) = E_i$, $\sigma_i(K) = K_i$, $\sigma_i(F) = F_i$. Soit $U(\mathfrak{sl}_2, i)$ la $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -sous-algèbre de $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i)$, engendrée par les $E^N/[N]_{d_i}^!$, $F^N/[N]_{d_i}^!$ pour $n \geq 0$. Le morphisme σ_i se restreint en un morphisme de $U(\mathfrak{sl}_2, i)$ dans U , encore noté σ_i .

Suivant [L1], l'algèbre de coordonnées sur le groupe quantique pour un paramètre transcendant est la \mathcal{A}_0 -sous-algèbre $O(A)$ de $\text{Hom}(U(A)_{\mathcal{A}_0}, \mathcal{A}_0)$ formée par les coefficients des représentations admissibles (i.e. dont l'espace est une somme directe de ses sous-espaces de poids pour l'action des K_i) de $U(A)_{\mathcal{A}_0}$ qui sont \mathcal{A}_0 -finies. (Comme dans [L1], nous posons $U(A)_\Gamma = U(A) \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \Gamma$ pour tout $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -anneau Γ .)

Remarquons que σ_i induit, par tensorisation, un morphisme d'algèbres de Hopf de $U(\mathfrak{sl}_2, i)_{\mathcal{A}_0}$ dans $U(A)_{\mathcal{A}_0}$; donc σ_i^* induit un morphisme d'algèbres de $U(A)_{\mathcal{A}_0}^*$ dans $U(\mathfrak{sl}_2, i)_{\mathcal{A}_0}^*$. La définition de $O(A)$ montre que σ_i^* se restreint en un morphisme d'algèbres de $O(A)$ dans $O(\mathfrak{sl}_2, i)$ (dual admissible de $U(\mathfrak{sl}_2, i)$).

Rappelons encore (voir [L1, 7.1]) que $O(A)$ a une structure d'algèbre de Hopf, duale de celle de $U_{\mathcal{A}_0}$; notons Δ le coproduit de $O(A)$. Cette structure permet la construction suivante : soit Δ_ν la composition

$$(\Delta \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \circ \cdots \circ \Delta \quad (\nu \text{ facteurs}).$$

C'est un morphisme d'algèbres de $O(A)$ dans $O(A)^{\otimes \nu}$. La composition $(\sigma_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes \sigma_{i_\nu}^*) \circ \Delta_\nu$ est alors un morphisme d'algèbres de $O(A)$ dans $\bigotimes_{k=1}^\nu O(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. Notons-le Σ . Nous prouvons d'abord :

PROPOSITION 1.1.

- (i) Σ est une injection de $O(A)$ dans $\bigotimes_{k=1}^\nu O(\mathfrak{sl}_2, i_k)$.
- (ii) Si $\ell = p^\alpha$, avec p premier, alors $\Sigma \otimes_{\mathcal{A}_0} 1$ est une injection de $O(A) \otimes_{\mathcal{A}_0} B_\ell$ dans $\bigotimes_{k=1}^\nu [O(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes B_\ell]$; il en est de même du morphisme obtenu par complétion p -adique.

Preuve :

- (i) Remarquons que $\bigcap_{n \geq 0} (v - 1)^n \mathcal{A}_0 = 0$; il s'ensuit que

$$\bigcap_{n \geq 0} (v - 1)^n O(A) = 0.$$

D'autre part, par le changement de base $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{Q}$, $v \mapsto 1$, $O(A) \otimes \mathbb{Q}$ s'identifie à $O_{\mathbb{Q}}(A) = \bar{U}_{\mathbb{Q}}^\circ$ (cf. [L1, 8.17]). Le noyau de $\otimes 1 : O(A) \rightarrow O_{\mathbb{Q}}(A)$ est égal à $(v - 1)O(A)$. Il suffit donc de prouver l'injectivité de

$$(1) \quad \Sigma \otimes 1 : O_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}.$$

Le \mathbb{Q} -groupe associé à $O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2)$ est $SL_{2, \mathbb{Q}}$; soit G le \mathbb{Q} -groupe associé à $O_{\mathbb{Q}}(A)$. Soit K une clôture algébrique de \mathbb{Q} . L'injectivité de (1) résultera de celle du produit tensoriel

$$(2) \quad \Sigma \otimes 1 : O_{\mathbb{Q}}(A) \otimes K \longrightarrow (O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes K)^{\otimes \nu}.$$

Ce morphisme d'algèbres correspond à un morphisme de K -variétés algébriques $\sigma : SL_2(K)^\nu \rightarrow G(K)$. Soit B le sous-groupe de Borel de $G(K)$ associé à R_+ . Notons encore w_0 un représentant de

$$w_0 \in W = N_{G(K)}(T)/T$$

dans $G(K)$. Montrons que l'image de σ contient un ouvert de Zariski de la cellule dense Bw_0B ; nous en déduisons l'injectivité de (2).

En effet, une fonction algébrique sur $G(K)$ annulée par $\Sigma \otimes 1$ doit s'annuler sur cet ouvert, et par densité sur Bw_0B et donc sur $G(K)$.

Soit B' le sous-groupe de Borel de $SL_2(K)$ analogue de B . Soit w'_0 un analogue de w_0 pour $SL_2(K)$, $w_i \in G(K)$ son image par σ_i (le morphisme de groupes induit par $\sigma_i^* \otimes 1$). Soit t le morphisme de groupes de K^\times dans $SL_2(K)$ donné par $t(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$; soit $t_i : K^\times \rightarrow G$ le morphisme composé avec $\sigma_i^* \otimes 1$. Pour $\alpha \in R$, soit x_α le morphisme de groupes de K dans G défini dans [Ja, p. 176, (3)]. Notons x (resp. y) les morphismes correspondant à la racine positive (resp. négative) pour $SL_2(K)$.

Un élément arbitraire g de Bw_0B s'écrit

$$g = \prod_{\alpha \in R_+} x_{-\alpha}(A_\alpha) \prod_{\alpha \in R_+} x_\alpha(A'_\alpha) \prod_{i=1}^n t_i(B_i)w_0;$$

le produit est ordonné, et l'ordre sur R_+ est défini par (cf. [B1]) :

$$\alpha_{i_1} \leq s_{i_1}(\alpha_{i_2}) \leq \dots \leq s_{i_1} \dots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}).$$

D'autre part, l'image par σ de $(x(a_k) \cdot w'_0 \cdot t(b_k)x(c_k))_{k=1, \dots, \nu}$ est :

$$x_{\alpha_{i_1}}(a_1) \cdot w_{i_1} \cdot t_{\alpha_{i_1}}(b_1)x_{\alpha_{i_1}}(c_1) \dots x_{\alpha_{i_\nu}}(a_\nu) \cdot w_{i_\nu} \cdot t_{\alpha_{i_\nu}}(b_\nu)x_{\alpha_{i_\nu}}(c_\nu).$$

Faisons passer les termes en w_{i_k} à droite, ceux en t_{i_k} à leur gauche immédiate; posant $\alpha(k) = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$, l'expression est maintenant

$$\prod_{k=1}^\nu x_{\alpha(k)}(a_k)x_{-\alpha(k)}(a'_k) \prod_{k=1}^\nu t_{\alpha(k)}(b_k)w_0$$

(les produits sont ordonnés), où chaque a'_k est le produit de c_k par des puissances des b_j . Posons, pour chaque k avec $\alpha(k)$ simple, b_k égal au B_j correspondant, et les autres b_k égaux à 1.

Montrons alors que $\prod_{s=1}^\nu x_{\alpha(s)}(a_s)x_{-\alpha(s)}(a'_s)$ s'écrit

$$(3) \quad \prod_{s=1}^\nu x_{\alpha(s)}(X_s) \prod_{s=1}^\nu x_{-\alpha(s)}(X'_s)$$

où

$$(3') \quad X_s = a_s + \sum_{k < \ell < s} \mu_{k\ell s}^{\lambda\mu} a_k^{\prime\lambda} a_\ell^\mu,$$

$$(3'') \quad X'_s = a'_s + \sum_{s < k < \ell} \mu_{k\ell s}^{\prime\lambda\mu} a_k^{\prime\lambda} a_\ell^\mu,$$

les $\mu_{k\ell s}^{\lambda\mu}$ et $\mu_{k\ell s}^{\prime\lambda\mu}$ étant scalaires (et même entiers). Pour cela, rappelons la formule de [Ja, 5, p. 175]; les parenthèses désignent le commutateur :

$$(x_\alpha(a), x_\beta(b)) = \prod_{i, j > 0} x_{i\alpha + j\beta}(c_{ij} a^i b^j)$$

si $\alpha + \beta \neq 0$, le produit pouvant être effectué dans un ordre arbitraire (les c_{ij} sont entiers dans tous les cas). Nous choisissons l'ordre défini par la décomposition fixée de w_0 ; cet ordre est tel que pour α, β positifs avec $\alpha < \beta$, on a $\alpha < \alpha + \beta < \beta$. On en déduit que si $\beta > \alpha > 0$,

$$(4) \quad x_{-\alpha}(a') x_\beta(b) = x_\beta(b) \prod_{\beta' > \beta} x_{\beta'}(d_{\alpha\beta\beta'} a^{i_{\alpha\beta\beta'}} b^{j_{\alpha\beta\beta'}}) \\ \prod_{\alpha' < \alpha} x_{-\alpha'}(d'_{\alpha\beta\alpha'} a^{i_{\alpha\beta-\alpha'}} b^{j_{\alpha\beta-\alpha'}}) x_{-\alpha}(a'),$$

où les $d_{\alpha\beta\beta'}$ et $d_{\alpha\beta-\alpha'}$ sont entiers et les $i_{\alpha\beta\beta'}$, $i_{\alpha\beta-\alpha'}$, $j_{\alpha\beta\beta'}$, $j_{\alpha\beta-\alpha'}$ sont entiers > 0 . (Les produits sont pris dans l'ordre croissant en β' et α' .)

De même, si $0 < \alpha < \beta$, on a

$$(5) \quad x_\beta(b) x_\alpha(a) = x_\alpha(a) \prod_{\alpha < \gamma < \beta} x_\gamma(e_{\alpha\beta\gamma} a^{j_{\alpha\beta\gamma}} b^{k_{\alpha\beta\gamma}}) x_\beta(b)$$

où $e_{\alpha\beta\gamma}$ est entier, et $j_{\alpha\beta\gamma}$, $k_{\alpha\beta\gamma}$ sont entiers > 0 .

Établissons alors l'expression (3). Travaillons par récurrence, avec l'énoncé à l'ordre p

$$\prod_{i=1}^p x_{\alpha(s)}(a_s) x_{-\alpha(s)}(a'_s) = \prod_{i=1}^p x_{\alpha(s)}(X_s^{(p)}) \prod_{i=1}^p x_{-\alpha(s)}(X_s^{\prime(p)}),$$

où $X_s^{(p)}$ s'exprime sous la forme

$$X_s^{(p)} = \begin{cases} a_s + \sum_{k < \ell < s} \mu_{k\ell s}^{\lambda\mu;p} a_k^{\prime\lambda} a_\ell^\mu, & \text{pour } s \leq p, \\ \sum_{k < \ell < s} \mu_{k\ell s}^{\lambda\mu;p} a_k^{\prime\lambda} a_\ell^\mu & \text{pour } s > p, \end{cases}$$

et où $X_s^{(p)}$ s'écrit

$$X_s^{(p)} = a'_s + \sum_{s < k < \ell} \mu_{k\ell s}^{\lambda\mu;p} a_k^{\lambda} a_\ell^{\mu}$$

avec $\mu_{k\ell s}^{\lambda\mu;p}$ et $\mu_{k\ell s}^{\lambda\mu;p}$ entiers, λ et μ entiers ≥ 0 .

Cela s'établit facilement aux premières étapes.

Pour passer de l'étape p à la suivante, il faut utiliser d'abord (4) pour faire passer $x_{\alpha(p+1)}(a_{p+1})$ à gauche (c'est possible car $\alpha(p+1)$ n'est opposé à aucun $-\alpha(s)$, $s \leq p$); cela fait apparaître des termes positifs, du type annoncé, dans les x_α , α négatif; il faut encore utiliser (4) pour faire passer ces termes à gauche. Cela se réalise en un nombre fini d'étapes car les termes complémentaires sont des $x_{\alpha(k)}(\xi)$, avec k augmentant strictement à chaque fois (cette propriété de k autorise d'ailleurs l'emploi de (4)). Il faut alors réordonner séparément les secteurs positif et négatif; pour cela, on emploie (5) et son analogue pour les racines négatives.

Il reste donc à prouver que toute application i de $\mathbb{A}^{2\nu}(K)$ (l'espace affine de dimension 2ν) dans lui-même, définie par $(a_s, a'_s) \mapsto (X_s, X'_s)$, X_s et X'_s des fonctions de (a_s, a'_s) de la forme (3'), (3''), a une image contenant un ouvert de Zariski.

La dérivée à l'origine d'une telle application est l'identité; ceci implique qu'elle induit un isomorphisme entre les anneaux locaux complétés à l'origine des deux espaces; les anneaux de fonctions régulières s'injectant dans ces anneaux locaux complétés, l'application induit aussi une injection des anneaux de fonctions régulières, c'est-à-dire un morphisme dominant entre les variétés affines. Le résultat de CHEVALLEY ([CC] ou de [Di, cor., p. 109]) s'applique alors: l'image de i contient un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{A}^{2\nu}(K)$. (Remarquons que notre argument n'utilisera pas ce point.)

On a le résultat supplémentaire: la préimage de w_0T est égale à $(w'_0T')^\nu$. En effet, $\sigma(w'_0T')^\nu \subset w_0T$. Réciproquement, si

$$X_s = X'_s = 0,$$

comme $X_1 = a_1$, on a $a_1 = 0$ et par récurrence

$$a_s = X_s - \sum_{k < \ell < s} \mu_{k\ell s}^{\lambda\mu} a_k^{\lambda} a_\ell^{\mu} = 0.$$

Même raisonnement pour montrer que $a'_t = 0$ (cette fois, la récurrence est descendante).

(ii) Désignons, comme dans [E], par $\mathcal{O}_\ell(A)$ la sous-algèbre de $U_{\mathcal{B}_\ell}^*$ formée des coefficients des représentations admissibles de $U_{\mathcal{B}_\ell}(A)$ et par $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)$ sa complétion p -adique; cette dernière algèbre est une algèbre de Hopf topologique. Considérons le morphisme d'algèbres

$$\Sigma' : \widehat{\mathcal{O}}_\ell(A) \longrightarrow \widehat{\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{B}_\ell} [\widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)]$$

défini de façon analogue à Σ . Montrons qu'il est injectif : sa spécialisation à une clôture algébrique k de \mathbb{F}_p (le changement de base à k étant défini par $\mathcal{B}_\ell \rightarrow k, v \mapsto 1$, cf. [L1]) l'est en effet, par des arguments analogues à ceux de (i), (la densité de la grande cellule ayant lieu sur tout corps de base algébriquement clos); on a encore $\bigcap_{n \geq 0} (v-1)^n \mathcal{B}_\ell = 0$, d'où, en imitant encore (i), l'injectivité de Σ' . Par localisation aux éléments non nuls de \mathcal{B}_ℓ , on en déduit l'injectivité de

$$\Sigma' \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{B}_\ell}} 1 : \widehat{\mathcal{O}}_\ell(A) \longrightarrow \widehat{\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{B}_\ell} \widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k).$$

C'est la deuxième partie de (ii). (Rappelons que $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A) = \widehat{\mathcal{O}}_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.)

