BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Fonctions multiplicatives et équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 3 (1995), p. 329-349
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_3_329_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 329–349.

FONCTIONS MULTIPLICATIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

JEAN-PAUL BEZIVIN (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f(n)$ une fonction multiplicative $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. On suppose que la fonction $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Nous montrons alors qu'il existe un entier rationnel k et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que $f(n) = n^k\omega(n)$. Ceci généralise un résultat de Sarkozy.

ABSTRACT. — Let $f(n)$ be a multiplicative function of $\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. We suppose that the power series $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ verify a linear homogeneous differential equation with polynomial coefficients. We show then that there exists a rational integer k and a periodic multiplicative function $\omega(n)$ such that $f(n) = n^k\omega(n)$.This extend a result of Sarkozy.

1. Introduction et résultats

Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une fonction vérifiant $f(nm) = f(n)f(m)$ pour tout couple (m,n) d'entiers premiers entre eux. Dans [SA], A. SARKOZY caractérise les fonctions multiplicatives telles que la série entière $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ soit une fraction rationnelle, ou, ce qui est équivalent, que la suite $f(n)$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^{s} a_i f(n+i) = 0$$

où les a_i sont des constantes complexes avec a_s non nulle. On a le résultat suivant :

(*) Texte reçu le 17 novembre 1993, révisé le 5 septembre 1994.
J.-P. BEZIVIN, Université de Caen, Département de Mathématiques, 14032 Caen CEDEX (France). Email : bezivin@math.unicaen.fr.
Classification AMS : 11 A 25, 34 A 20.

THÉORÈME S. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$, telle que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ soit une fraction rationnelle. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $h \in \mathbb{N}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que $f(n) = n^h\omega(n)$.*

Ces résultats ont été généralisés depuis (voir [HEMA]) et récemment, L. LUCHT a donné une démonstration très simple du THÉORÈME S (voir [LU]).

Dans cet article, nous allons déterminer les fonctions multiplicatives f à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, telles que la série génératrice associée

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$$

vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes :

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(z)g^{(i)}(z) = 0$$

les P_i étant des polynômes avec P_s non nul. Ceci est équivalent à dire que la suite $f(n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\sum_{k=0}^{t} Q_k(n)f(n+k) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, les Q_k étant des polynômes avec Q_t non nul.

Nous allons démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f(n)$ appartient à $\mathbb{R}$ pour tout n, ou que $f(n)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. On suppose de plus que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que l'on ait $f(n) = n^k\omega(n)$ pour tout n.*

Le résultat du théorème n'est plus vrai si on suppose que $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ vérifie une équation différentielle *algébrique*, comme le montre l'exemple de la fonction caractéristique des carrés de $\mathbb{N}$. On sait en effet que la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ vérifie une équation différentielle algébrique (voir [RU]).

REMARQUE. — Nous pensons bien sûr que le résultat est vrai sans l'hypothèse $f(n) \neq 0$ pour tout n.

Nous déterminerons aussi les fonctions multiplicatives à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que leur série génératrice soit algébrique :

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)z^n$ est une série algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ non nul tel que $P(z,g(z)) = 0$. Alors ou la fonction f est nulle à partir d'un certain rang, ou il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ et une fonction multiplicative périodique $\omega(n)$ tels que l'on ait $f(n) = n^k\omega(n)$ pour tout n.*

Nous utiliserons très souvent dans ce qui suit la propriété qu'une série entière de rayon de convergence non nul, vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, se prolonge au revêtement universel de $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points, ce que nous traduirons en disant qu'une telle série n'a qu'un nombre fini de singularité dans $\mathbb{C}$.

Comme nous utilisons aussi très souvent dans nos démonstrations le fait que les coefficients de Taylor des séries considérées vérifient des relations de récurrence à coefficients polynômes en la variable n (ce qui est équivalent au fait que la série vérifie une équation différentielle à coefficients polynômes, voir plus haut), nous ne traitons donc pas le cas où la seule hypothèse sur la série génératrice, supposée de rayon de convergence non nul, est d'avoir simplement un nombre fini de singularité dans $\mathbb{C}$, qui reste donc un problème ouvert.

On peut se demander quelles sont les fonctions multiplicatives périodiques qui interviennent dans les résultats ci-dessus.

Le lecteur intéressé pourra consulter [KA2, Lemma 1, p. 250], où une description de telles fonctions est donnée.

A titre d'exemple, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, la fonction

$$f(n) = \omega(1 + (-1)^n) - (-1)^n$$

est une fonction multiplicative, périodique de période 2, qui n'est complètement multiplicative que si $\omega = 1$, c'est-à-dire si $f(n) = 1$ pour tout n.

L'auteur remerçie E. REYSSAT d'avoir attiré son attention sur la référence [LU].

2. Rappels de résultats

LEMME 2.1. — *Soit $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que $\psi(z)$ n'est pas un polynôme et vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Il existe alors un nombre rationnel s tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n\,!)^s}\, z^n$$

ait un rayon de convergence non nul et fini.

Démonstration. — Voir [RA].