L'algèbre $\mathcal{O}(A) \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{B}_\ell$ (resp. $\mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{B}_\ell$) est une sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2)$). De ce qui précède, et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(A) \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{B}_\ell & \xrightarrow{\Sigma \otimes 1} & \left[\widehat{\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{A}_0} \mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right] \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{B}_\ell \\ \text{inj.} \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{O}}_\ell(A) & \xrightarrow{\Sigma' \otimes 1} & \widehat{\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{B}_\ell} \widehat{\mathcal{O}}_2(\mathfrak{sl}_2, i_k), \end{array}$$

on déduit la première partie de (ii). \square

Le produit tensoriel $\mathcal{O}(A) \otimes_{\mathcal{A}_0} \mathcal{A}'$ a été identifié dans [L1] à $\mathcal{O}(A)$, sous-algèbre de $\mathbb{U}^*(A)$. La localisation étant exacte à gauche, nous en déduisons :

COROLLAIRE 1.1. — $\Sigma \otimes_{\mathcal{A}'} 1$ est un morphisme injectif d'algèbres de $\mathcal{O}(A)$ dans $\widehat{\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)}$.

COROLLAIRE 1.2. — Soit F un corps contenant $\mathbb{Q}(v)$. L'algèbre $\mathcal{O}(A) \otimes F$ n'a pas de diviseurs de zéro.

Démonstration. — Le changement de base $\mathcal{A}' \rightarrow F$ est une extension de corps. Il suit du COROLLAIRE 1.1 ci-dessus que $\mathbb{O}(A) \otimes F$ s'injecte dans $\bigotimes_{F,k=1}^{\nu} (\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes F)$.

D'après un résultat de P. POLO (appendice à [APW]), et par le morphisme d'anneaux injectif $\mathbb{Z}[v]_{v-1,p} \rightarrow F$, nous voyons que $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes F$ est la F -algèbre engendrée par les variables a, b, c, d et les relations :

$$\begin{aligned} ab &= q^{i_k} ba, & ac &= q^{i_k} ca, & db &= q^{-i_k} db, & dc &= q^{-i_k} cd, \\ bc &= cb, & ad &= 1 + q^{i_k} bc, & da &= 1 + q^{-i_k} bc. \end{aligned}$$

Une base en est

$$(a^i b^j c^k)_{i,j,k \geq 0} \cup (d^i b^j c^k)_{i > 0, j, k \geq 0}.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$A_i = \begin{cases} a^i F[b, c] & \text{si } i \geq 0, \\ d^{-i} F[b, c] & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

On a $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes F = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ et $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

De plus, si $x \in A_i$ et $y \in A_j$, l'égalité $xy = 0$ entraîne $x = 0$ ou $y = 0$. Cela prouve l'intégrité de $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2) \otimes F$: si a et b sont différents de zéro dans $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2) \otimes F$, on pose $a = \sum_{i \geq i_0} a_i$ et $b = \sum_{j \geq j_0} b_j$, avec a_{i_0} et b_{j_0} non nuls. Alors ab appartient à $a_{i_0} b_{j_0} + \sum_{i \geq i_0 + j_0 + 1} A_i$ et ne peut être nul.

Prouvons maintenant l'intégrité de $\bigotimes_{k=1}^{\nu} (\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes F)$. Une base en est donnée par

$$(a^{i_1} b^{j_1} c^{k_1} \otimes \dots \otimes a^{i_{\nu}} b^{j_{\nu}} c^{k_{\nu}})_{i_s \in \mathbb{Z}, j_s, k_s \geq 0}$$

(avec la convention $a^i = d^{-i}$ si $i < 0$). Définissons-y la graduation suivante : pour $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_{\nu}) \in \mathbb{Z}^{\nu}$, posons $A_{\mathbf{i}} = A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_{\nu}}$. Alors

$$A = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^{\nu}} A_{\mathbf{i}}, \quad A_{\mathbf{i}} A_{\mathbf{j}} \subset A_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}.$$

De plus, si $x \in A_{\mathbf{i}}$ et $y \in A_{\mathbf{j}}$, l'égalité $xy = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$ (grâce à la base). Le raisonnement ci-dessus peut être repris mot pour mot, en donnant à \mathbb{Z}^{ν} un ordre lexicographique.

$\mathbb{O}(A) \otimes F$ s'injectant donc dans une algèbre intègre est aussi intègre. \square

REMARQUE. — Ceci améliore le résultat 2.5 de [E], et généralise partiellement [LS].

2. Éléments centraux dans $O_\ell(A)$

Dans [E], on a montré que l'algèbre $O_\ell(A)$ a une sous-algèbre centrale isomorphe à $O_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Q}} B_\ell$. Construisons d'autres éléments centraux dans cette algèbre.

Pour tout poids positif Λ , notons $\mathbb{L}(\Lambda)$ le \mathbb{U} -module simple de plus haut poids Λ ; le \mathbb{U} -module dual à $\mathbb{L}(\Lambda)$ est isomorphe à $\mathbb{L}(-w_0\Lambda)$ (cf. [L], [R]). On sait (cf. [E, rem. 2.4.1]) que si v est un vecteur de plus haut poids de $\mathbb{L}(\Lambda)$, alors $L(\Lambda) = U^{\leq 0}v$ est une \mathcal{A} -forme de $\mathbb{L}(\Lambda)$. Soient $\varpi_1, \dots, \varpi_n$ les poids fondamentaux et v_{ϖ_i} (resp. $v_{w_0\varpi_i}$) un vecteur de plus haut (resp. bas) poids dans $\mathbb{L}(\varpi_i)$. Soit v_Λ le vecteur de plus haut poids dans $\mathbb{L}(\Lambda)$ déduit du choix des v_{ϖ_i} . Fixons la normalisation du vecteur $\ell_{-w_0\Lambda}$ (notations de [S]).

Nous allons mettre en évidence ci-dessous une suite d'entiers $n(i)$, dépendant linéairement de Λ (pour une décomposition de w_0 fixée), telle que $F_{i_1}^{(n(1))} \dots F_{i_\nu}^{(n(\nu))} v_\Lambda$ est de plus bas poids dans $\mathbb{L}(\Lambda)$. Soit alors ℓ_Λ la forme linéaire sur $\mathbb{L}(\Lambda)$ de poids $-w_0\Lambda$, valant 1 en ce vecteur. Soit $L'(\Lambda)$ le sous-module de $\mathbb{L}(\Lambda)^*$ égal à $U^{\leq 0}\ell_{-w_0\Lambda}$. L'accouplement entre $\mathbb{L}(\Lambda)$ et $\mathbb{L}(\Lambda)^*$ se restreint en un accouplement entre $L(\Lambda)$ et $L(-w_0\Lambda)$ à valeurs dans \mathcal{A} . Soit $b_\Lambda = \phi_{L(\Lambda)}(\ell_{-w_0\Lambda} \otimes v_\Lambda)$ (rappelons que pour tout U -module V , pour $\mu \otimes v \in V^* \otimes V$, $\phi_V(\mu \otimes v)$ désigne le coefficient de $\mu \otimes v$; si V est admissible, c'est un élément de $\mathcal{O} = U^* \cap \mathcal{O}$).

Nous choisissons des vecteurs $v_{-\varpi_i}$ dans $\mathbb{L}(-w_0\varpi_i)$. Toujours pour Λ positif, soit $v_{-\Lambda}$ le vecteur de $\mathbb{L}(-w_0\Lambda)$ compatible avec ces choix. Nous montrerons aussi que $E_{i_1}^{(n(1))} \dots E_{i_\nu}^{(n(\nu))} v_{-\Lambda}$ est de plus haut poids dans $\mathbb{L}(\Lambda)$. Soit encore $\ell_{w_0\Lambda}$ la forme linéaire de poids $w_0\Lambda$, valant 1 en $v_{-\Lambda}$. Nous posons $c_\Lambda = \phi_{L(-w_0\Lambda)}(\ell_{w_0\Lambda} \otimes v_{-\Lambda})$. (On remarque que c_Λ est proportionnel à $S(b_\Lambda)$.)

LEMME 2.1. — *Notons de la même façon les objets correspondants pour l'algèbre $U_{h\mathfrak{g}}$ (d'anneau de base $\mathbb{Q}[[h]]$) définie par Drinfel'd et Jimbo (cf. [Dr], [Ji]). Soient σ un poids positif quelconque, v_λ dans $L(\sigma)$, $\ell_{-\mu}$ dans $L(\sigma)^*$ des vecteurs de poids respectifs λ et μ . Dans $(U_{h\mathfrak{g}})^*$, on a :*

$$\begin{aligned} \phi_{L(\sigma)}(\ell_{-\mu} \otimes v_\lambda) \cdot b_\Lambda &= e^{-h(\lambda, \Lambda)/2 + h(w_0\Lambda, \mu)/2} b_\Lambda \cdot \phi_{L(\sigma)}(\ell_{-\mu} \otimes v_\lambda), \\ \phi_{L(\sigma)}(\ell_{-\mu} \otimes v_\lambda) \cdot c_\Lambda &= e^{-h(\lambda, \Lambda)/2 + h(w_0\Lambda, \mu)/2} c_\Lambda \cdot \phi_{L(\sigma)}(\ell_{-\mu} \otimes v_\lambda). \end{aligned}$$

Ces formules sont encore valables dans $O(A)$ (algèbre sur \mathcal{A}_0), et même dans \mathcal{O} , en remplaçant $e^{h/2}$ par v .

De plus, si Λ et Λ' sont deux poids positifs, on a

$$b_{\Lambda+\Lambda'} = v^{-\sum_{k=1}^{\nu} n(k)[(w_0\Lambda')_k + d_{i_k} n'(k)]} b_{\Lambda} b_{\Lambda'},$$

$$c_{\Lambda+\Lambda'} = v^{\sum_{k=1}^{\nu} n'(k)(\Lambda_k + d_{i_k} n'(k))} c_{\Lambda} c_{\Lambda'},$$

λ_k étant la k -ième composante du poids λ dans la base (ϖ_i) . Les b_{Λ} et $c_{\Lambda'}$ (Λ et Λ' parcourant les poids positifs) forment une famille commutative dans \mathcal{O} .

Preuve. — La première formule est une conséquence de la formule 3.3 de [S] (l'idéal $J_2(-w_0\Lambda, \Lambda)$ est nul). La seconde est une conséquence d'un énoncé similaire (où la relation d'ordre sur les poids est inversée). Les assertions finales de commutativité se déduisent de ces formules, ainsi que du fait que w_0 est une isométrie dans le réseau des poids.

Enfin, $\mathbb{L}_{\Lambda+\Lambda'}$ est un facteur direct de $\mathbb{L}_{\Lambda} \otimes \mathbb{L}_{\Lambda'}$, l'inclusion faisant correspondre à $v_{\Lambda+\Lambda'}$, $v_{\Lambda} \otimes v_{\Lambda'}$, les choix des v_{Λ} étant compatibles, et à $\ell_{\Lambda+\Lambda'}$ un multiple de $\ell_{\Lambda} \otimes \ell_{\Lambda'}$; on a donc la proportionnalité de $b_{\Lambda} b_{\Lambda'}$ et de $b_{\Lambda+\Lambda'}$. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, il suffit de remarquer que $b_{\Lambda}(F_{i_1}^{(n(1))} \dots F_{i_{\nu}}^{(n(\nu))}) = 1$, d'évaluer les deux membres en $F_{i_1}^{n(1)+n'(1)} \dots F_{i_{\nu}}^{n(\nu)+n'(\nu)}$, d'utiliser la linéarité de $n(i)$ en Λ (qui sera établie indépendamment ultérieurement) et la formule (a) de [L1]. Le cas de $c(\Lambda)$ se traite de même.

Montrons que ces formules sont encore valables dans $O_{\mathcal{A}_0}(A)$. Pour cela, il suffit de le montrer dans tous les $O_{\mathcal{A}_0} \otimes B_{\ell}$, où ℓ parcourt les entiers > 0 . L'algèbre $O_{\mathcal{A}_0}(A)$ étant une sous-algèbre divisible de $U_{\mathcal{A}_0}(A)^*$, $O_{\mathcal{A}_0} \otimes B_{\ell}$ s'injecte dans $U_{B_{\ell}}^*$. Rappelons l'existence de matrices R dans la catégorie des $U_{B_{\ell}}$ -modules admissibles, que l'on peut établir ainsi¹ : la matrice R est le produit de deux facteurs, le premier le produit sur les racines positives de la somme (*a priori* infinie) sur $N \geq 0$ de $[N]^! E_{\alpha}^{(N)} \otimes F_{\alpha}^{(N)}$, qui se réduit à la somme des termes avec $N \leq \ell$; le second s'écrit q^{t_0} ($q = v$), t_0 le produit scalaire sur l'algèbre de Cartan; il est traité par la décomposition en poids. Cette existence permet de reprendre les raisonnements de [S]. En effet, ces derniers n'utilisent que la forme prise par la matrice R sur un produit de représentations admissibles.

$\mathcal{O}(A)$ s'injecte dans $O(A)$; les égalités sont donc encore valables dans $\mathcal{O}(A)$. \square

Il s'ensuit :

¹ Cette observation de G. LUSZTIG m'a été communiquée par Y. SOIBELMAN.

COROLLAIRE 2.1. — *Pour tout poids positif Λ , pour tout entier k compris entre 0 et ℓ , $b_\Lambda^k c_\Lambda^{\ell-k}$ est dans le centre de $O(A) \otimes B_\ell$. \square*

3. Décomposition des éléments centraux

Nous examinons maintenant l'image par l'application Σ définie dans la section 1 des éléments centraux trouvés dans la section 2. Pour cela, nous considérons d'abord le cas classique. Soient $b = b_\varpi$, $c = c_\varpi$ où ϖ est le poids fondamental de \mathfrak{sl}_2 et b_k, c_k leurs images à la k -ième place de $[O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2)]^{\otimes_{\mathbb{Q}} \nu}$.

PROPOSITION 3.1. — *L'image par $\Sigma_{\mathbb{Q}} : O_{\mathbb{Q}}(A) \rightarrow [O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2)]^{\otimes_{\mathbb{Q}} \nu}$ de b_Λ (resp. c_Λ) est de la forme*

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} (b_k)^{n(k)} \quad \left(\text{resp. } \bigotimes_{k=1}^{\nu} (c_k)^{n'(k)} \right)$$

pour des entiers ≥ 0 $n(k), n'(k)$. (On a écrit b_Λ pour $b_\Lambda \otimes_{\mathbb{Q}} 1$, etc.)

Preuve. — On sait que $U_{\mathbb{A}_0}^{\leq 0} v \otimes_{\mathbb{A}_0} \mathbb{Q}$ (v un vecteur de plus haut poids de $\mathbb{L}(\Lambda)$) est isomorphe au module simple de plus haut poids Λ sur $\bar{U}_{\mathbb{Q}}$.

Commençons par supposer inconnues les normalisations de la section 2, et les b_Λ définis comme des coefficients de vecteurs v_Λ et $\ell_{-w_0}\Lambda$ supposés non nuls par la spécialisation à \mathbb{Q} .

Soit K une clôture algébrique de \mathbb{Q} . Le morphisme

$$\sigma : \mathrm{SL}_2(K)^\nu \longrightarrow G(K)$$

se restreint en une application entre les grandes cellules

$$(\dot{X}_{\mathfrak{sl}_2}(w_0))^\nu \longrightarrow \dot{X}(w_0).$$

(Dans cette preuve, on s'autorise à noter de la même façon les objets sur $\mathbb{Q}[v, v^{-1}]$ et leur spécialisation à \mathbb{Q} ou à K car on ne travaillera qu'avec ces derniers.)

Soit g un point de $\dot{X}(w_0)$. On a $b_\Lambda(g) = \langle \ell_{-w_0}\Lambda, g \cdot v_\Lambda \rangle$. Écrivons $g = b \cdot w_0 \cdot b'$, avec $b, b' \in B$. Pour tout poids λ , soit χ_λ le caractère de B induit par λ . Alors $b_\Lambda(g) = \chi_\Lambda(b') \chi_{-w_0\Lambda}(b) \langle \ell_{-w_0}\Lambda, w_0 v_\Lambda \rangle$.

Supposons $\langle \ell_{-w_0}\Lambda, w_0 v_\Lambda \rangle$ nul. Par densité, b_Λ serait nul sur $G(K)$ et donc nul, ce qui est impossible pour un coefficient non trivial de

représentation simple. Par conséquent, $\langle \ell_{-w_0\Lambda}, w_0v_\Lambda \rangle$ n'est pas nul, et la fonction $b_\Lambda(g)$ n'est nulle en aucun point de $\dot{X}(w_0)$.

Donc, $b_\Lambda \circ \sigma$ n'est nul en aucun point de $(\dot{X}_{\text{sl}_2}(w_0))^\nu$. De plus, la variété $\dot{X}_{\text{sl}_2}(w_0)$ est isomorphe au produit d'un tore par deux droites affines, par $\rho : K[t^\pm, \alpha, \beta] \rightarrow K[\text{SL}_2]_b, \alpha \mapsto a, t \mapsto b, \beta \mapsto -db^{-1}$. Une fonction algébrique sur $(K^\times)^\nu \times K^{2\nu}$ ne s'annulant en aucun point est nécessairement de la forme $C^{\text{te}} \times t_1^{n_1} \dots t_\nu^{n_\nu}$ (les t_i étant les coordonnées sur le tore) où les n_i sont entiers, K étant algébriquement clos.

Par la forme explicite de l'isomorphisme ρ , nous obtenons que l'image de b_Λ par la composition $\iota \circ \Sigma : K[G] \rightarrow K[(\text{SL}_2)^\nu] \rightarrow K[\dot{X}_{\text{sl}_2}(w_0)^\nu]$ est de la forme $c \cdot b_1^{n_1} \otimes \dots \otimes b_\nu^{n_\nu}$, où $c \in K^\times$ (car $b_\Lambda \neq 0$ et par injectivité de Σ), où les n_i sont entiers.

Ceci entraîne que $f_{i_1}^{(n(1))} \dots f_{i_\nu}^{(n(\nu))} v_\Lambda$ n'est pas nul, et (en relevant v_Λ à $U_{\mathcal{A}_0}^{\leq 0} v$, avec v un vecteur de plus haut poids de $\mathbb{L}(\Lambda)$) l'assertion admise à la section 2 :

$$F_{i_1}^{(n(1))} \dots F_{i_\nu}^{(n(\nu))} v_\Lambda \text{ n'est pas nul.}$$

Ceci justifie les normalisations de la section 2; calculons alors c . La valeur de la première fonction sur $f_{i_1}^{(n(1))} \dots f_{i_\nu}^{(n(\nu))}$ doit coïncider avec celle de la seconde sur $f^{(n(1))} \otimes \dots \otimes f^{(n(\nu))}$; on obtient $c = 1$.

Le cas de c_Λ se traite de façon analogue, en utilisant la « grande cellule opposée » $\dot{Y}(w_0)$. \square

Les entiers $n(k), n'(k)$ se calculent explicitement :

PROPOSITION 3.2. — *Pour tous Λ et k , on a $n(k) = n'(k)$; ces nombres sont déterminés par la relation $n(\nu) = \Lambda_{i_\nu}$ et la récurrence*

$$n(k) = \Lambda_{i_k} - \sum_{j=k+1}^{\nu} d_{i_k} a_{i_k i_j} n(j).$$

Posons $\beta_{st} = d_{i_s} a_{i_s i_t}$ et soit α la matrice $\nu \times \nu$ triangulaire strictement supérieure définie par $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ si $i < j$. Soit $\Lambda(k) = \Lambda_{i_k}$. Alors :

$$(n(s))_{1 \leq s \leq \nu} = (1 - \alpha)^{-1} (\Lambda(t))_{1 \leq t \leq \nu}.$$

Preuve. — Les fonctions sur $(\bar{U}_{\mathbb{Q}}(\text{sl}_2))^\nu$ définies par

$$(x_i)_{i=1}^\nu \mapsto \langle \ell_{-w_0\Lambda}, \sigma_{i_1}(x_1) \dots \sigma_{i_\nu}(x_\nu) \rangle$$

et $b^{n(1)}(x_1) \dots b^{n(\nu)}(x_\nu)$ sont proportionnelles. On en déduit d'abord, par examen de l'action à droite de $\bar{U}_{\mathbb{Q}}^0$ sur le dernier facteur, que $n(\nu) = \Lambda_{i_\nu}$.

Remplaçons x_{i_ν} par $F^{n(\nu)}$ dans la formule, et étudions la dépendance de l'expression obtenue pour l'action à droite de $\bar{U}_{\mathbb{Q}}^0$ sur le dernier facteur, qui est maintenant $x_{i_{\nu-1}}$. La formule s'établit de proche en proche. Le raisonnement est le même pour c_Λ (on peut aussi utiliser S). La formule finale vient du calcul intermédiaire

$$n(s) = \Lambda(s) + \sum_{s < t \leq \nu} \alpha_{st} \Lambda(t) + \sum_{s < t < u \leq \nu} \alpha_{st} \alpha_{tu} \Lambda(u) + \dots \quad \square$$

Ceci démontre la dépendance linéaire de $n(i)$ en Λ , annoncée à la section 2.

REMARQUE. — Des décompositions particulièrement simples de w_0 sont obtenues dans [L3]; décrivons ces résultats. Il existe une unique partition $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ de l'ensemble Δ des sommets du diagramme de Dynkin de A , telle que deux sommets de la même partie ne sont pas reliés par une arête du diagramme. Soient :

$$w' = \prod_{i \in \Delta'} s_i, \quad w'' = \prod_{i \in \Delta''} s_i.$$

Alors $w'w''$ est un élément de Coxeter; son ordre h est le nombre de Coxeter. Si h est pair, w_0 s'écrit $(w'w'')^{h/2}$; si h est impair, w_0 s'écrit $(w'w'')^{(h-1)/2}w'$. Ces décompositions sont en tous cas de longueur ν .

L'expression de β est (dans le cas où h est pair) le produit tensoriel de la matrice de Cartan

$$\begin{pmatrix} D' & \kappa \\ {}^t\kappa & D'' \end{pmatrix}$$

dans la base (i'_k, i''_ℓ) (D' et D'' sont diagonales, κ est à coefficients ≤ 0) par la matrice $h \times h$ où tous les coefficients valent 1. Par ailleurs, l'action à gauche de $\bar{U}_{\mathbb{Q}}^0$ sur b_Λ est de poids $-w_0\Lambda$. Les premiers coefficients $n(k)$ (pour $1 \leq k \leq [\frac{1}{2}n]$) sont donc les coefficients de $-w_0\Lambda$. On obtient donc une expression de l'action de w_0 sur le réseau des poids, purement en termes de la matrice de Cartan. \square

Nous en tirons les conséquences suivantes :

COROLLAIRE 3.1. — *L'énoncé de la proposition 3.1 est encore valable si on considère que ses termes sont à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) = \bar{U}_{\mathbb{Z}}^0$, ou dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes \mathbb{F}_p$ (qui est égal à $\bar{U}_{\mathbb{F}_p}^0$ sous les conditions de [E, prop. 4.1.1] : A n'a pas de composante de type B, C, F_4 si $p = 2$, et pas non plus de composante G_2 si $p = 3$).*

L'image par

$$\Sigma : O_{A_0}(A) \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{\nu} (O_{A_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k))$$

de b_Λ est égale à $\bigotimes_{i=1}^{\nu} (b_i)^{n(i)}$, plus éventuellement un multiple de $(\nu - 1)$. On a le même énoncé pour les algèbres \widehat{O}_ℓ (complétion de l'algèbre des coefficients admissibles de U_{B_ℓ}), $\widehat{O}_\ell (= \widehat{O}_\ell \otimes B_\ell = O_{A_0} \widehat{\otimes} \widehat{B}_\ell$, dernière égalité sous les hypothèses de [E, prop. 4.1.1]) et \widehat{O} (complétion $(\nu - 1)$ -adique de O_{A_0}); et avec des c à la place de b .

Preuve. — Le premier point vient de ce que tous les termes de l'énoncé de la PROPOSITION 3.1 sont dans les sous-algèbres de Hopf $O_{\mathbb{Z}}$. Le second s'en déduit par changement de base $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$.

Le troisième point se déduit de la PROPOSITION 3.1 par le changement de base $A_0 \rightarrow \mathbb{Q}$; le quatrième du deuxième par $B_\ell \rightarrow \mathbb{F}_p$; le cinquième suit du quatrième, et le dernier est une conséquence du troisième. \square

Enfin, nous allons montrer que le morphisme de Lusztig-Frobenius permet de préciser la partie quantique de ce corollaire. Rappelons (voir [L1], [E]) que ce morphisme, noté ici F , envoie injectivement $O_{\mathbb{Q}}(A)$ dans le centre de $O_\ell(A)$.

PROPOSITION 3.3.

(i) Soit B_Λ l'élément de $O_{\mathbb{Q}}(A)$ associé à Λ ; alors $F(B_\Lambda)$ est proportionnel à $(b_\Lambda)^\ell$.

(ii) L'application Σ entre algèbres O_ℓ pour A et \mathfrak{sl}_2 envoie b_Λ exactement en $\bigotimes_{i=1}^{\nu} (b_i)^{n(i)}$; on a les mêmes relations pour les algèbres \widehat{O}_ℓ et \widehat{O} ; ℓ est une puissance première pour laquelle le morphisme de Lusztig-Frobenius est définie (i.e. p est premier aux coefficients de la matrice de Cartan). Dans ces conditions, $F(B_\Lambda)$ est égal à $(b_\Lambda)^\ell$.

(iii) On a la même relation pour le morphisme Σ entre algèbres O_{A_0} .

Démonstration

(i) Rappelons que si $L(\Lambda)$, $\bar{L}(\Lambda)$ sont respectivement les U_{B_ℓ} et $\bar{U}_{\mathbb{Q}} \otimes B_\ell$ -modules simples de plus haut poids Λ , le sous-module $U_{B_\ell} v_\Lambda^{\otimes \ell}$ de $L(\Lambda)^{\otimes \ell}$ se projette sur $F^*(\bar{L}(\Lambda))$, en associant \bar{v}_Λ à $v_\Lambda^{\otimes \ell}$. La proportionnalité annoncée est équivalente à celle des fonctions sur U_{B_ℓ}

$$x \mapsto \langle \ell_{-w_0\Lambda}^{\otimes \ell}, x(v_\Lambda)^{\otimes \ell} \rangle \quad \text{et} \quad x \mapsto \langle \bar{\ell}_{-w_0\Lambda}, F(x)(\bar{v}_\Lambda) \rangle,$$

ce qui revient à la proportionnalité des formes sur $U_{B_\ell} v_\Lambda^{\otimes \ell}$ définies

par $\ell_{-w_0\Lambda}^{\otimes \ell}$ et $\bar{\ell}_{-w_0\Lambda}$. Toutes deux sont des éléments (non nuls : par injectivité de $[F^* \bar{L}(\Lambda)]^* \rightarrow (U_{B_\ell} v_\Lambda^{\otimes \ell})$ d'une part, et par la non nullité de $(b_\Lambda)^\ell$ due à l'intégrité de O_ℓ , de l'autre) du dual de $U_{B_\ell} v_\Lambda^{\otimes \ell}$, de poids $-\ell w_0\Lambda$; enfin la multiplicité de $-\ell w_0\Lambda$ dans $(U_{B_\ell} v_\Lambda^{\otimes \ell})^*$ est majorée par celle du même poids dans le recouvrement $(L(\Lambda)^{\otimes \ell})^*$, qui vaut 1. Posons $F(B_\Lambda) = \kappa(b_\Lambda)^\ell$, $\kappa \in B_\ell^\times$. On remarque que dans le cas \mathfrak{sl}_2 , on a $\kappa = 1$, comme le montre l'évaluation en $E^{(\ell\lambda)}$ (où $\Lambda = \lambda\varpi$).

(ii) Remarquons maintenant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 O_\ell(A) & \xrightarrow{\Sigma} & \bigotimes_{k=1}^{\nu} O_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k) \\
 F \uparrow & & \uparrow \bigotimes_{k=1}^{\nu} F_{i_k} \\
 O_{\mathbb{Q}}(A) & \xrightarrow{\Sigma} & O_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}.
 \end{array}$$

commute (par inspection du diagramme dual avec les algèbres enveloppantes). Posons $a = \bigotimes_{i=1}^{\nu} b_i^{n(i)}$ et $f = \Sigma(b_\Lambda)$. L'image de $B_\Lambda \in O_{\mathbb{Q}}(A)$ dans $\bigotimes_{k=1}^{\nu} O_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ est à la fois égale :

- à $F \circ \Sigma(B_\Lambda) = F^{\otimes \nu}(\bigotimes_{i=1}^{\nu} B_i^{n(i)})$ (d'après le résultat du COROLLAIRE 3.1 sur \mathbb{Q})
- à $(\bigotimes_{i=1}^{\nu} b_i^{n(i)})^\ell$ d'après (i), soit a^ℓ ;
- à $\Sigma \circ F(B_\Lambda) = \kappa(\Sigma(b_\Lambda))^\ell = \kappa f^\ell$.

On a donc $a^\ell = \kappa f^\ell$, égalité dans $O_\ell(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}$.

Notons que la localisation $(\mathcal{A}_0)_{v-1} = \mathbb{Q}[v, v^{-1}]_{v-1}$ est une extension plate de $\mathbb{Z}[v]_{p, v-1}$. Il s'ensuit que si $O_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ est l'anneau des coefficients de représentations admissibles de $U(\mathfrak{sl}_2)_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}$, il est égal à $O_{\mathbb{Z}[v]_{p, v-1}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes (\mathcal{A}_0)_{v-1}$, et donc présenté de la façon habituelle, par le résultat de P. POLO [APW, app.]. Par ailleurs, le changement de base $(\mathcal{A}_0)_{v-1} \rightarrow B_\ell$ est défini par le fait de quotienter par (ϕ_ℓ) ; et $O_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ est une sous-algèbre divisible de $U(\mathfrak{sl}_2)_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}^*$. Il s'ensuit que $O_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes B_\ell$ s'injecte dans $O_\ell(\mathfrak{sl}_2)$. Comme B_ℓ est un corps, $\bigotimes_{k=1}^{\nu} (O_{(\mathcal{A}_0)_{v-1}}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes B_\ell)$ s'injecte encore dans $\bigotimes_{k=1}^{\nu} O_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$.

L'égalité $a^\ell = \kappa f^\ell$ a lieu dans cette sous-algèbre, présentée par les générateurs et relations usuels. Nous pouvons y définir, comme dans le COROLLAIRE 1.2, une graduation par \mathbb{Z}^ν . Soit alors $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^\nu$ le plus petit vecteur intervenant dans la décomposition de f ; le plus petit vecteur pour f^ν est $\nu \mathbf{k}$, par intégrité; l'examen de a montre que $\mathbf{k} = 0$. Il en est de même pour le plus grand vecteur. L'élément f fait donc partie de

la sous-algèbre commutative engendrée par les b_i et c_i . Cette algèbre est aussi intègre; donc $f = a \times$ (une racine ℓ -ième de κ). Pour voir que cette racine est égale à 1, il suffit d'égaliser les évaluations en $F_{i_1}^{(n(1))} \dots F_{i_\nu}^{(n(\nu))}$ de b_Λ , et en $F^{(n(1))} \otimes \dots \otimes F^{(n(\nu))}$ de $\Sigma(b_\Lambda)$. D'où le résultat, et l'égalité de $F(B_\Lambda)$ à $(b_\Lambda)^\ell$.