LEMME 2.2. — *Soit $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une série formelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que $\psi(z)$ vérifie une équation différentielle à coefficients polynômes. Soit :*

$$\sum_{j=0}^{t} P_j(n)a(n+j) = 0$$

une relation de récurrence à coefficients polynômes en la variable n, avec P_s non nul, vérifiée par la suite $a(n)$. Soit q un entier naturel non nul; alors la suite $b(n) = a(nq)$ vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{k=0}^{m} H_k(n)b(n+k) = 0,$$

les H_k étant des polynômes avec H_m non nul, l'entier m étant inférieur ou égal à t. De plus, si le rayon de convergence de $\psi(z)$ est non nul et fini, les singularités de la série $\theta(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ sont parmi les puissances q-ièmes des singularités de la série $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

Démonstration. — Voir [BE1, p. 137].

LEMME 2.3. — *Soient $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ deux séries entières. On suppose que $f(z)$ et $g(z)$ ont un rayon de convergence non nul, et un nombre fini de singularités dans $\mathbb{C}$. Alors la série*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

(produit de Hadamard de f et de g), ne peut avoir comme singularités que les produits d'une singularité de f par une singularité de g.

Démonstration. — Voir [BI, p. 21–22] ou [JU, p. 297].

LEMME 2.4. — *Soit f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ une fonction multiplicative périodique, c'est-à-dire telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq 1$, telle que $f(n+m) = f(n)$ pour tout n assez grand. Alors $f(n)$ est purement périodique : on a $f(n+m) = f(n)$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. — Voir [KAN].

LEMME 2.5. — *Soit $\psi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une série formelle à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que $\psi(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes et qu'il existe un sous-groupe de type fini G du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$, tel que $a_n \in G \cup \{0\}$ pour tout entier n. Alors $\psi(z)$ est une fraction rationnelle.*

Démonstration. — Voir [BE2, p. 62, th. 4].

PROPOSITION 2.6. — *Soit $f(n)$ une fonction multiplicative de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{C}$. *On suppose que*

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x} \left|f(n)\right|^2 < +\infty,$$

et, si cette quantité existe, on pose :

$$M(f) = \lim \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f(n)$$

Alors (i) *et* (ii) *sont équivalents :*

(i) *$M(f)$ existe et est non nulle.*

(ii) *Les trois séries*

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{f(p)-1}{p}, \qquad \sum_{p \text{ premier}} \frac{(f(p)-1)^2}{p}, \qquad \sum_{\substack{p \text{ premier}\\ k\ge 2}} \frac{|f(p^k)|}{p^k}$$

sont convergentes, et pour tout p premier, la série $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)/p^k$ est non nulle.

Démonstration. — Voir [EL].

PROPOSITION 2.7. — *Soit $f(n)$ une fonction multiplicative de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{C}$. *On suppose que*

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} |f(n)|^2 < +\infty,$$

et que $M(f)$ existe et est non nulle. Alors ou la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ admet le cercle unité comme frontière naturelle, ou c'est une fraction rationnelle.

Démonstration. — Voir [LUTU].

LEMME 2.8. — *Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série algébrique de rayon de convergence R fini. Il existe alors un nombre rationnel $r \notin -\mathbb{N}^*$, un entier naturel t, et des éléments non nuls A_i et c_i dans $\mathbb{C}$, avec $|c_i| = 1/R$ pour tout $i = 1,..,t$, tels que :*

$$a_n = n^r\left(A_1 c_1^n + \cdots + A_t c_t^n\right) + \mathrm{o}(n^r R^{-n}).$$

Démonstration. — Voir [TS, p. 77, formule 20].

LEMME 2.9. — *Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$, tous non nuls et $g(z) = \sum z^n/a_n$. On suppose que* $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe et vaut* 1 *(de sorte que les rayons de convergence de $f(z)$ et $g(z)$ sont égaux à* 1*) et que la série $f(z)$ n'a que $z = 1$ comme singularité sur le cercle unité. Alors ou la série $g(z)$ admet le cercle unité comme frontière analytique, ou elle n'a que $z = 1$ comme singularité sur le cercle unité. Dans ce dernier cas, on a $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ si n tend vers l'infini.*

Démonstration. — Voir [AG, p. 431, th. S, et p. 432, ligne 12].

LEMME 2.10. — *Soit $f(n)$ une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f(n)$ est de module* 1 *pour tout n entier, et que $f(n+1) - f(n)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini. Alors il existe un nombre complexe imaginaire pur τ tel que $f(n) = n^\tau$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.*

Démonstration. — Voir [KA1, th. 14, p. 548].

3. Lemmes préliminaires

LEMME 3.1. — *Soient a_n et b_n deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant des récurrences*

$$\sum_{i=0}^{t} P_i(n)a(n+i) = 0 \quad et \quad \sum_{j=0}^{s} Q_j(n)b(n+j) = 0$$

pour tout n entier, les P_i et Q_j étant des polynômes avec P_t et Q_s non nuls. Alors $c(n) = a(n) + b(n)$ vérifie une relation de la même forme

$$\sum_{k=0}^{m} H_k(n)c(n+k) = 0,$$

les H_k étant des polynômes et H_m non nul, avec $m \leq s + t$, et la suite $d(n) = a(n)b(n)$ vérifie une relation de la même forme

$$\sum_{k=0}^{r} M_k(n)d(n+k) = 0,$$

les M_k étant des polynômes avec M_r non nul et avec $r \leq st$.