(iii) Considérons le morphisme d'algèbres

$$\otimes_1 : \bigotimes_{k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes_{\mathcal{A}_0} B_\ell$$

obtenu par changement de base. Son noyau est $\phi_\ell \cdot \bigotimes_{\mathcal{A}_0, k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. Son image est encore $\bigotimes_{B_\ell, k=1}^{\nu} (O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes_{\mathcal{A}_0} B_\ell)$. Comme B_ℓ est un corps, et que $O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes B_\ell$ s'injecte dans $O_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ (les deux espaces sont définis comme des algèbres de coefficients admissibles) cette image s'injecte dans $\bigotimes_{B_\ell, k=1}^{\nu} O_l(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. Les éléments de $\bigotimes_{\mathcal{A}_0, k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$, $\Sigma_{\mathcal{A}_0}(b_\Lambda)$ et $\bigotimes_{i=1}^{\nu} b_i^{n(i)}$ ont la même image dans ce dernier espace d'après (ii). Il s'ensuit que leur différence δ est un multiple de ϕ_ℓ . Soit alors x un élément quelconque de $\bigotimes_{\mathcal{A}_0, k=1}^{\nu} U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. L'élément $\delta(x)$ de \mathcal{A}_0 est multiple de tous les ϕ_p , pour tout nombre premier p assez grand (supérieur ou égal à 5 dans tous les cas). Comme le degré de ϕ_p augmente strictement avec p , $\delta(x)$ doit être nul. Il reste à montrer que cela implique que δ est nul.

L'anneau \mathcal{A}_0 étant intègre et principal, on peut utiliser le raisonnement de [E, 1.2] : soient V_k un $U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ -module, fini et sans torsion (donc libre) sur \mathcal{A}_0 , $\widetilde{\text{Coeff}}(U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k), V_k)$ l'algèbre de coefficients associée. On sait que pour tout V_k , l'application naturelle

$$\widetilde{\text{Coeff}}(U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k), V_k)^{\otimes \nu} \longrightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^{\nu} U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right)^*$$

est injective (généralisation de l'argument de *loc. cit.*); il en est donc de même des produits tensoriels d'injections

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} \widetilde{\text{Coeff}}(U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k), V_k) \longrightarrow \bigotimes_{k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k).$$

Finalement comme $\bigotimes_{\mathcal{A}_0, k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ est réunion des images de ces dernières injections, l'application

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \longrightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^{\nu} U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right)^*$$

est injective. \square

4. Action de $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$

En w_0 , la fibre du morphisme $\sigma : (\mathrm{SL}_2)^\nu \rightarrow G$ est de dimension $(\nu - n)$, comme on l'a vu dans la preuve de la PROPOSITION 1.1. Nous montrons d'abord que cela est encore vrai sur un voisinage de ce point dans $G(K)$ (avec K algébriquement clos). Il y a même des actions libres de $\mathbb{G}_m^{\nu-n}(K)$ ($\mathbb{G}_m(K)$ est le groupe multiplicatif sur K) sur $\mathrm{SL}_2(K)^\nu$ et un voisinage invariant de $(w'_0 T)^\nu$, sur lequel les orbites de cette action sont exactement les fibres de σ .

Le but de cette section est de montrer que la même situation existe au niveau quantique; nous devons alourdir un peu le formalisme pour établir ce résultat.

Soit donc, sur l'anneau de base $\mathbb{Q}(v)[t, t^{-1}]$, l'algèbre $\tilde{\mathbb{U}}(A)$ définie par les générateurs $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, \tilde{K}_i, \tilde{K}_i^{-1}, \tau_i, \tau_i^{-1}$ (pour $1 \leq i \leq n$), les relations définissant $\mathbb{U}(A)$ entre les $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, \tilde{K}_i, \tilde{K}_i^{-1}$ et les relations suivantes portant sur les $\tau_i^{\pm 1}$:

- (a) les $\tau_i^{\pm 1}$ commutent entre eux et aux $\tilde{K}_j^{\pm 1}$ pour tous i, j ;
- (b) $\tau_i \tau_i^{-1} = \tau_i^{-1} \tau_i = 1$ pour tous les i ;
- (c) $\tau_i \tilde{E}_j = t^{d_i a_{ij}} \tilde{E}_j \tau_i, \tau_i \tilde{F}_j = t^{-d_i a_{ij}} \tilde{F}_j \tau_i$ pour tous i, j .

(Formellement, on a $\tilde{K}_i = v^{H_i}$ et $\tau_i = t^{H_i}$.) Soit i l'application de $\mathbb{U}(A)$ dans $\tilde{\mathbb{U}}(A)$ envoyant les générateurs sur leurs homonymes tildés. L'application

$$\mathcal{A}'[t, t^{-1}][\tau'_i] \otimes_{\mathcal{A}'} \mathbb{U}(A) \longrightarrow \tilde{\mathbb{U}}(A),$$

définie par $P(\tau'_i) \otimes x \mapsto P(\tau_i) i(x)$, est un isomorphisme de \mathcal{A}' -modules; par un argument de produit croisé, i est une injection. On notera donc E_i pour \tilde{E}_i , etc. En ajoutant aux définitions usuelles de S et ϵ sur $\mathbb{U}(A)$ les relations $S(\tau_i) = \tau_i^{-1}, \epsilon(\tau_i) = 1$, on fait de $\tilde{\mathbb{U}}(A)$ une algèbre de Hopf, dont $\mathbb{U}(A)$ est une sous-algèbre de Hopf.

Soit V un $\mathbb{U}(A)$ -module admissible. Le $\mathcal{A}'[t, t^{-1}]$ -module $V[t, t^{-1}]$ a une structure de $\tilde{\mathbb{U}}(A)$ -module, en posant $\tau_i|_{V_{\mathbf{k}}} = t^{k_i}$. Si V et W sont deux $\mathbb{U}(A)$ -modules admissibles, les $\tilde{\mathbb{U}}(A)$ -modules $(V \otimes_{\mathcal{A}'} W)[t, t^{-1}]$ et $(V[t, t^{-1}]) \otimes_{\mathcal{A}'[t, t^{-1}]} (W[t, t^{-1}])$ sont isomorphes. Ceci permet de définir un morphisme d'algèbres $\mathbb{O}(A) \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}(A)^*$; ce morphisme est injectif.

Soit $\tilde{\sigma}_i : \tilde{\mathbb{U}}(\mathrm{sl}_2) \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}(A)$ l'extension de σ_i définie par $\tilde{\sigma}_i(\tau) = \tau_i$. Soit $\tilde{\Sigma}$ le morphisme

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathcal{A}'[t, t^{-1}] \tilde{\mathbb{U}}(\mathrm{sl}_2, i_k) \longrightarrow \tilde{\mathbb{U}}(A)$$

défini comme Σ . Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{O}(A) & \longrightarrow & \widetilde{\mathbb{U}}(A)^* \\
 \downarrow & & \downarrow \widetilde{\Sigma}^* \\
 \bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}_{\mathcal{A}'[t,t^{-1}]}(\mathfrak{sl}_2, i_k) & \longrightarrow & \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \widetilde{\mathbb{U}}_{\mathcal{A}'[t,t^{-1}]}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^*
 \end{array}$$

Nous allons définir $(\nu - n)$ actions de $\mathbb{G}_m(\mathcal{A}')$ sur $\bigotimes_{\mathcal{A}',k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ dont nous verrons qu'elles commutent.

Remarquons d'abord que tous les indices de 1 à n interviennent dans la décomposition de w_0 (quelle qu'elle soit). Pour chaque i entre 1 et n , définissons un segment associé à i comme étant la donnée de deux indices p et q compris entre 1 et ν tels que $i_p = i_q = i$ et $i_k \neq i$ si $p < k < q$. Si N_i est le nombre d'occurrences de i dans la décomposition de w_0 , $(N_i - 1)$ est le nombre de segments associés à i (car on a vu que N_i n'est jamais nul). Or ν est égal à $\sum_{1 \leq i \leq n} N_i$; le nombre de segments associés est donc $(\nu - n)$.

Pour tout entier α , soit λ_α l'automorphisme de $\widetilde{\mathbb{U}}(\mathfrak{sl}_2)$ défini par

$$\lambda_\alpha(E) = t^\alpha E, \quad \lambda_{-\alpha}(F) = t^{-\alpha} F, \quad \lambda_\alpha(K) = K, \quad \lambda_\alpha(\tau) = \tau.$$

Notons que $\tau_i \widetilde{\sigma}_j(x) \tau_i^{-1} = \widetilde{\sigma}_j(\lambda_{d_i a_{ij}}(x))$ pour x dans $\widetilde{\mathbb{U}}(\mathfrak{sl}_2)$.

Fixons un sommet i et un segment (p, q) associé à i . Soit alors δ_{pq} la transformation linéaire de $\bigotimes_{\mathcal{A}',k=1}^{\nu} \widetilde{\mathbb{U}}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ définie par :

$$\begin{aligned}
 \delta_{pq}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_\nu) \\
 = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \tau^{-1} \otimes \cdots \otimes \lambda_{d_i a_{i i_k}}(x_k) \otimes \cdots \otimes \tau x_q \otimes \cdots \otimes x_\nu
 \end{aligned}$$

(les termes x_i ne sont pas modifiés si $i < p$ ou $i > q$). Alors $\delta_{pq} \circ \widetilde{\Sigma} = \delta_{pq}$.

Soient alors L, R et λ'_α (avec α entier) les applications de $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2)$ dans $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2)[t, t^{-1}]$, définies par :

$$\begin{aligned}
 L(\phi_V(\mu \otimes v)) &= t^{-p(v)} \phi_V(\mu \otimes v), \\
 R(\phi_V(\mu \otimes v)) &= t^{-p(\mu)} \phi_V(\mu \otimes v), \\
 \lambda'_\alpha(\phi_V(\mu \otimes v)) &= t^{-\alpha(p(\mu)+p(v)/2)} \phi_V(\mu \otimes v),
 \end{aligned}$$

où v et μ sont supposés être des vecteurs de poids (et où $p(v), p(\mu)$ désignent leurs poids) dans une représentation V simple donnée. On

vérifie que L, R, λ'_α définissent des actions de $\mathbb{G}_m(\mathcal{A}')$ sur $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2)$, i.e. ce sont des homomorphismes d'algèbres, tels que $(1 \otimes \epsilon)L = \text{Id}_{\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2)}$, $(L \otimes 1)L = (1 \otimes \delta)L$, δ et ϵ les opérations de groupe algébrique de \mathbb{G}_m , et les mêmes conditions pour R et λ_α .

Définissons l'action δ'_{pq} de $\mathbb{G}_m(\mathcal{A}')$ sur $\bigotimes_{\mathcal{A}'_{k=1}}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ comme le produit des actions R à la p -ième place, L à la q -ième, $\lambda'_{d_i a_{ii_k}}$ à la k -ième (avec $p < k < q$) et triviale aux autres. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) & \longrightarrow & \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] \right]^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] & \longrightarrow & \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] \right]^* \end{array}$$

Considérons encore le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] & \longrightarrow & \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] \right]^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^* [t, t^{-1}] & \equiv & \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^* [t, t^{-1}] \end{array}$$

L'application de gauche est injective : $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ est réunion de sous-espaces de dimension finie, soit $\bigcup_{n \geq 0} F_n(k)$. On a alors

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) = \bigcup_{n \geq 0} \bigotimes_{k=1}^{\nu} F_n(k).$$

Chaque $F_n(k)$ s'injecte dans $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k)^*$; donc chaque $\bigotimes_{k=1}^{\nu} F_n(k)$ s'injecte dans $\bigotimes_{\mathcal{A}'_{k=1}}^{\nu} [\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k)]^*$ (car on peut construire dans $\mathbb{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ une base duale à une base donnée de $F_n(k)$). Par conséquent, $\bigotimes_{\mathcal{A}'_{k=1}}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ s'injecte lui aussi. On en déduit :

LEMME 4.1. — *Pour tout élément f de $\mathbb{O}(A)$, et pour tout segment (p, q) associé à un sommet, l'égalité*

$$\delta'_{pq} \circ \Sigma(f) = \Sigma(f) \otimes 1$$

a lieu dans $\bigotimes_{\mathcal{A}'_{k=1}}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}]$.

Démonstration. — L'image de f par $\delta_{pq} \circ \Sigma \circ i$ dans $(\bigotimes_{k=1}^{\nu} \widetilde{U}(\mathfrak{sl}_2, i_k))^*$ est égale à $\Sigma \circ i(f)$. Les images de ces éléments dans

$$\left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} U(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^* [t, t^{-1}]$$

sont donc égales. Ces éléments sont aussi les images des éléments décrits dans l'énoncé, par l'application évidente

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] \longrightarrow \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} U(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^* [t, t^{-1}].$$

L'injectivité de cette application permet de conclure. \square

Il résulte de cette injectivité que l'application

$$\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)[t, t^{-1}] \longrightarrow \left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} U(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^* [t, t^{-1}]$$

est aussi injective. Les actions δ_{pq} commutent dans les dernier espace (par commutativité des τ_i); il en est donc de même des actions δ'_{pq} . On en déduit une action de $\mathbb{G}_m^{\nu-n}(\mathcal{A}')$ sur $\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$.

On conclut :

PROPOSITION 4.1. — *L'image de $\mathbb{O}(A)$ par Σ est contenue dans*

$$\left[\bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k) \right]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}(\mathcal{A}')}.$$

Les actions L, R et λ'_α de $\mathbb{G}_m(\mathcal{A}')$ se restreignent en des actions de $\mathbb{G}_m(\mathcal{A}_0)$ sur $O(\mathfrak{sl}_2)$ (d'anneau de base \mathcal{A}_0) : en effet, tout élément de $O(\mathfrak{sl}_2)$ est somme de coefficients de représentations \mathcal{A}_0 -finies admissibles (i.e. dont l'extension aux \mathcal{A}' est somme directe de ses sous-espaces de poids) de $U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2)$. La définition pour $\mathbb{O}(A)$ s'adapte à $O(A)$ car toute telle représentation est somme directe de ses sous-espaces de poids : soit V une telle représentation. Si $\{c, c+1, \dots, d\}$ contient l'espace des poids de $U(\mathcal{A}')$ et si p est un poids fixé dans cet ensemble,

$$(-1)^{d+p} \begin{bmatrix} K; -c \\ p - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K; p - 1 \\ d + p \end{bmatrix}$$

appartient à $U_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2)$ (cf. [L1]) et agit comme projecteur sur l'espace de poids p . (Ce raisonnement vaut aussi sur $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.)

De plus, la localisation étant exacte à gauche, le produit tensoriel des injections de $O(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ dans $\mathbb{O}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ pour $k = 1, \dots, \nu$ est injectif.

Il résulte de ces deux remarques que :

PROPOSITION 4.2. — *L'image par Σ de $O(A)$ est contenue dans la sous-algèbre $[\bigotimes_{A_0 k=1}^\nu O(\mathfrak{sl}_2, i_k)]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}(A_0)}$.*

COROLLAIRE 4.1. — *Pour tout entier $\ell > 0$, le changement de base $A_0 \rightarrow B_\ell$ induit une action du groupe $\mathbb{G}_m^{\nu-n}(B_\ell)$ sur $\bigotimes_{B_\ell k=1}^\nu (O(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes B_\ell)$; l'image de $\Sigma \otimes 1$ est alors contenue dans la sous-algèbre des invariants. On a le même énoncé lorsque $\ell = p^\alpha$, où p est premier quelconque, avec les algèbres \widehat{O}_ℓ .*

La première assertion se déduit de la PROPOSITION 4.2 par changement de base; la seconde suit par complétion. \square

Par ailleurs, il résulte du fait remarqué ci-dessus que $\mathbb{G}_m^{\nu-n}(A)$ agit encore sur $\bigotimes_{A k=1}^\nu \mathcal{O}_A(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ (\mathcal{O}_A est l'espace des coefficients des U -modules V tels que $V \otimes A'$ soit admissible). Il s'ensuit, par changement de base, que $\mathbb{G}_m^{\nu-n}(B_\ell)$ agit sur $\bigotimes_{B_\ell k=1}^\nu (\mathcal{O}_A(\mathfrak{sl}_2, i_k) \otimes B_\ell)$ et, par densité, sur $\widehat{\bigotimes}_{B_\ell k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$.

La localisation étant exacte à gauche, $\widehat{\bigotimes}_{B_\ell k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ s'injecte dans $\widehat{\bigotimes}_{B_\ell k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$; il suit :

PROPOSITION 4.3. — *Pour p premier quelconque et $\ell = p^\alpha$, l'image par Σ de $\widehat{O}_\ell(A)$ est contenue dans $[\widehat{\bigotimes}_{B_\ell k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}(B_\ell)}$.*

5. Un module simple sur l'algèbre de coordonnées

Rappelons l'injection centrale $F : \widehat{O}_\mathbb{Z} \rightarrow \widehat{O}_\ell(A)$. Soient $I_{w_0 T}$ l'idéal premier associé à $w_0 T$; notation analogue pour la sous-variété $(w'_0 T')^\nu$ de SL_2^ν . Notons que Σ applique $I_{w_0 T}$ dans $I_{(w'_0 T')^\nu}$. Σ définit donc un morphisme d'algèbres de $\widehat{O}_\ell(A)/(F(I_{w_0 T}))$ dans

$$\widehat{\bigotimes}_{k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)/(F(I_{(w'_0 T')^\nu}))$$

(le second F pour $\bigotimes_{k=1}^\nu F_{i_k}$). L'idéal $I_{(w'_0 T')^\nu}$ est invariant sous $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$, ce qui permet de définir une action de ce groupe dans

$$\widehat{\bigotimes}_{k=1}^\nu \widehat{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)/(F(I_{(w'_0 T')^\nu})).$$

L'image du morphisme est contenue dans la sous-algèbre des invariants.

PROPOSITION 5.1. — *Le morphisme de $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)/(F(I_{w_0T}))$ vers*

$$\left[\widehat{\bigotimes}_{\widehat{B}_\ell, k=1}^\nu \widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)/(F(I_{(w'_0T')^\nu})) \right]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}}$$

induit par Σ est un isomorphisme.

Démonstration. — Les spécialisés à \mathbb{F}_p des deux termes sont respectivement $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(A)/(F(I_{w_0T}))$ et $[\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}/(F(I_{(w'_0T')^\nu}))]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}}$. Pour le premier terme, c'est clair; pour le second, nous utilisons encore [APW, app.]. Par changement de base, ce résultat implique que $O(\mathfrak{sl}_2)_{v-1}$ a la présentation habituelle sur $\mathbb{Q}[v, v^{-1}]_{v-1}$; d'où le même résultat pour $O(\mathfrak{sl}_2) \otimes B_\ell$, sur B_ℓ ; on sait (voir [E, 4.1]) que la complétion $(v-1)$ -adique de cet anneau est $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2)$. D'autre part, soit a, b, c, d les générateurs habituels de $O(\mathfrak{sl}_2) \otimes B_\ell$. Un élément de la forme $\sum \lambda_{ijk} a^i b^j c^k$ est dans $U_{\widehat{B}_\ell}^*$ si et seulement si les λ_{ijk} sont tous entiers (on le voit en évaluant cette expression avec des éléments de $U_{\widehat{B}_\ell}$, en ordonnant les puissances de b et c lexicographiquement). Cela prouve que la sous- \widehat{B}_ℓ -algèbre engendrée par a, b, c, d est dense dans $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2)$.

Le produit tensoriel $\widehat{\bigotimes}_{\widehat{B}_\ell, k=1}^\nu \widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ est la complétion d'un \widehat{B}_ℓ -module où l'action de $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$ est homogène, soit $A = \bigoplus_{\lambda \in X(\mathbb{G}_m^{\nu-n})} A^\lambda$; de plus les A^λ sont libres; $(F(I_{(w'_0T')^\nu}))$ est alors la complétion d'un sous-module homogène $B = \bigoplus_{\lambda \in X(\mathbb{G}_m^{\nu-n})} B^\lambda$. Les B^λ et les quotients A^λ/B^λ sont libres. Par conséquent

$$\left[\widehat{\bigotimes}_{\widehat{B}_\ell, k=1}^\nu \widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)/(F(I_{(w'_0T')^\nu})) \right]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}}$$

s'identifie à la complétion de A^0/B^0 . Par liberté des modules, on a :

$$(A^0/B^0) \otimes \mathbb{F}_p = (A^0 \otimes \mathbb{F}_p)/(B^0 \otimes \mathbb{F}_p).$$

La décomposition de $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(A)$ et de son idéal en $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$ -types permettent de conclure.

Par complétude $(v-1)$ -adique des deux termes, il suffit de vérifier l'énoncé analogue sur \mathbb{F}_p . Cela se traite comme l'identité des anneaux locaux établie dans la preuve de la PROPOSITION 1.1. \square

REMARQUE. — Le passage au quotient est essentiel pour ce résultat. Par exemple, dans la décomposition pour \mathfrak{sl}_3

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' \\ 0 & c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & b'' & 0 \\ c'' & d'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix},$$

l'action de \mathbb{G}_m est définie par :

$$\begin{aligned} a &\mapsto a \otimes t^{-1}, \quad b \mapsto b \otimes t, \quad c \mapsto c \otimes t^{-1}, \quad d \mapsto d \otimes t; \\ a' &\mapsto a', \quad b' \mapsto b' \otimes t^{-1}, \quad c' \mapsto c' \otimes t, \quad d' \mapsto d'; \\ a'' &\mapsto a'' \otimes t, \quad b'' \mapsto b'' \otimes t, \quad c'' \mapsto c'' \otimes t^{-1}, \quad d'' \mapsto d'' \otimes t^{-1}. \end{aligned}$$

La fonction db'' est alors \mathbb{G}_m -invariante; elle est égale à la fonction rationnelle

$$\frac{x_{32}x_{13}}{1 - x_{33}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})},$$

qui n'est pas définie par exemple en

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \lambda + 2\mu & 1 \end{pmatrix},$$

λ et μ étant deux scalaires arbitraires. On voit donc que le morphisme dominant $(\dot{X}(w_0))^\nu // \mathbb{G}_m^{\nu-n} \rightarrow \dot{X}(x_0)$ n'est pas surjectif. L'inclusion

$$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(A)_{\{b_\lambda\}} \longrightarrow [(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{sl}_2)_{b_\infty})^{\otimes \nu}]^{\mathbb{G}_m^{\nu-n}}$$

est donc stricte (de même que l'inclusion analogue sur \mathbb{Q}). \square

Évaluons donc le quotient

$$\mathcal{X} = \bigotimes_{k=1}^{\nu} \widehat{\mathcal{B}}_\ell \widehat{\mathcal{O}}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k) / F_{i_k}(I_{T'w'_0}).$$

Soit $\mathcal{M}'(s)$ la $\widehat{\mathcal{B}}_\ell[\tau, \tau^{-1}]$ -algèbre présentée par les générateurs a', b', c', d' et les relations

$$\begin{aligned} a'b' &= v^{d_s} b' a', & a'c' &= v^{d_s} c' a', & d'b' &= v^{-d_s} d' b', \\ d'c' &= v^{-d_s} d' c', & b'c' &= c' b', & a'd' &= 1 + v^{d_s} b' c', \\ d'a' &= 1 + v^{-d_s} b' c', & a^\ell &= d^\ell = 0, & b^\ell &= \tau, \quad c^\ell = -\tau^{-1}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{M}(s)$ la $\widehat{\mathcal{B}}_\ell[t, t^{-1}]$ -algèbre présentée par les générateurs a, b, d et les relations

$$\begin{aligned} ab &= v^{d_s} ba, & db &= v^{-d_s} db, & ad &= 1 + t^{-2} v^{d_s} b^2, \\ da &= 1 + v^{-d_s} t^{-2} b^2, & a^\ell &= d^\ell = 0, & b^\ell &= t^\ell. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}_\ell[\tau, \tau^{-1}]} \widehat{\mathcal{B}}_\ell[t, t^{-1}]$$

(morphisme donné par $\tau \mapsto t^\ell$) se décompose en une somme de ℓ^ν copies de $\widehat{\bigotimes}_{\mathcal{B}_\ell, k=1}^\nu \mathcal{M}(i_k)$. Les combinaisons des $b^k c^{\ell-k}$ forment le centre (de dimension ℓ^ν), noté ici Z' , de \mathcal{X}' ; les éléments centraux invariants de \mathcal{X}' sont exactement les fonctions des $b^k/\varpi_i, c^{\ell-k}/\varpi_i$. Ils forment une sous-algèbre de dimension ℓ^n du centre; d'autre part, l'action de $\mathbb{G}_m^{\nu-n}$ est homogène sur Z' , qui se décompose donc en $Z' = \bigoplus_{\lambda \in X(\mathbb{G}_m^{\nu-n})} Z'^\lambda$. La sous-algèbre des invariants, \mathcal{A}_{w_0T} , est donc incluse dans la sous-algèbre $Z'^0 \otimes_{Z'} \mathcal{X}'$, qui est une somme de ℓ^n copies de $\widehat{\bigotimes}_{k=1}^\nu \mathcal{M}(i_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$ (où T est le tore maximal de $G_{\mathbb{Z}}$).

Montrons que \mathcal{A}_{w_0T} est égale à cette somme : l'injection de \mathcal{A}_{w_0T} dans

$$\bigoplus_{\ell^n} \widehat{\bigotimes}_{k=1}^\nu \mathcal{M}(i_k) \otimes \mathbb{Z}[T]$$

induit un isomorphisme après tensorisation avec \mathbb{F}_p (on le voit en étudiant les anneaux locaux). Il s'ensuit que le quotient

$$\left[\bigoplus_{\ell^n} \widehat{\bigotimes}_{\widehat{\mathcal{B}}_\ell, k=1}^\nu \mathcal{M}(i_k) \right] / \mathcal{A}_{w_0T}$$

est de $\otimes \mathbb{F}_p$ nul. Le lemme de Nakayama implique alors qu'il est nul.

Remarquons que $\mathcal{M}(s) \otimes \widehat{\mathcal{B}}_\ell$ est isomorphe à $M_\ell(\widehat{\mathcal{B}}_\ell[t, t^{-1}])$, si d_s ne divise pas ℓ (ce qui est vérifié si ℓ est premier aux coefficients de la matrice de Cartan). En effet, on peut construire une représentation

$$\mathcal{M}(s) \otimes \widehat{\mathcal{B}}_\ell \longrightarrow \text{End}_{\widehat{\mathcal{B}}_\ell[t, t^{-1}]}(V),$$

où V est de dimension ℓ , de base $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ par :

$$\begin{aligned} b\epsilon_k &= tv^{[-(\ell-1)/2+k-1]d_s} \epsilon_k \\ a\epsilon_k &= \begin{cases} \epsilon_{k-1} & \text{si } k \neq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ d\epsilon_k &= \begin{cases} (1 - v^{2kd_s})\epsilon_{k+1} & \text{si } k < \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette application est inversible sous les hypothèses faites.

Il s'ensuit que $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)/(F(I_{w_0T}))$ est isomorphe à une somme de ℓ^n copies de $M_{\ell^\nu}(\widehat{\mathcal{B}}_\ell[T])$. En particulier, $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)/(F(I_{w_0}))$ est isomorphe à $\bigoplus_{\ell^n} M_{\ell^\nu}(\widehat{\mathcal{B}}_\ell)$.

Fixons une de ces algèbres $M_{\ell^\nu}(\widehat{B}_\ell)$; la représentation de dimension ℓ^ν (notée V) de $\widehat{O}_\ell(A)$ induite est irréductible. En effet, soit W une sous-représentation de V . L'idéal $(F(I_{w_0}))$ agit trivialement sur W ; par conséquent, W est donc une représentation de $\bigoplus_{\ell^n} M_{\ell^\nu}(\widehat{B}_\ell)$ et ne peut donc être propre.

Nous avons donc prouvé :

PROPOSITION 5.2. — *L'algèbre $\widehat{O}_\ell(A)$ a un quotient isomorphe à $M_{\ell^\nu}(\widehat{B}_\ell)$, et en particulier une représentation irréductible sur \widehat{B}_ℓ de dimension ℓ^ν .*

6. La sous-algèbre centrale \widetilde{Z}

Soit C_ℓ la \mathbb{Z} -algèbre commutative définie par les générateurs $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$ et les relations :

$$\alpha_i \alpha_j = \begin{cases} \alpha_0 \alpha_{i+j} & \text{si } i + j \leq \ell, \\ \alpha_\ell \alpha_{i+j-\ell} & \text{si } i + j > \ell. \end{cases}$$

Soit $\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2]$ l'algèbre polynomiale engendrée par les $2n$ variables x_i, y_i pour $1 \leq i \leq n$. Nous noterons $\mathbb{Z}[\widetilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]$ l'algèbre analogue avec $n = 1$. La raison de ces notations est que nous considérerons les carrés des tores de $G_{\mathbb{Z}}$ et de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Z}}$ (notés T et $T(\mathfrak{sl}_2)$) comme des ouverts de ces variétés.

Nous avons des morphismes d'algèbres $\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2] \rightarrow C_\ell^{\otimes n}$ et $\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A)$, définis par $x_i \mapsto \alpha_0(i), y_i \mapsto \alpha_\ell(i)$ et par $x_i \mapsto B_{\varpi_i}, y_i \mapsto C_{\varpi_i}$. Nous avons alors un morphisme central

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}_\ell \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(A),$$

défini par le morphisme de Frobenius, et par $\alpha_k(i) \mapsto b_{\varpi_i}^{\ell-k} c_{\varpi_i}^k$. (Ceci résulte de la PROPOSITION 3.3. Remarquons que cette construction est valable pour tout entier ℓ premier aux coefficients de la matrice de Cartan.) Alors :

PROPOSITION 6.1. — *Si ℓ est une puissance d'un nombre premier, ℓ est premier aux coefficients de A , ce morphisme est injectif.*

Démonstration. — Remarquons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2]} \mathcal{B}_\ell & \xrightarrow{1} & \mathcal{O}_\ell(A) \\ \downarrow 2 & & \downarrow \\ [\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{Z}[\widetilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]} \mathcal{B}_\ell]^{\otimes \nu} & \xrightarrow{3} & \bigotimes_{k=1}^{\nu} \mathcal{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k). \end{array}$$

Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}$ est injective, et que C_ℓ est un \mathbb{Z} -module libre sur $\mathbb{Z}[\tilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]$, de base $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}$; de même pour $C_\ell^{\otimes n}$ et $C_\ell^{\otimes \nu}$ sur $\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]$ et $\mathbb{Z}[\tilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]^{\otimes \nu}$ respectivement, avec les bases obtenues par tensorisation, on aura l'injectivité de la flèche 2 si on prouve l'injectivité de l'application de $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ vers $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\nu$ induite par l'application $\Lambda \mapsto n$ décrite dans la PROPOSITION 3.2. Cette application est la composée d'une renumérotation, qui reste injective modulo ℓ , et d'une application inversible (définie comme $(1 - \alpha)^{-1}$), qui a la même propriété. Ce qui prouve l'injectivité de la flèche 2.

Montrons maintenant l'injectivité de le flèche 3. En tensorisant par \mathbb{Q} (le terme de gauche est sans torsion), on est amené à montrer que la famille obtenue par produit tensoriel des $(a^k b^s c^t)_{k,s,t \geq 0} \cup (a^k b^s c^t)_{k > 0, s, t \geq 0}$ est libre dans $\bigotimes_{k=1}^\nu \mathcal{O}_\ell(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. Pour cela, on peut utiliser l'action de $\bigotimes_{k=1}^\nu U_{\mathcal{B}_\ell}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$ et la cunité.

On en déduit l'injectivité de la flèche 1. \square

Supposons maintenant ℓ puissance d'un nombre premier, ne divisant pas les coefficients de A . Comme

$$\bigcap_{n \geq 0} (v - 1)^n (\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}_\ell)$$

est nul, on peut définir une valuation sur $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}_\ell$, par

$$v(x) = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid x \in (v - 1)^n \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}_\ell\}, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si on pose $|x| = \ell^{-v(x)}$, on définit alors une norme d'algèbre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes \mathcal{B}_\ell$, qui a les propriétés

$$|x + y| \leq \sup(|x|, |y|), \quad |xy| = |x| \cdot |y|$$

(cette dernière, par l'intégrité de $[\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{F}_p[\tilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]} (C_\ell \otimes \mathbb{F}_p)]^{\otimes \nu}$, qui résulte de l'injection de cette algèbre dans $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes \nu}$).