Démonstration. — Soient K le corps des germes à l'infini des suites fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ et E le K-espace vectoriel des germes de suites à valeurs complexes à l'infini. Les hypothèses du lemme sur les suites a_n et b_n se traduisent en disant que le K-sous-espace vectoriel F de E engendré par les suites a_{n+k}, pour $k \in \mathbb{N}$, est de dimension finie $\leq t$ et que le K-sous-espace vectoriel G de E engendré par les suites b_{n+k}, pour $k \in \mathbb{N}$, est de dimension finie $\leq s$. Il est clair que le K-sous-espace vectoriel engendré par les suites c_{n+j}, pour $j \in \mathbb{N}$, est inclus dans $F+G$, donc de dimension finie $\leq s+t$. On procède de même pour la suite $d(n)$.

LEMME 3.2. — *On suppose que les hypothèses du théorème* 1 *sont satisfaites et que la suite $f(n)$ vérifie une récurrence de la forme*

$$\sum_{i=0}^{t} P_i(n) f(n+i) = 0,$$

les P_i étant des polynômes avec P_t non nul. Posons $N = (2t+1)!$, et soit q un entier premier à N. On a l'égalité :

$$f(nq) = f(n) f(q)$$

pour tout entier n assez grand.

Démonstration. — Nous suivons la démarche introduite dans [LU]. Posons

$$u(n) = f(nq) - f(n) f(q).$$

D'après le LEMME 2.2 et le LEMME 3.1, la suite $u(n)$ vérifie une récurrence de la forme

$$\sum_{i=0}^{m} H_i(n) u(n+i) = 0$$

les H_i étant des polynômes, avec H_m non nul et $m \leq 2t$.

Considérons un entier n de la forme $n = k + hq$, avec $1 \leq k \leq 2t+1$ et $h \in \mathbb{N}$. Alors n est premier à q, d'après les hypothèses faites.

Donc, d'après la multiplicativité de la fonction $f(n)$, on a $u(n) = 0$ pour tout tel entier n.

On choisit un entier h assez grand, de façon que $n \geq 1 + hq$ implique $H_m(n) \neq 0$. On a, puisque $m \leq 2t$:

$$u_{1+hq} = \cdots = u_{m+1+hq} = 0.$$

La relation de récurrence et l'hypothèse faite sur h impliquent alors $u(k+hq) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 3.3. — *On suppose les hypothèses du théorème* 1 *réalisées et que $f(n)$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang. Alors il existe une constante P_0 telle que $f(p^k) \neq 0$ pour tout p premier, $p \geq P_0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Nous suivons de près la démonstration du lemme 7′ de [HEMA]. Soit

$$\sum_{i=0}^{t} P_i(n) f(n+i) = 0$$

une relation de récurrence à coefficients polynômes vérifiée par $f(n)$ avec P_t non nul. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une famille infinie de puissances de nombres premiers $p_i^{k_i}$ tels que $f(p_i^{k_i}) = 0$.

Soit N une solution du système de congruences :

$$N \equiv -i + p_i^{k_i} \pmod{p_i^{k_i+1}} \quad 1 \leq i \leq t.$$

Soit $h \in \mathbb{N}$ et posons :

$$M = N + h p_1^{k_1+1} \ldots p_t^{k_t+1}.$$

Pour toute valeur de i et tout choix de h, l'entier $M + i$ est, pour tout $i = 1, .., t$ divisible par $p_i^{k_i}$ mais pas par une puissance supérieure de p_i. De la multiplicativité de $f(n)$, on déduit que $f(M+i) = 0$ pour $i = 1, .., t$.

Si l'on a choisi h assez grand, on aura de plus que $P_t(n) \neq 0$ pour tout $n \geq M$.

En utilisant la relation de récurrence, on voit alors que $f(n)$ est nulle pour tout $n \geq M + 1$, d'où le résultat.

LEMME 3.4. — *On suppose que les hypothèses du théorème* 1 *sont vérifiées. Alors, si $f(n)$ n'est pas nul à partir d'un certain rang, la série $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n$ a un rayon de convergence non nul et fini dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Nous supposons que $f(n)$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang. D'après le LEMME 2.1, il existe un nombre rationnel r tel que la série entière

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{(n\,!)^r} z^n$$

a un rayon de convergence non nul et fini. Cependant, cette série a le désavantage de ne pas vérifier une équation différentielle à coefficients polynômes en général ; nous allons un peu la modifier de façon à préserver cette propriété.

Soient $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = u/v$.

• Supposons tout d'abord $r > 0$.

Soit b_n la suite définie par l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b_n} = \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{kv+j}}{(k\,!)^u} = \eta(z).$$

Puisque $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$, la série $\eta(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes. On voit de plus que :

$$L = \lim \sqrt[n]{b_n/(n\,!)^r}$$

existe, et appartient à $]0, +\infty[$.

La série

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{b_n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

a donc, comme $\psi(z)$, un rayon de convergence non nul et fini. De plus, par le LEMME 3.1, elle vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes.

Soit $q \geq 2$ un entier vérifiant les conditions du LEMME 3.2. On a alors, pour tout entier assez grand :

$$f(nq) = c_{nq} b_{nq} = f(n) f(q) = c_n b_n f(q)$$

donc :

$$c_{nq} = f(q)\, b_n \frac{c_n}{b_{nq}}\cdot$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/b_{nq} z^n$ est, puisque $q \geq 2$ et $r > 0$ et en raison du comportement asymptotique de la suite b_n, une fonction entière.

On a l'égalité :

$$\sum_{\zeta^q=1} \theta(\zeta z) = q \sum_{n=1}^{\infty} c_{nq} z^{nq}$$

et ce qui précède montre que le second membre est convergent dans tout $\mathbb{C}$.

D'autre part, la série $\theta(z)$ a un rayon de convergence non nul et fini. Elle a donc au moins une singularité dans $\mathbb{C}^*$; soit ω l'une d'entre elle.

La relation précédente montre qu'il existe une autre singularité de $\theta(z)$, que nous notons ω_q, telle que ω/ω_q soit une racine q-ième de l'unité différente de 1.

Comme ceci est valable pour tout q premier assez grand, cela implique que $\theta(z)$ a une infinité de singularités dans $\mathbb{C}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\theta(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes.

• Supposons maintenant que $r < 0$.

Dans ce cas, la fonction $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ est une fonction entière. En appliquant toujours le résultat du LEMME 3.2, on a :

$$\sum_{\zeta^q=1} g(\zeta z) = qf(q)g(z^q) + T(z)$$

où T est un polynôme. Posons :

$$|g|(R) = \max\{|g(z)|, |z| \leq R\}.$$

On peut, grâce au LEMME 3.3, supposer que $f(q) \neq 0$. Du fait que $g(z)$ n'est pas un polynôme, on déduit que pour toute constante c, la quantité $R^c/|g|(R)$ tend vers zéro si R tend vers l'infini.

On déduit de ce qui précède qu'il existe des constantes $\lambda > 1$ et $R_0 > 1$ telles que, pour tout R assez grand, $R \geq R_0$, on a :

$$|g|(R^q) \leq \lambda |g|(R).$$

En itérant cette inégalité, on trouve pour tout entier n

$$|g|(R^{q^n}) \leq \lambda^n |g|(R)$$

pour tout $R \geq R_0$.

Soit ρ assez grand ; on choisit n entier tel que

$$R_0 \leq \rho^{1/q^n} \leq 2R_0.$$

Il vient alors :

$$|g|(\rho) \leq c_1 (\log \rho)^{\log \lambda / \log q}$$

où c_1 est une constante positive. Ceci montre que $g(z)$ est un polynôme, contrairement à l'hypothèse faite.

Finalement, on a $r = 0$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ a donc un rayon de convergence non nul et fini, ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3.5. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *et si la fonction* $f(n)$ *n'est pas nulle à partir d'un certain rang, la série* $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$, *qui a un rayon de convergence non nul et fini d'après le lemme* 3.4, *n'a que des racines de l'unité comme singularités dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Soit q un entier vérifiant les conditions du LEMME 3.2 ; nous supposons q choisi de façon que $f(q) \neq 0$, ce qui est possible en vertu du LEMME 3.3.

On a alors, en traduisant l'égalité $f(nq) = f(n)f(q)$ pour tout n assez grand :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nq)z^n = f(q)\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n + T(z)$$

où $T(z)$ est un polynôme.

Soit ω une singularité de $g(z)$. D'après l'égalité précédente, c'est une singularité de $\sum_{n=1}^{\infty} f(nq)z^n$. D'après le LEMME 2.2, ω est donc la puissance q-ième d'une singularité ω' de $g(z)$. Il est clair qu'alors, en raison de la finitude de l'ensemble des singularités de $g(z)$, ω est une racine de l'unité.

LEMME 3.6. — *Soit $f(n)$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème* 1. *Il existe un entier $K \geq 1$ tel que, pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on ait :*

(i) *Pour q premier à K, $f(nq) = f(n)f(q)$ pour tout n assez grand*;

(ii) *Pour q premier à K, l'inégalité $|f(q)|^{2a} < q^{b-1}$ entraîne la convergence de la série de terme général $|f(n)|^{2a}/n^b$.*

Démonstration. — On peut encore supposer que $f(n)$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang. Pour assurer que (i) est réalisé, il suffit de prendre pour K un multiple de l'entier N introduit dans le LEMME 3.2.

Soit

$$h(n) = \bigl|f(n)\bigr|^2.$$

Alors $h(n)$ est une fonction multiplicative qui vérifie encore une relation de récurrence à coefficients polynômes, puisque c'est le produit de $f(n)$ et de $\overline{f(n)}$, (on a noté $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z) qui possèdent tous les deux cette propriété.