Notons alors $\tilde{\mathcal{Z}}$ la complétion de cette algèbre. L'injection de celle-ci dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes \mathcal{B}_\ell$ est une isométrie, car sa spécialisée à \mathbb{F}_p est injective. Il s'ensuit que cette injection induit une injection isométrique de $\tilde{\mathcal{Z}}$ dans $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)$.

Par ailleurs, définissons $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$; c'est encore une algèbre munie d'une valuation, s'injectant isométriquement dans $\widehat{\mathcal{O}}_\ell(A)$.

7. Clôture intégrale de \tilde{Z}

Soient ℓ un entier ≥ 1 arbitraire et k une extension quelconque de B_ℓ , soit \tilde{A} l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]} C_\ell^{\otimes n} \otimes k$; nous montrons sa normalité. Remarquons que le critère de Serre ne s'applique pas directement dans cette situation; il n'est pas clair que cette algèbre soit une intersection complète, vu le grand nombre d'équations requis pour la définir comme quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes \mathbb{Z}[(\mathbb{A}^{\ell-1})^n] \otimes k$ (où $(\mathbb{A}^{\ell-1})^n$ dénote l'espace affine défini par les $\alpha_s(i)$).

Notre premier outil sera la théorie de Galois. Montrons donc (dans cette section, on n'aura affaire qu'à des algèbres commutatives; $O_k(A) = O_{\mathbb{Q}}(A) \otimes k$, etc.) :

PROPOSITION 7.1.

(i) L'algèbre \tilde{A} est un module libre sur l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes k = O_k(A)$, de dimension ℓ^n ; une base en est

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \alpha'_{i(1)}(1) \cdots \alpha'_{i(n)}(n),$$

avec $\mathbf{i} = (i(1), \dots, i(n)) \in \{0, \dots, \ell-1\}^n$ (rappelons que $\alpha'_0 = 1$ et $\alpha'_i = \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, \ell-1$).

(ii) La formule

$$\gamma \cdot (\alpha'_{\mathbf{i}} f) = v^{(\gamma, \mathbf{i})} \alpha'_{\mathbf{i}} f$$

(pour $f \in O_k(A)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $(\gamma, \mathbf{i}) = \gamma_1 i_1 + \dots + \gamma_n i_n$ appartenant à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$) définit une opération du groupe $\Gamma = (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$ par automorphismes sur l'algèbre \tilde{A} ; pour tout caractère δ de Γ , l'espace propre associé est $\alpha'_{\mathbf{i}(\delta)} O_k(A)$, en désignant par $\mathbf{i}(\delta)$ l'unique représentant de δ dans $\{0, \dots, \ell-1\}^n$.

(iii) L'anneau \tilde{A} n'a pas de diviseurs de zéro; son corps de fractions $Q(\tilde{A})$ est une extension galoisienne de $Q(O_k(A))$, de groupe Γ et de degré ℓ^n .

Démonstration.

(i) Cela résulte de la liberté (déjà remarquée en 6) de C_ℓ sur $\mathbb{Z}[\tilde{T}(\mathfrak{sl}_2)^2]$.

(ii) On a une opération analogue de Γ sur $C_\ell^{\otimes \ell}$, laissant fixes les éléments de la sous-algèbre $\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]$; la formule donnée décrit alors le produit (sur $\mathbb{Z}[\tilde{T}^2]$) de cette action avec l'action triviale sur $O_k(A)$, d'où la première partie. La seconde assertion est une conséquence de (i).

(iii) Remarquons l'injection de \tilde{A} dans le produit tensoriel ν -uple des \tilde{A} correspondant au cas de sl_2 ; compte tenu de la \mathbb{Z}^ν -graduation donnée par le degré en les $a(i)$ ($= 1 \otimes \dots \otimes a \otimes \dots \otimes 1$ pour $i = 1, \dots, \nu$), on se ramène à l'intégrité de $C_\ell^\nu \otimes k$. Or, cette algèbre peut être identifiée au centre de l'algèbre de coordonnées de l'espace affine quantique de dimension 2ν défini par $k\langle x_i, y_i \rangle / (y_i x_i = v x_i y_i, y_j x_i = x_i y_j \text{ si } i \neq j)$; algèbre intègre car quasi-polynômiale. Ce qui prouve l'intégrité de $C_\ell^\nu \otimes k$.

Notons que les (α'_i) forment une famille génératrice de $Q(\tilde{A})$ sur $Q(O_k(A))$. En effet, toute fraction f/g de ce premier corps s'écrit :

$$\left(f \prod_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \gamma \cdot g \right) / \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot g \right) ;$$

le dénominateur est un élément Γ -invariant de \tilde{A} ; c'est donc un élément de $O_k(A)$ d'après (ii), deuxième partie.

D'autre part, l'action de Γ sur \tilde{A} se prolonge en une action sur $Q(\tilde{A})$, laissant fixe $Q(O_k(A))$. Comme les α'_i sont dans des espaces propres distincts pour cette action, ils forment une famille libre. L'extension $Q(O_k(A)) \rightarrow Q(\tilde{A})$ est donc de degré ℓ^n ; elle est galoisienne par la décomposition de $Q(\tilde{A})$ en somme directe de ses sous- $Q(O_k(A))$ -espaces vectoriels $Q(O_k(A))\alpha'_i$. \square

Passons à la preuve de la normalité. Il suffit de montrer que la clôture intégrale de $O_k(A)$ dans \tilde{A} est égale à \tilde{A} . Soit donc $h = f/g \in Q(\tilde{A})$ entier sur $O_k(A)$. Tous les transformés $\gamma \cdot h$ (où $\gamma \in \Gamma$) vérifient la même équation de dépendance intégrale ; pour tout $\delta \in \hat{\Gamma}$,

$$h_\delta = \frac{1}{\ell^n} \sum_{\gamma \in \Gamma} v^{(\gamma, \delta)} \gamma \cdot h$$

est donc entier sur $O_k(A)$ (cet anneau contenant \mathbb{Q}). Il satisfait donc une équation $h_\delta^s + a_1 h_\delta^{s-1} + \dots + a_s = 0$ avec $a_i \in O_k(A)$. Posons $h_\delta = \alpha'_{i(\delta)} h'$, $h' \in Q(O_k(A))$. Nous avons donc :

$$(\alpha'_{i(\delta)})^s (h')^s + a_1 (\alpha'_{i(\delta)})^{s-1} (h')^{s-1} + \dots + a_s = 0.$$

Soit r un entier ≥ 0 tel que $s + r$ soit un multiple de l'ordre de δ , soit t ord δ . En multipliant la dernière équation par h'' et en ne conservant que les termes Γ -invariants, on obtient, en posant $h'' = (\alpha'_{i(\delta)})^{\text{ord } \delta} (h')^{\text{ord } \delta}$:

$$(h'')^t + a_{\text{ord } \delta} (h'')^{t-1} + \dots = 1.$$

Remarquons que h'' appartient à $Q(O_k(A))$. Il s'ensuit, par normalité de $O_k(A)$, que $h'' \in O_k(A)$.

Explicitons $(\alpha'_{i(\delta)})^{\text{ord } \delta}$; posons $\lambda_s = \text{ord } \delta_s$. Alors $\text{ord } \delta$ est égal à $\text{ppcm}(\lambda_s)$; remarquons, dans C_ℓ , l'identité $\alpha_i^{\text{ord } i} = \alpha_0^{\text{ord } i(1-i/\ell)} \alpha_\ell^{\text{ord } ii/\ell}$. Il s'ensuit que $(\alpha'_{i(\delta)})^{\text{ord } \delta} = \prod'_{j=1}^n b_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta(1-i_j/\ell)} c_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta i_j/\ell}$, où le signe \prod' sous-entend qu'on n'inclut le terme correspondant au poids j que si $i_j \neq 0$.

Soit K une clôture algébrique de k . Comme on a vu que h'' appartient à $O_k(A)$, on a

$$(6) \quad \prod'_{j=1}^n b_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta(1-i_j/\ell)} c_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta i_j/\ell} (h'')^{\text{ord } \delta} \in O_k(A) \otimes K = O_K(A)$$

où h' est considéré comme un élément de $Q(O_K(A))$ (puisque $O_K(A)$ est intègre). Si on prouve que cela entraîne $h' \in O_K(A)$, on aura aussi $h' \in O_k(A)$; car posant $h' = f'/g'$, $f', g' \in O_k(A)$, on aura $f' = tg'$, $t \in O_k(A) \otimes K$. En fait $t \in O_k(A) \otimes L$, $L \subset K$ une extension finie de k ; le choix d'une base de L sur k permet de conclure. Montrons donc que $h' = f'/g' \in O_K(A)$.

Comme K est algébriquement clos, les idéaux maximaux de $O_K(A)$ sont en bijection avec ses morphismes d'algèbre vers K ; ce sont les éléments de $G(K)$. L'égalité (6) a pour conséquence :

LEMME 7.1. — *Il existe un sous-ensemble algébrique F de $G(K)$, de codimension ≥ 2 , tel que pour tout g dans $G(K) - F$ on a, dans l'anneau local de $O_K(A)$ en \mathfrak{m}_g (l'idéal maximal associé à g) g' divise f' .*

Démonstration. — Montrons d'abord que le sous-ensemble de $G(K)$ défini par les équations $b_i = 0$ et $b_j \neq 0$ si $j \neq i$ contient la cellule de Schubert ouverte $\dot{X}(w_0 w_i) = B(w_0 w_i)B$. Soit $g = b(w_0 w_i)b'$ un élément de cette cellule. Alors

$$b_j(g) = \langle \ell_{-w_0 \varpi_j}, b(w_0 w_i)b'v_{\varpi_j} \rangle = \chi_{-w_0 \varpi_j}(b) \chi_{\varpi_j}(b') \langle \ell_{-w_0 \varpi_j}, w_0 w_i v_{\varpi_j} \rangle$$

est nul si et seulement si $\langle \ell_{-w_0 \varpi_j}, w_0 w_i v_{\varpi_j} \rangle$ l'est; remarquons que d'après [B1, p. 168], (15), $w_i v_{\varpi_j}$ est un vecteur de poids $\varpi_j - \delta_{ij} \alpha_i$. Si $j \neq i$, $w_0 w_i v_{\varpi_j}$ est de poids $w_0 \varpi_j$ et son accouplement avec $\ell_{-w_0 \varpi_j}$ ne sera pas nul; sinon ce vecteur sera de poids différent, et $\langle \ell_{-w_0 \varpi_j}, w_0 w_i v_{\varpi_j} \rangle$ sera nul.

Nous pouvons donc préciser par une égalité le résultat de la section 3 :

$$\dot{X}(w_0) \subset \{g \in G(K) \mid b_i(g) \neq 0, \forall i\}.$$

En effet, cela entraîne

$$G(K) - \dot{X}(w_0) \supset \bigcup_{i=1}^n \{g \in G(K) \mid b_i(g) = 0\}.$$

Comme, d'après ce qu'on a vu, l'adhérence $X(w_0w_i)$ de chaque $\dot{X}(w_0w_i)$ est incluse dans $\{g \in G(K) \mid b_i(g) = 0\}$ et que

$$G(K) - \dot{X}(w_0) = \bigcup_{i=1}^n X(w_0w_i),$$

on a

$$\bigcup_{i=1}^n X(w_0w_i) = \bigcup_{i=1}^n \{g \in G(K) \mid b_i(g) = 0\}.$$

Considérons, dans ce dernier ensemble, la réunion des $X(w_0w_j)$ pour $j \neq i$. Par ce qui précède, elle est incluse dans

$$\bigcup_{j \neq i} \{g \in G(K) \mid b_j(g) = 0\}.$$

Donc

$$X(w_0w_i) - \bigcup_{j \neq i} X(w_0w_j) \supset \{g \in G(K) \mid b_i(g) = 0, b_j(g) \neq 0\}.$$

Comme $X(w_0w_i) - \bigcup_{j \neq i} X(w_0w_j) = \dot{X}(w_0w_i)$, et par double inclusion,

$$\dot{X}(w_0w_i) = \{g \in G(K) \mid b_i(g) = 0, b_j(g) \neq 0\}.$$

Notons que $\dot{X}(w_0w_i)$ est lisse et localement définie par l'équation $b_i = 0$; si $g \in \dot{X}(w_0w_i)$, cela implique $b_i \in \mathfrak{m}_g - \mathfrak{m}_g^2$.

Remarquons enfin que pour tous i, j , l'intersection $\dot{X}(w_0w_i) \cap \dot{Y}(w_0w_j)$ (rappelons qu'on a défini $\dot{Y}(w)$ comme $w_0\dot{X}(w)w_0$) est contenue dans une sous-variété de $G(K)$ de codimension ≥ 2 . En effet, $\dot{X}(w_0w_i)$ et $\dot{Y}(w_0w_j)$ sont des variétés irréductibles, car isomorphes à un produit de n groupes multiplicatifs et $(\nu - 1)$ groupes additifs; dans le cas contraire, l'intersection serait dense dans chacun des termes, et on aurait $X(w_0w_i) = Y(w_0w_j)$. C'est absurde si $i \neq j$, car les deux ensembles ne contiennent pas les mêmes représentants de groupe de Weyl; ce l'est encore si $i = j$, comme le montre une analyse locale en w_0w_i .

Soit donc F la réunion des $X(w)$, $Y(w)$, pour $w \neq w_0, w_0w_i$, et des $X(w_0w_i) \cap Y(w_0w_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$; elle est de codimension ≥ 2 . Soit g un point de $G(K) - F$. Deux possibilités se présentent :

- $g \in \dot{X}(w_0) \cup \dot{Y}(w_0)$; les éléments b_{ϖ_k} et c_{ϖ_k} sont tous inversibles dans l'anneau local associé à g ; on a alors $(f'/g')^{\text{ord } \delta} \in O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$, et par normalité de cet anneau, g' y divise f' .

• $g \in G(K) - F - (\dot{X}(w_0) \cup \dot{Y}(w_0))$; les b_{ω_k} et c_{ω_k} sont tous inversibles dans $O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$, sauf l'un d'entre eux, soit b_0 , appartenant à $\mathfrak{m}_g - \mathfrak{m}_g^2$. Nous avons donc $b_0^{\text{ord } \delta(1-i/\ell)}(h')^{\text{ord } \delta} \in O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$; multipliant par $b_0^{\text{ord } \delta(i/\ell)}$, et par normalité de $O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$, nous obtenons $b_0 h' \in O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$. Soit $F = b_0 h'$. Alors $b_0^{\text{ord } \delta(i/\ell)}$, et donc b_0 , divisent $F^{\text{ord } \delta}$. C'est encore le cas dans la complétion \mathfrak{m}_g -adique de l'anneau local; cette complétion est isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[\xi_1, \dots, \xi_d]]$, l'image de b_0 étant égale à ξ_1 . L'image de F dans ce complété (encore notée F) n'a pas de terme constant, comme on le voit en quotientant par \mathfrak{m}_g ; on l'écrit donc $\xi_1 Q(\xi_1, \dots, \xi_d) + R(\xi_2, \dots, \xi_d)$, où Q, R sont des séries formelles des variables indiquées; ξ_1 divise donc $R(\xi_2, \dots, \xi_d)^{\text{ord } \delta}$, ce qui implique que R est nul. Rappelons que nous avons à prouver que b_0 divise F , dans l'anneau local $L = O_K(A)_{\mathfrak{m}_g}$, et que nous savons que c'est le cas dans le complété \widehat{L} , i.e. $F\widehat{L} \subset b_0\widehat{L}$. Il reste donc à montrer que $b_0\widehat{L} \cap L = b_0L$. En vertu de [B2, § 3, n° 3, ex. 3, p. 67], L est un anneau de Zariski; nous pouvons donc appliquer *loc. cit.*, § 3, n° 5, cor. 1, p. 72, avec $F = fL$ et $E = L$. □

Nous en déduisons :

PROPOSITION 7.2. — $h' \in O_K(A)$.

Démonstration. — Nous reprenons l'argument de Serre, exposé par Grothendieck, cf. [EGA, th. 5.8.6, p. 108]. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de $O_K(A)$, de hauteur 1. Montrons que $(f'O_K(A))_{\mathfrak{p}} \subset (g'O_K(A))_{\mathfrak{p}}$. L'idéal \mathfrak{p} correspond à une sous-variété de $G(K)$, de codimension 1, qui ne peut donc être incluse dans F . Soit g un point du complémentaire de F dans $Z(\mathfrak{p})$ (l'ensemble des points de $G(K)$ où tous les éléments de \mathfrak{p} s'annulent, ou de façon équivalente celui des idéaux maximaux contenant \mathfrak{p}). On a $(f'O_K(A))_{\mathfrak{m}_g} \subset (g'O_K(A))_{\mathfrak{m}_g}$, par le LEMME 7.1, d'où l'inclusion annoncée.

Par ailleurs, $O_K(A)$ vérifie la condition (S_2) , on en déduit, comme dans *loc. cit.*, que tous les idéaux premiers associés de $O_K(A)/g'O_K(A)$ sont non immergés; le reste du raisonnement de *loc. cit.* s'applique mot pour mot. □

Compte tenu de la remarque précédant l'énoncé du LEMME 7.1, ceci achève de prouver :

PROPOSITION 7.3. — \widetilde{A} est normale.

Passons à la normalité de $\widetilde{Z} \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$. Rappelons que \widetilde{Z} est une complétée p -adique de l'algèbre \widetilde{A} dans le cas spécial $\ell = p^\alpha, k = B_\ell$. Par ailleurs, soit E une extension finie de \widehat{B}_ℓ .

Remarquons d'abord la PROPOSITION 7.1 reste valable pour $\tilde{Z} \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$. On reprend donc le raisonnement ci-dessus, avec les mêmes notations. Pour déduire de l'équation de dépendance intégrale de h'' que h'' appartient à $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$, il faut savoir que $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$ est normale. Cela se déduit de la normalité de $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_q}(A)$ et d'un raisonnement analogue à la démonstration de [E, th. 3.2.], en utilisant une uniformisante de E ($v' - 1$ dans le cas de l'extension de \widehat{B}_ℓ par $\widehat{B}_{\ell'}$, où $\ell = p^\alpha$ divise $\ell' = p^{\alpha'}$). (L'adaptation analogue de [E, th. 2.3.] permet de redémontrer l'intégrité de $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$.) Nous avons alors l'équation

$$(7) \quad \prod_{j=1}^n b_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta(1-i_j/\ell)} c_{\varpi_j}^{\text{ord } \delta i_j/\ell} (h')^{\text{ord } \delta} \in \widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes E$$

où $h' \in Q(\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E)$. Soit K une clôture algébrique de E , réunion d'extensions finies. Par un argument de limite inductive, $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ est encore intègre et intégralement clos.

Remarquons que les idéaux maximaux de $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ sont en correspondance bijective avec ses morphismes d'algèbre vers K , i.e. avec les points de la variété $G(K)$. Nous avons noté que $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ est normal; d'autre part, son anneau local complété en tout point du spectre maximal est isomorphe à un anneau de séries formelles en vertu du lemme suivant :

LEMME 7.2. — *Soit g un élément de $G(K)$ et \mathfrak{m}' l'idéal correspondant de $\widehat{O}_{B_\ell} \otimes K$. La complétion \mathfrak{m}' -adique de la localisation de cet anneau en \mathfrak{m}' est isomorphe à $K[[\xi_1, \dots, \xi_d]]$.*

Démonstration. — En utilisant la multiplication du groupe, on se ramène au cas $g = e$. Remarquons que \widehat{O}_{B_ℓ} s'injecte dans $(\overline{U}_{B_\ell})^* \simeq B_\ell[[\xi_1, \dots, \xi_d]]$, d'où l'injection de $\widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ dans

$$(\overline{U}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K)^* = K[[\xi_1, \dots, \xi_d]].$$

D'autre part, si \mathfrak{m} est l'idéal d'augmentation de $O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K$, l'inclusion naturelle de \mathfrak{m}^n dans $\overline{U}_{\leq n}^\perp$ (où $\overline{U}_{\leq n}$ dénote l'espace des combinaisons linéaires de produits d'au plus n vecteurs de l'algèbre de Lie) est une égalité, d'où l'égalité $(O_{B_\ell} \otimes K) \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^n$: l'inclusion \supset est claire et l'inclusion inverse vient de $(O_{B_\ell} \otimes K) \cap \mathfrak{m}^n \subset \overline{U}_{\leq n}^\perp$ et de ce qui précède. On en déduit la suite d'inclusions

$$O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K \subset \widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K \subset (O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K)_e^\wedge \subset (\widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K)_e^\wedge,$$

les deux derniers termes désignant les complétés des localisations des deux premiers. La complétion de la deuxième injection induit une injection $(\widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K)_e^\wedge \rightarrow (O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K)_e^\wedge$, telle que la composition

$$(O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K)_e^\wedge \subset (\widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K)_e^\wedge \subset (O_{B_\ell} \otimes_{B_\ell} K)_e^\wedge$$

soit l'identité; d'où l'énoncé. \square

Soit \mathfrak{f} l'idéal de $O_{B_\ell}(A)$ égal à l'intersection des \mathfrak{f}_k associés aux divers $X(w)$, $Y(w)$, $X(w_0w_i) \cap Y(w_0w_j)$ définissant F , et \mathfrak{f}' l'intersection des fermetures $\bar{\mathfrak{f}}_k$ dans \widehat{O}_{B_ℓ} .

Nous avons la version suivante du LEMME 7.1 :

LEMME 7.3. — *Soit L une extension finie de E , et \mathfrak{f}'_L l'idéal engendré par \mathfrak{f}' dans $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} L$. Si \mathfrak{m} est un idéal maximal de cet anneau, noyau d'un morphisme vers L ne contenant pas \mathfrak{f}'_L , g' divise f' dans l'anneau local de $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} L$ en \mathfrak{m} . \square*

Reprenons l'argument de la PROPOSITION 7.2. Soient $h' = f'/g'$ comme dans (7) et \mathfrak{p} un idéal de hauteur 1 de $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$. Si on avait $\mathfrak{f}'_E \subset \mathfrak{p}$, on aurait (cf. [B2, prop. 1, p. 70]) l'inclusion $\mathfrak{f}'_{k;E} \subset \mathfrak{p}$. Rappelons que \mathfrak{f}_k correspond à une sous-variété propre d'une cellule de codimension 1. Soit \mathfrak{q} l'idéal premier de $O_{\widehat{B}_\ell}(A)$ correspondant à cette cellule; alors la fermeture \mathfrak{q}'_E de \mathfrak{q}_E dans $\widehat{O}_E(A)$ est incluse dans $\mathfrak{f}'_{k;E}$. D'autre part, cette inclusion est stricte, comme on le voit en comparant les réductions mod π de $\mathfrak{q}'_E \cap \widehat{O}_{\sigma_E}(A)$ (σ_E : les entiers de E) et de $\mathfrak{f}'_{k;E} \cap \widehat{O}_{\sigma_E}(A)$; ce sont les idéaux de $O_{\mathbb{F}_q}(A)$ définissant l'inclusion stricte de variétés $X(w) \subset X(w_0w_i)$ (par exemple). Enfin, comme $\text{Ker}(\sigma_E \rightarrow \mathbb{F}_q) = (\pi)$, et que $\mathfrak{q}'_E \cap \widehat{O}_{\sigma_E}(A) \otimes_{\mathbb{F}_q}$ est premier (en vertu de l'irréductibilité de $X(w_0w_i)$ sur tout corps algébriquement clos), \mathfrak{q}'_E est premier. On a donc une contradiction avec $\text{ht } \mathfrak{p} = 1$ et $\mathfrak{f}'_{k;E} \not\subset \mathfrak{p}$. Donc les idéaux engendrés dans $\widehat{O}_E(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ sont encore tels que $\mathfrak{f}'_{k;E} \otimes K \not\subset \mathfrak{p} \otimes K$.

Si maintenant on n'avait pas d'idéal maximal \mathfrak{m} de $\widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$ tel que $\mathfrak{p} \otimes K \subset \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{f}'_{k;E} \otimes K \not\subset \mathfrak{m}$, on aurait

$$\mathfrak{f}'_{k;E} \otimes K \subset \bigcap (\text{idéaux maximaux } \supset \mathfrak{p}) = \bigcap (\text{idéaux premiers } \supset \mathfrak{p})$$

(d'après le lemme de Zorn, tout idéal est contenu dans un idéal maximal), donc $\mathfrak{f}'_{k;E} \otimes K \subset \text{rad } \mathfrak{p} \otimes K$ et $\mathfrak{f}'_{k;E} \subset \text{rad } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ (comme \mathfrak{p} est premier, $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E/\mathfrak{p}$ est réduit), contradiction.

Remarquons que \mathfrak{m} est défini sur une certaine extension finie L de E . Par le lemme 7.3, g' divise f' dans $(\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} L)_{\mathfrak{m}'}$, où \mathfrak{m}' désigne l'idéal maximal de $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} L$ égal à $\mathfrak{m} \cap \widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} L$. Il en résulte $f'a = g'b$, $a \in \widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E - \mathfrak{m}$, $b \in \widehat{O}_{B_\ell}(A)$. Soit λ_i une base de L sur E ; décomposons $a = \sum_i \lambda_i a_i$, $b = \sum_i \lambda_i b_i$, avec $a_i, b_i \in \widehat{O}_{B_\ell} \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$. Soit j tel que $\chi_{\mathfrak{m}}(a_j) \neq 0$ (où $\chi_{\mathfrak{m}'}$ est le caractère associé à \mathfrak{m}'). On a alors $f'a_j = b_j g'$ et $a_j \notin \mathfrak{m}'$, donc $a_j \notin \mathfrak{p}$; donc g' divise f' dans $(\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E)_{\mathfrak{p}}$.

D'autre part, le cas $\text{ht } \mathfrak{p} = 2$ est réglé par le fait que comme $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$ est normal, donc vérifie (S_2) . Enfin $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$ est noëthérien, comme on le voit en utilisant une uniformisante et en suivant l'argument de [E, prop. 4.3]. (Remarque : cet argument ne s'applique pas à $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \otimes_{\widehat{B}_\ell} K$.)

On a prouvé :

PROPOSITION 7.4. — *L'algèbre $\widetilde{Z} \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$ est normale.*

REMARQUE. — Le rapporteur m'a communiqué une variante de la démonstration de cet énoncé : $C_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} B_\ell$ s'identifie à $B_\ell[b, c]^\Gamma$, où Γ est le groupe des racines ℓ -ièmes de l'unité, agissant par homothéties. L'anneau $\widetilde{Z} \otimes_{\widehat{B}_\ell} E$ s'identifie alors à l'anneau des invariants de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\widetilde{T}^2]} E[b, c]^{\otimes n}$ sous Γ^n , et est donc une intersection complète relative. D'après le LEMME 7.1, cet anneau est lisse en codimension 1. On peut alors appliquer le critère de Serre.

8. Le centre de l'algèbre de coordonnées complétée

Un emploi de la théorie des corps non commutatifs, analogue à celui de [dCKP], va nous permettre d'identifier \widetilde{Z} au centre, noté $Z(\widehat{O}_\ell)$ (ou Z dans cette section), de $\widehat{O}_\ell(A)$.

Notons donc la suite d'inclusions $\widehat{O}_{B_\ell}(A) \subset \widetilde{Z} \subset Z \subset \widehat{O}_\ell(A)$. Comme on l'a vu dans [E, 4.3], $\widehat{O}_\ell(A)$ est un module fini sur Z et [E, 2.3] n'a pas de diviseurs de zéro. Il s'ensuit que $F = \widehat{O}_\ell(A) \otimes_Z Q(Z)$ (si X est un anneau intègre, $Q(X)$ dénote son corps de fractions) est une extension de $Q(Z)$, de degré fini m^2 (m entier).

Prouvons alors :

LEMME 8.1. — $m \geq \ell^\nu$.

*Démonstration*². — Il existe une extension Ω de $Q(Z)$ (par exemple un sous-corps commutatif maximal de F) telle que $F \otimes_{Q(Z)} \Omega$ est isomorphe à $M_m(\Omega)$. Rappelons le théorème d’Amitsur-Levitsky : si m_1, \dots, m_{2p} sont $2p$ matrices $p \times p$, l’identité

$$(AL_{2p}) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)} \cdots m_{\sigma(2p)} = 0$$

a lieu; il n’y a pas d’identité entre $k < 2p$ matrices $p \times p$.

Il suit de la première partie de cet énoncé que l’identité (AL_{2m}) a lieu dans $F \otimes_{Q(Z)} \Omega$, donc aussi dans F et dans $\widehat{O}_\ell(A)$; elle a aussi lieu dans le quotient $M_{\ell^\nu}(\widehat{B}_\ell)$ (cf. PROPOSITION 5.2). D’après la deuxième partie de l’énoncé, $m \geq \ell^\nu$. \square

(Remarque : si le corps de base était \mathbb{C} , ce lemme résulterait d’un énoncé de V. KAC et de la PROPOSITION 5.2.)

Considérons la suite d’extensions $Q(\widehat{O}_{B_\ell}) \subset Q(\widetilde{Z}) \subset Q(Z) \subset F$. D’après la PROPOSITION 7.1, (iii), nous avons $[Q(\widetilde{Z}) : Q(\widehat{O}_{B_\ell})] = \ell^n$ et, d’après le LEMME 8.1, $[F : Q(Z)] \geq \ell^{2\nu}$. Prouvons maintenant :

LEMME 8.2. — $[F : Q(\widehat{O}_{B_\ell})] \leq \ell^{n+2\nu}$.

Démonstration. — Revenons aux algèbres définies sur les entiers : on a l’injection de Frobenius $F : \widehat{O}_{B_\ell} \rightarrow \widehat{O}_\ell$. Dans \widehat{O}_{B_ℓ} , soit S la partie multiplicative définie par $S = \{f \in \widehat{O}_{B_\ell} \mid f_{\mathbb{F}_p} \neq 0\}$. Alors F induit une injection de $(\widehat{O}_{B_\ell})_S \rightarrow (\widehat{O}_\ell)_{F(S)}$. D’autre part, la spécialisation à \mathbb{F}_p de ce morphisme est l’opération de puissance ℓ -ième de $Q(O_{\mathbb{F}_p}(A))$ vers lui-même. Remarquons que $Q(O_{\mathbb{F}_p}(A))$ est une extension transcendante pure de \mathbb{F}_p de degré $d = n + 2\nu$. En effet, la grande cellule est définie sur \mathbb{F}_p et $G_{\mathbb{F}_p}$ lui est birationnellement équivalente (comme à chacun de ses ouverts élémentaires). Il s’ensuit que l’opération de Frobenius fait de $Q(O_{\mathbb{F}_p}(A))$ un module libre de dimension $\ell^{n+2\nu}$ sur lui-même.

Par complétude $(v - 1)$ -adique, la relevée dans $(\widehat{O}_\ell)_{F(S)}$ d’une base de $Q(O_{\mathbb{F}_p}(A))$ sur lui-même est une famille génératrice de ce module sur $(\widehat{O}_{B_\ell})_S$. Comme de plus, $Q(\widehat{O}_\ell) = (\widehat{O}_\ell)_{F(S)} \otimes B_\ell$, et $Q(\widehat{O}_{B_\ell}) = (\widehat{O}_{B_\ell})_S \otimes B_\ell$, cette famille est encore une famille génératrice de $Q(\widehat{O}_\ell)$ sur $Q(\widehat{O}_{B_\ell})$. \square

Il résulte alors des remarques précédant le LEMME 8.2 :

² Cette démonstration m’a été communiquée par J. ALEV.