Par le LEMME 3.5, la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)z^n$ n'a pour singularités dans $\mathbb{C}$ que des racines de l'unité, en nombre fini. On note L le plus petit commun multiple des ordres de ces racines de l'unité.

Le LEMME 2.3 montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl|f(n)\bigr|^{2a} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)^a z^n$$

n'a pour singularités que des racines L-ièmes de l'unité. De plus, la série $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^b$ n'a que $z = 1$ comme singularité, donc le produit de Hadamard

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^{2a}}{n^b}\, z^n$$

de ces deux séries n'a aussi pour singularités que des racines L-ièmes de l'unité.

Nous posons maintenant $K = LN$ et nous démontrons l'assertion (ii). Soit donc q un entier premier à K. On a

$$\sum_{\zeta^q=1} w(\zeta z) = \frac{|f(q)|^{2a}}{q^{b-1}} w(z^q) + T(z)$$

où T est un polynôme, en raison de l'égalité $f(nq) = f(n)f(q)$ pour tout n assez grand. Posons :

$$u(z) = -\sum_{\zeta^q=1,\ \zeta\neq 1} w(\zeta z) + T(z).$$

L'égalité précédente s'écrit :

$$w(z) = \lambda w(z^q) + u(z) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{|f(q)|^{2a}}{q^{b-1}} < 1.$$

En itérant cette relation, il vient :

$$w(z) = \lambda^n w(z^{q^n}) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j u(z^{q^j})$$

pour tout entier n.

Nous supposons maintenant que z appartient à $[0,1] = I$. Chacune des fonctions $w(\zeta z)$ est alors continue sur I, pour $\zeta \neq 1$, par le choix de q, premier à L. Il en est donc ainsi de $u(z)$. Comme $\lambda < 1$, la série de terme général $\lambda^j u(z^{q^j})$ va donc converger uniformément sur I, et sa somme sera égale à $w(z)$ sur $[0,1[$, puisque $\lambda^n w(z^{q^n})$ tend vers 0 si $|z| < 1$.

En particulier, la somme de la série à termes positifs $w(z)$ va donc être bornée sur $[0,1[$. La série $|f(n)|^{2a}/n^b$ est donc convergente, ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3.7. — *Soit ω un réel positif, et $\gamma \in \mathbb{C}$. Soit*

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+\omega)^\gamma z^n.$$

Si la série $\psi(z)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes, alors on a $\gamma \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une relation de la forme

$$\sum_{j=0}^{t} P_j(n)\big(n+j+\omega\big)^\gamma,$$

les P_j étant des polynômes avec P_t non nul. Il en résulte que

$$\bigl(n+t+\omega\bigr)^{\gamma} = \sum_{j=0}^{t-1} Q_j(n)\bigl(n+j+\omega\bigr)^{\gamma},$$

les Q_j étant des fractions rationnelles. Posons

$$F(z) = \bigl(1+(t+\omega)z\bigr)^{\gamma} - \sum_{j=0}^{t-1} Q_j(1/z)\bigl(1+(j+\omega)z\bigr)^{\gamma}$$

où, pour définir $(1+(j+\omega)z)^{\gamma}$, on a utilisé une définition convenable du logarithme.

La fonction $F(z)$ est méromorphe dans un tel domaine (par exemple dans $D_1 = \mathbb{C}-]-\infty, -1/(t+\omega)]$) et on a $F(1/n) = 0$ pour tout $n > 0$. Il en résulte que $F(z) = 0$ dans tout le domaine considéré.

L'égalité

$$\bigl(1+(t+\omega)z\bigr)^{\gamma} = \sum_{j=0}^{t-1} Q_j(1/z)\bigl(1+(j+\omega)z\bigr)^{\gamma}$$

montre qu'alors la fonction $(1+(t+\omega)z)^{\gamma}$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $D_2 = \mathbb{C}-]-\infty, -1/(t-1+\omega)]$ qui contient le point $-1/(t+\omega)$. Par suite, γ appartient à $\mathbb{Z}$, ce qui termine la démonstration.

LEMME 3.8. — *Soit $g(n)$ une fonction multiplicative de $\mathbb{N}^*$ dans $]0,+\infty[$. On suppose que $g(n) = 1$ pour tout n premier à un entier $M \geq 1$ et, que, pour un réel positif $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que $g(n) \leq c_\varepsilon n^{\epsilon}$. Alors on a :*

$$\limsup \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} g(n)^2 < +\infty.$$

Démonstration. — Soit F l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers divisent M. On a :

$$\sum_{1\leq n\leq x} g(n)^2 = \sum_{b\in F,\ b\leq x} \sum_{\substack{a\leq x/b\\ a\wedge M=1}} g(ab)^2.$$

Donc, puisque $g(a) = 1$ si a est premier à M :

$$\sum_{1\leq n\leq x} g(n)^2 = \sum_{b\in F,\ b\leq x} \operatorname{card}\bigl\{a\leq x/b,\ a\wedge M=1\bigr\} g(b)^2.$$

On a donc :

$$\frac{1}{x}\sum_{1\leq n\leq x} g(n)^2 \leq \sum_{b\in F,\ b\leq x} \frac{g(b)^2}{b}.$$

L'hypothèse sur ε montre alors que la série au second membre converge, et termine la démonstration du lemme.

4. Preuve des théorèmes

Nous supposerons dans toute la suite que la fonction f n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

Preuve du théorème 1. — Soit K l'entier introduit dans le LEMME 3.6, et q un entier premier à K. On suppose de plus que $f(q) \neq 0$ (il suffit pour cela que q soit assez grand d'après le LEMME 3.3).

De l'égalité $f(nq) = f(n)f(q)$ pour tout n assez grand, on déduit qu'il existe un entier m tel que pour tout $n \geq m+1$ on ait :

$$f(q^n) = f(q)^{n-m} f(q^m).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|f(q^n)|}{n\log q} = \frac{\log|f(q)|}{\log q}.$$

Posons

$$\gamma_q = 2\,\frac{\log|f(q)|}{\log q},$$

et soit $r = b/a$ (avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$) un nombre rationnel tel que $r > \gamma_q$. Soit $m \geq 1$ un entier assez grand tel que

$$q\Big(\frac{|f(q)|^{2a}}{q^b}\Big)^m < 1.$$

Un tel entier existe car

$$\frac{|f(q)|^2}{q^r} < \frac{|f(q)|^2}{q^{\gamma_q}} = 1.$$

D'après le LEMME 3.6, la série numérique $|f(n)|^{2am}/n^{bm}$ est convergente. Elle est donc bornée.

Soit alors y un autre entier vérifiant les mêmes conditions que q. Du fait que la suite $|f(y^n)|^{2am}/y^{bnm}$ est bornée, on déduit facilement que

$$\gamma_y = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log|f(y^n)|}{n\log y} \leq \frac{b}{a} = r.$$

Comme ceci est vrai pour tout rationnel $r > \gamma_q$, on en déduit que pour tout couple q, y on a $\gamma_y \le \gamma_q$. Par suite, on a en fait l'égalité entre toutes ces quantités, et, pour q premier à K et assez grand, on a :

$$\left|f(q)\right|^2 = q^\gamma$$

où γ est un nombre réel indépendant de q. La suite $|f(n)|^2$ vérifie, comme nous l'avons déjà vu, une relation de récurrence à coefficients polynômes en la variable n. Il en est donc de même de la suite

$$w(n) = \left|f(nV+1)\right|^2$$

pour $n \ge 1$, où on a choisi V assez grand et multiple de K. On a alors $w(n) = (nV+1)^\gamma$ pour tout $n \ge 1$ d'après ce qui précède. On en déduit que la suite $(n+\omega)^\gamma$ avec $\omega = 1/V$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômes, et le LEMME 3.7 montre qu'alors γ appartient à $\mathbb{Z}$.

Soit ε un réel positif. D'après ce qui précède, on a :

$$\left|f(n)\right|^2 \le cn^{\gamma+\varepsilon}$$

pour une constante positive c et pour tout entier $n \ge 1$.

En choisissant ε assez petit, il en résulte que la fonction multiplicative $g(n) = |f(n)|^2/n^\gamma$ vérifie les hypothèses du LEMME 3.8, de sorte que :

$$\limsup \frac{1}{x} \sum_{1\le n\le x} g(n)^2 < +\infty.$$

Comme d'autre part, $g(p) = 1$ pour tout nombre premier assez grand, il en résulte que les deux séries

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{g(p)-1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{p \text{ premier}} \frac{(g(p)-1)^2}{p}$$

sont convergentes. La série suivante est visiblement convergente :

$$\sum_{\substack{k\ge 2\\ p \text{ premier}}} \frac{g(p^k)}{p^k}$$

Enfin, chacune des sommes $\sum_{k=0}^{\infty} g(p^k)/p^k$ est différente de zéro car $g(1) = 1$ et $g(n) \ge 0$ pour tout $n \ge 1$.

On peut alors utiliser la PROPOSITION 2.6 : la moyenne

$$M(g) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \le x} g(n)$$

existe et est non nulle.

D'après la PROPOSITION 2.7, la série $v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) z^n$ est soit rationnelle, soit non prolongeable au delà du cercle unité. Comme de plus $v(z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes, ce dernier cas est exclut et donc $v(z)$ est une série rationnelle. On a donc $g(n) = n^h \omega(n)$ où $\omega(n)$ est une fonction multiplicative périodique, d'après le THÉORÈME S. On a donc démontré que

$$|f(n)|^2 = n^k \omega(n),$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\omega(n)$ fonction multiplicative périodique.

Posons

$$\beta(n) = \sqrt{\omega(n)}.$$

Alors $\beta(n)$ est aussi une fonction multiplicative et périodique. Soit

$$h(n) = \begin{cases} f(n)/\beta(n) & \text{si } \beta(n) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $h(n)$ est multiplicative et vérifie pour tout n entier

$$|h(n)|^2 = n^k \quad \text{ou} \quad h(n) = 0.$$

Elle vérifie encore une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients polynômes en la variable n. De plus, $|h(p)|^2 = p^k$ pour tout nombre premier assez grand.