LEMME 8.3. — *L'injection de \tilde{Z} dans Z induit un isomorphisme entre $Q(Z)$ et $Q(\tilde{Z})$ tel que $[F : Q(\hat{O}_{B_\ell})] = \ell^{n+2\nu}$ et $m = \ell^\nu$.*

Nous avons alors :

PROPOSITION 8.1. — *L'injection de \tilde{Z} dans $Z(\hat{O}_\ell)$ est un isomorphisme d'algèbres (avec $\ell = p^\alpha$ et p premier aux coefficients de A .)*

Démonstration. — Remarquons que Z est un module de type fini sur \hat{O}_{B_ℓ} , d'après [E, cor. 4.3], donc *a fortiori* sur \tilde{Z} et, comme on l'a vu, Z est une sous-algèbre de $Q(\tilde{Z})$. Il existe donc un z dans \tilde{Z} non nul, tel que $\tilde{Z} \subset Z \subset (z^{-1})\tilde{Z} \subset Q(\tilde{Z})$. D'après la PROPOSITION 7.4, \tilde{Z} est normal d'où $Z = \tilde{Z}$. □

REMARQUES :

- 1) Ceci démontre de façon indépendante la normalité du centre $Z(\hat{O}_\ell)$, ce qui est aussi une conséquence du théorème 3.2 de [E].
- 2) Les résultats de [dCL] permettent de décrire le centre des algèbres décrites dans ce travail, par un raisonnement analogue.

9. Le centre de l'algèbre de coordonnées $O_\ell(A)$

Rappelons qu'on a défini $\hat{O}_\ell(A)$ comme la sous-algèbre de $U_{B_\ell}(A)^*$ des coefficients de représentations admissibles (modules de dimension finie sur B_ℓ , où les K_i^ℓ agissent par 1). Soit $Z(O_\ell)$ son centre. On a $Z(O_\ell) = Z(\hat{O}_\ell) \cap O_\ell$.

D'autre part, l'algèbre \tilde{A} définie à la section 7 est une sous-algèbre de $Z(O_\ell)$. On a vu qu'elle est centrale; de plus l'injectivité de $\tilde{A} \rightarrow O_\ell$ provient de la PROPOSITION 6.1, sous l'hypothèse que ℓ soit premier aux a_{ij} . Montrons :

THÉORÈME 9.1. — *Cette sous-algèbre est égale à $Z(O_\ell)$ (où ℓ est une puissance d'un nombre premier, premier aux coefficients de A .)*

Démonstration. — Soit $z \in Z(O_\ell)$. Comme z appartient à $Z(\hat{O}_\ell)$, on a

$$z = \sum_{0 \leq k_i \leq \ell-1} \prod_{i=1}^n b_{\varpi_i}^{k_i} c_{\varpi_i}^{\ell-k_i} F(f_{(k_i)}), \quad f_{(k_i)} \in \hat{O}_\ell.$$

L'action à gauche $L(K_j)$ est un automorphisme de \hat{O}_ℓ , laissant O_ℓ invariant et laissant fixes les éléments de $F(\hat{O}_\ell)$ (car $F(K_j) = 1$).

D'autre part, $L(K_j)(b_{\varpi_i}) = v^{\delta_{ij}} b_{\varpi_i}$ (considérer l'action de K_j sur v_{ϖ_i}), et $L(K_j)(c_{\varpi_i}) = v^{-\delta_{ij}} c_{\varpi_i}$ par la proportionnalité de c_{ϖ_i} et $S(b_{\varpi_i})$. Les transformés de z par les divers $L(\prod K_j^{\alpha_j})$ (avec $0 \leq \alpha_j \leq \ell - 1$) sont donc dans $Z(O_\ell)$, égaux à

$$\sum_{0 \leq k_i \leq \ell - 1} \prod_{i=1}^n b_{\varpi_i}^{k_i} c_{\varpi_i}^{\ell - k_i} F(f_{(k_i)}) v^{2 \sum k_i \alpha_i}.$$

Comme ℓ est premier à 2, en inversant une matrice de Vandermonde, on voit que $\prod_{i=1}^n b_{\varpi_i}^{k_i} c_{\varpi_i}^{\ell - k_i} F(f_{(k_i)})$ appartient à $Z(O_\ell)$. Il s'ensuit que

$$\prod_{i=1}^n b_{\varpi_i}^{k_i} c_{\varpi_i}^{\ell - k_i} F(f_{(k_i)}) = F\left(\prod_{i=1}^n B_{\varpi_i}^{k_i} C_{\varpi_i}^{\ell - k_i} f_{(k_i)}\right)$$

appartient à O_ℓ . Posons $g_i = \prod_{i=1}^n B_{\varpi_i}^{k_i} C_{\varpi_i}^{\ell - k_i} f_{(k_i)}$. Soient $x \in \bar{U}_\mathbb{Q} \otimes B_\ell$ arbitraire et $y \in U_{B_\ell}$ une préimage de x par F (F est surjectif); alors $\langle g_i, x \rangle = \langle F(g_i), y \rangle$ appartient à B_ℓ , donc g_i est dans $O_{B_\ell}(A)$.

Remarquons maintenant :

LEMME 9.1. — Si $f \in O_{B_\ell}$ et $\chi(f) \neq 0$ pour un morphisme $\chi : O_{B_\ell} \rightarrow B_\ell$, avec $g \in \widehat{O}_{B_\ell}$ et $fg \in O_{B_\ell}$, alors $g \in O_{B_\ell}$.

Démonstration. — Ramenons-nous au cas où $\chi = \varepsilon$. Définissons $f_\chi = (1 \otimes \chi)\Delta f \in O_\ell$; notons que $(1 \otimes \chi)\Delta((v - 1)^n \mathcal{O}_{B_\ell}) \subset \mathcal{O}_{B_\ell}$. Cela permet de prolonger $(1 \otimes \chi)\Delta$ par continuité à \widehat{O}_{B_ℓ} . Soit alors $g_\chi \in \widehat{O}_\ell$ l'image de g par cette application; f_χ, g_χ vérifient les hypothèses du lemme. Si on a $g_\chi \in O_{B_\ell}$, alors $g = (1 \otimes \chi)(1 \otimes S)\Delta g_\chi$ (formule valable pour tout $g \in O_{B_\ell}$ et à laquelle on donne un sens par continuité pour $g \in \widehat{O}_{B_\ell}$) appartient à O_{B_ℓ} .

Supposons donc $\chi = \varepsilon$. On a $\epsilon(fg) \in B_\ell, \epsilon(f) \in B_\ell^\times$; donc $\epsilon(g) \in B_\ell$. Établissons par récurrence $\langle g, \xi \rangle = 0$ pour $\xi \in (U\mathfrak{g})_{\leq n}$ (\mathfrak{g} l'algèbre de Lie sur B_ℓ); supposons l'assertion vraie au rang n . Si $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\langle fg, X\xi \rangle = \epsilon(f)\langle g, X\xi \rangle + \langle f, \xi' \rangle \langle g, \xi'' \rangle,$$

avec $\xi' \in U\mathfrak{g}$ et $\xi'' \in (U\mathfrak{g})_{\leq n}$. Par l'hypothèse de récurrence, et comme $\epsilon(f)$ est dans B_ℓ^\times , on voit que $\langle g, X\xi \rangle$ appartient à B_ℓ .

On a donc $\langle g, \xi \rangle \in B_\ell$ pour tout $\xi \in U\mathfrak{g} = \bar{U}_\mathbb{Q} \otimes B_\ell$; donc $g \in O_{B_\ell}$.

Comme l'évaluation en w_0 de B_{ϖ_i} et C_{ϖ_i} est non nulle, on conclut $f_i \in O_{B_\ell}$. □

Rappelons que O_ℓ a comme sous-algèbre $\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$ (π est obtenue par tensorisation avec B_ℓ de la somme des représentations admissibles de $U_{\mathcal{A}_0}$ obtenues à partir de celles de \mathbb{U} , de plus haut poids ϖ_i) ; cette sous-algèbre est aussi dense dans \widehat{O}_ℓ (cf. [E, prop. 4.1.2]). Soit $Z(\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi))$ son centre. On a certainement

$$Z(\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)) \supset Z(\widehat{O}_\ell) \cap \text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$$

et même l'égalité par densité.

D'autre part, on a

$$Z(\widehat{O}_\ell) \cap \text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi) \subset Z(\widehat{O}_\ell) \cap O_\ell = Z(O_\ell)$$

(la dernière égalité d'après le théorème). Par ailleurs, $Z(O_\ell) \subset Z(\widehat{O}_\ell)$ (par densité de O_ℓ dans \widehat{O}_ℓ) et $Z(O_\ell) \subset \text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$, car l'image de $F : O_{B_\ell} \rightarrow O_\ell$ est incluse dans $\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$, d'après [E], appendice écrit avec N. ANDRUSKIEWITSCH, et les $b_{\varpi_i}, c_{\varpi_i}$ font partie de $\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$. Finalement :

COROLLAIRE 9.1. — *$Z(O_\ell)$ est une sous-algèbre de $\text{Coeff}(U_{B_\ell}, \pi)$, égale au centre de cette algèbre.*

10. Interprétation géométrique de $Z(O_\ell)$

Le spectre de $Z(O_\ell)$ est donc celui du produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } Z(O_\ell) & \longrightarrow & (\text{Spec } C_\ell)^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{B_\ell} & \longrightarrow & \widetilde{T}_{B_\ell}^2, \end{array}$$

le morphisme $G_{B_\ell} \rightarrow \widetilde{T}^2$ étant donné par la paire de prolongements par continuité de $\dot{X}(w_0) \simeq G^* \rightarrow T$ et $\dot{Y}(w_0) \simeq G^* \rightarrow T$ à $G_{B_\ell} \rightarrow T_{B_\ell}$. Le groupe G^* est le groupe dual de Drinfel'd de G ; c'est un groupe résoluble ; les \simeq sont des isomorphismes de variétés algébriques.

11. La structure de Poisson de Z_ℓ

D'après une observation générale de [dCKP], pour toute algèbre A sur \mathcal{A}_0 , le centre de $A \otimes_{\mathcal{A}_0} B_\ell$ a une structure de Poisson. Il suffit de relever deux éléments à A , de diviser leur commutateur par ϕ_ℓ et de spécialiser modulo ϕ_ℓ . Le résultat est indépendant des relèvements et donne une structure de Poisson. Posons $A = \text{Coeff}(U_{\mathcal{A}_0}, \pi)$; alors $A \otimes_{\mathcal{A}_0} B_\ell$ a pour centre l'algèbre Z_ℓ calculée ci-dessus. Dans cette section, nous donnons des indications sur la structure de Poisson de Z_ℓ obtenue par cette construction. Plus précisément, nous montrons que la sous-algèbre $F(O_{\mathbb{Q}}) \subset Z_\ell$ est une sous-algèbre de Poisson, donnée par la structure de groupe de Lie-Poisson de G (en fait, par une structure proportionnelle).

Dans le cas de \mathfrak{sl}_2 , cela résulte du calcul suivant : $[a^\ell, b^\ell] = (1 - v^{\ell^2})a^\ell b^\ell$ d'où $\{F(a), F(b)\} = \ell(v - 1)a^\ell b^\ell = \ell(v - 1)F(\{a, b\})$; mêmes calculs pour les couples (a, c) , (b, d) et (c, d) ;

$$a^\ell d^\ell = (1 + v^{2\ell-1}bc)(1 + v^{2\ell-3}bc) \cdots (1 + vbc) = 1 + v^{\ell^2}(bc)^\ell + \cdots,$$

$$d^\ell a^\ell = (1 + v^{1-2\ell}bc)(1 + v^{3-2\ell}bc) \cdots (1 + v^{-1}bc) = 1 + v^{-\ell^2}(bc)^\ell + \cdots,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{\phi_\ell} [a^\ell, d^\ell] = 2\ell(v - 1)b^\ell c^\ell \pmod{\phi_\ell}$$

car puisque ℓ est impair et que l'on sait que le crochet de Poisson appartient au centre, on peut ignorer les termes autres que 1 et $(bc)^\ell$.

Soient alors $f, g \in O_{\mathbb{Q}}(A)$. Rappelons l'application Σ de $O_{\mathcal{A}_0}(A)$ vers $\bigotimes_{k=1}^\nu O_{\mathcal{A}_0}(\mathfrak{sl}_2, i_k)$. La question est :

que vaut $\phi_\ell^{-1}[F(f), F(g)]$ modulo ϕ_ℓ ?

L'image par Σ de cet élément est $(\ell(v - 1))^\nu F\{\Sigma_{\mathbb{Q}}(f), \Sigma_{\mathbb{Q}}(g)\}$ d'après ce qui précède (le dernier crochet étant donné par la structure de Poisson sur SL_2 ; le $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ de la formule est la version sur \mathbb{Q} de Σ). Ce dernier élément a lui-même un unique antécédent par Σ , à savoir $(\ell(v - 1))^\nu F\{f, g\}$ (car $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme de variétés de Poisson).

La structure de Poisson de Z_ℓ est donc une « racine ℓ -ième » de celle de G . Le même phénomène a lieu dans le cas de $\mathcal{U}_{q\mathfrak{g}}$ (cf. [dCKP]).

BIBLIOGRAPHIE

- [APW] ANDERSEN (H.A.), POLO (P.) and WEN (K.). — *Representations of Quantum Algebras*, Invent. Math., t. **104**, 1991, p. 1–59.
- [B1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, vol. VI. — Masson, Paris, 1981.
- [B2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, vol. III. — Masson, Paris, 1985.
- [CC] CARTAN (H.) et CHEVALLEY (C.). — *Exposé 8*, Séminaire Cartan-Chevalley Paris, 1956–58.
- [dCK] DE CONCINI (C.) and KAC (V.). — *Representations of Quantum Groups at Roots of 1*, Progress in Math., t. **92**, 1990, p. 471–505.
- [dCKP] DE CONCINI (C.), KAC (V.) and PROCESI (C.). — *The Quantum Coadjoint Action*, J. Amer. Math. Soc., t. **5**, 1, 1992, p. 151–189.
- [dCL] DE CONCINI (C.) and LYUBASHENKO (V.). — *Quantum Function Algebra at Roots of 1*, Adv. in Math. (à paraître).
- [Di] DIEUDONNÉ (J.). — *Cours de géométrie algébrique*. — PUF, 1974.
- [Dr] DRINFEL'D (V.G.). — *Quantum Groups*. — Proc. ICM, Berkeley, 1986, p. 798–820.
- [E] ENRIQUEZ (B.). — *Integrity, Integral Closedness and Finiteness over their Centers of the Coordinate Algebras of Quantum Groups at p^ν -th Roots of Unity*, à paraître aux Annales des sciences mathématiques du Québec.
- [EGA] GROTHENDIECK (A.) avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ. — *Éléments de géométrie algébrique*. — Publ. Math. IHES, IV, 1965.
- [Ja] JANTZEN (J.C.). — *Representations of Algebraic Groups*. — Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1972.
- [Ji] JIMBO (M.). — *A q -Difference Analogue of $U\mathfrak{g}$ and the Yang-Baxter Equation*, Lett. Math. Phys., t. **10**, 1985, p. 63–69.
- [L1] LUSZTIG (G.). — *Quantum Groups at Roots of 1*, Geom. Dedicata, t. **35**, 1990, p. 89–114.
- [L2] LUSZTIG (G.). — *Introduction to Quantized Enveloping Algebras*, Preprint, 1990.
- [L3] LUSZTIG (G.). — *Canonical Bases Arising from Quantized Enveloping Algebras II*, Common trends in mathematics and quantum fields theories (T. Eguchi and al., eds), Progr. Theor. Phys. suppl., t. **102**, 1990, p. 175–201.
- [LS] LEVASSEUR (T.) and STAFFORD (J.T.). — *The Quantum Coordinate Ring of the Special Linear Group*, J. Pure and Applied Algebra, t. **86**, 1993, p. 181–186.

- [Ro] ROSSO (M.). — *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analog of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra*, Comm. Math. Phys., t. **117**, 1988, p. 581–593.
- [S] SOIBELMAN (Ya.S.). — *Algebra of Functions on Compact Quantum Group and its Representations*, Algebra i Analiz, t. **2**, 1, 1990, p. 190–212.