Nous supposons maintenant que $f(n)$ est à valeurs réelles.

Supposons k impair, $k = 2m + 1$. Alors la suite

$$w(n) = \frac{h(n)}{n^m}$$

vérifie encore une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômes en la variable n, et pour tout p premier assez grand, on a $w(p) = \pm\sqrt{p}$ puisque $f(n)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère de nouveau une relation de récurrence à coefficients polynômes en la variable n vérifiée par $f(n)$:

$$\sum_{i=0}^{s} P_i(n)f(n+i) = 0.$$

Soit M un entier tel que $n \geq M$ implique $P_s(n) \neq 0$. Soit K l'extension de type fini de $\mathbb{Q}$ engendrée par tous les coefficients des P_i et les valeurs $f(n)$, pour $n \leq M + s$.

On voit alors que $f(n)$ appartient à K pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite, les racines carrées de tous les nombres premiers assez grands sont dans K, ce qui est absurde, et cette contradiction montre que k est un nombre pair.

On pose alors

$$t(n) = \frac{h(n)}{n^{k/2}}$$

qui est encore une suite vérifiant une relation de récurrence à coefficients polynômes en la variable n. Les valeurs prises par $t(n)$ sont alors 0 et ± 1, et le LEMME 2.5 montre que la suite $h(n)$ est une suite récurrente linéaire à coefficients constants.

On applique alors le THÉORÈME S, et ceci termine la démonstration de cette partie du THÉORÈME 1.

Nous supposons maintenant que $f(n)$ appartient à $\mathbb{C}$, avec la propriété que $f(n) \neq 0$ pour tout n entier.

Il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer que

$$|f(n)|^2 = n^k$$

pour tout n, avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit

$$f^*(n) = \frac{f(n)^2}{n^k}.$$

La fonction $f^*(n)$ vérifie encore une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients polynômes en la variable n, est encore multiplicative et est de module 1 pour tout n.

La série

$$g^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f^*(n)z^n$$

ne possède donc que des racines de l'unité comme singularités dans $\mathbb{C}$. Soit L le plus petit commun multiple de leurs ordres, et soit :

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^*(nL)}{f^*(L)} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)z^{n-1}.$$

La série $v(z)$ ne possède plus comme singularité dans $\mathbb{C}$ que le point $z=1$. Il en est de même de la série dont les coefficients de Taylor sont les conjugués de la série $v(z)$, cette série étant l'inverse au sens de Hadamard de la série $v(z)$, puisque les coefficients de Taylor de $v(z)$ sont de module 1.

Ces deux séries vérifient des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients polynômes, en utilisant le LEMME 2.2. Il en résulte que toutes les deux sont prolongeables analytiquement en dehors du disque unité.

Par le LEMME 2.9, il en résulte que $a(n+1)/a(n)$ tend vers 1 si n tend vers l'infini. Comme $a(n)$ est de module 1, on en déduit que $a(n+1)-a(n)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

La fonction $a(n)$ est encore une fonction multiplicative comme $f^*(n)$. On peut donc appliquer le théorème de Wirsing (LEMME 2.10), qui montre qu'il existe un nombre complexe imaginaire pur τ tel que $a(n)=n^\tau$ pour tout n.

Le LEMME 3.7 montre alors que $\tau=0$. Nous avons donc démontré que

$$\frac{f^*(nL)}{f^*(L)}=1 \quad \text{pour tout } n.$$

En particulier, en prenant n premier à L, on voit que $f^*(n)=1$.

On a donc $f(n)=\pm n^{k/2}$ pour tout n premier à L. Un argument déjà rencontré plus haut montre alors que k est un entier pair. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^{k/2}}z^n$$

vérifie alors une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. Posons

$$f^{**}(n)=\frac{f(n)}{n^{k/2}}.$$

On a alors $f^{**}(nL)^2=f^{**}(L)^2$ pour tout n entier, d'après la relation vérifiée par la fonction $f^*(n)$.

Soit n premier à L. On a alors $f^{**}(n)=\pm 1$. Soit maintenant p un diviseur premier de L, et β la valuation p-adique de L. On pose $L_p=Lp^{-\beta}$, et soit $\gamma>\beta$.On a : $p^{\gamma-\beta}L=p^\gamma L_p$, donc, puisque $f^{**}(n)$ est multiplicative :

$$f^{**}\left(p^{\gamma-\beta}L\right)^2=f^{**}(p^\gamma)^2 f^{**}(L_p)^2=f^{**}(L)^2$$

de sorte que $f^{**}(p^\gamma)^2$ est égale à une quantité fixe, indépendante de $\gamma>\beta$.

On en déduit que la fonction multiplicative $f^{**}(n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} f^{**}(n)z^n$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes, le LEMME 2.5 montre que c'est une fraction rationnelle. Une application du THÉORÈME S termine alors la démonstration.

Preuve du théorème 2. — La série $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n$ est algébrique; elle vérifie donc une équation différentielle homogène, linéaire, à coefficients polynômes en la variable z.

Nous pouvons donc utiliser les résultats que nous venons de démontrer. En particulier, si la série $g(z)$ n'est pas un polynôme, elle n'a comme singularités que des racines de l'unité.

Nous utilisons maintenant le LEMME 2.8. On peut donc écrire

$$f(n) = n^r\big(A_1c_1^n + \cdots + A_tc_t^n\big) + \mathrm{o}(n^r),$$

les c_i étant des racines L-ièmes de l'unité et $r \in \mathbb{Q}$, $r \notin -\mathbb{N}^*$. Nous savons de plus que $f(n)$ est multiplicative. Soit n un entier non nul fixé et p un entier premier tel que p soit premier à n, et supposons que l'on ait pour tout $i = 1, \dots, t$ les égalités $c_i^p = c_i$. Il suffit pour cela de choisir $p \equiv 1$ modulo L, et il y a donc une infinité de tels p.

De l'égalité $f(np) = f(n)f(p)$, on déduit que :

$$\begin{aligned}(np)^r\big(A_1c_1^{np} + \cdots + A_tc_t^{np}\big) &+ \mathrm{o}\big((np)^r\big)\\ &= f(n)\big(p^r(A_1c_1^p + \cdots + A_tc_t^p) + \mathrm{o}(p^r)\big).\end{aligned}$$

Tenant compte du choix de p, et en simplifiant par p^r, il vient :

$$n^r\big(A_1c_1^n + \cdots + A_tc_t^n\big) + \mathrm{o}(1) = f(n)\big(A_1c_1 + \cdots + A_tc_t\big) + \mathrm{o}(1),$$

les $\mathrm{o}(1)$ étant entendus quand p tend vers l'infini, n étant fixé. En faisant tendre alors p vers l'infini, il vient :

$$n^r\big(A_1c_1^n + \cdots + A_tc_t^n\big) = f(n)\big(A_1c_1 + \cdots + A_tc_t\big) = Bf(n).$$

La quantité B ne peut être nulle. En effet, si c'est le cas, on a

$$n^r\big(A_1c_1^n + \cdots + A_tc_t^n\big) = 0$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui implique $A_i = 0$ pour tout i. On a donc

$$f(n) = n^r\big(D_1c_1^n + \cdots + D_tc_t^n\big)$$

pour tout n entier, les D_i étant des constantes non nulles. On considère alors

$$f(nL+1) = (nL+1)^r$$

(nous avons utilisé le fait que $f(1) = 1$). Cette suite vérifie une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients polynômes en la variable n, ce qui permet d'appliquer le LEMME 3.7. On a donc $r \in \mathbb{Z}$. De plus, on sait que r n'est pas dans $-\mathbb{N}^*$, ce qui montre que r appartient à $\mathbb{N}$, et termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[AG] AGMON (S.). — *On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients*, Pacific J. Math., t. **2**, 1952, p. 431–453.

[BE1] BEZIVIN (J.-P.). — *Une généralisation du théorème de Skolem-Mahler-Lech*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2), t. **40**, 1989, p. 133–138.

[BE2] BEZIVIN (J.-P.). — *Sur un théorème de Polya*, J. reine Angew. Math., t. **364**, 1986, p. 60–68.

[BI] BIEBERBACH (L.). — *Analytische Forsetzung*. — Springer Verlag, Berlin, 1955.

[EL] ELLIOT (P.D.T.A.). — *A mean value theorem for multiplicative functions*, Proc. London Math. Soc., t. **31**, 1975, p. 418–438.

[HEMA] HEPPNER (R.) and MAXSEIN (T.). — *Potenzreihen mit multiplicativen Koeffizienten*, Analysis, t. **5**, 1985, p. 87–95.

[JU] JUNGEN (R.). — *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence*, Comment. Math. Helv., t. **3**, 1940, p. 266–306.

[KA1] KATAI (I.). — *Characterization of arithmetical functions, problems and results*, Proc. International Conference on Number Theory, Université Laval, 1987, De Koninck, C. Levesque eds., De Gruyter 1989, p. 544–555.

[KA2] KATAI (I.). — *Arithmetical functions satisfying some relations*, Acta Math. Sci., t. **55**, 1991, p. 249–268.

[KAN] KANOLD (H.J.). — *Ueber periodische multiplicative Zahlentheorische Funktionen*, Math. Ann., t. **144**, 1961, p. 135–141.

[LU] LUCHT (L.). — *Exposé au journées arithmétiques de Bordeaux*, septembre 1993.

[LUTU] Lucht (L.) and Tuttas (F.). — *Mean values of multiplicative functions and natural boundaries of power series with multiplicative coefficients*, J. London Math. Soc. (2), t. **19**, 1979, p. 25–34.

[RA] Ramis (J.-P.). — *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **48**, 296, p. 1984.

[RU] Rubel (L.). — *Some research problems about differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **280**, 1983, p. 43–52.

[SA] Sarkozy (A.). — *On multiplicative arithmetic functions satisfying a linear recursion*, Studia Sci. Math. Hungar., t. **13**, 1978, p. 79–104.

[TS] Tsuji (M.). — *On a power series which has only algebraic singularities on its convergence circle*, J. Math. Soc. Japan, t. **3**, 1926, p. 69–85.