S. GÜNTHER

Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 88-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__88_1>

Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques;
par M. S. Günther.

(Séance du 3 mars 1882.)

Personne n'ignore que certains problèmes d'intégration indéfinie paraissent absolument insolubles, tandis qu'après examen rigoureux l'intégration peut pourtant être effectuée. Nous citerons, par exemple, certaines intégrales transcendantes connues, pour l'évaluation desquelles on n'avait, d'après Hermite (1), d'autre procédé que la différentiation directe, jusqu'à ce que Stern (2) et A. Winckler (3) aient fait voir qu'on pouvait les traiter par des

(1) Hermite, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, p. 260. Paris, 1873.
(2) Stern, *Ueber den Werth einiger Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 340).
(3) A. Winckler, *Unbestimmte Integration einer Gattung transcändenter Func*

méthodes simples. Les exemples n'en manquent pas non plus dans la théorie des intégrales elliptiques; on sait que toute intégrale de la forme

$$\int f[x, \mathrm{R}(x)]\,dx,$$

où f désigne n'importe quelle fonction algébrique, et $\mathrm{R}(x)$ la racine carrée d'une expression cubique ou biquadratique, passe pour irréductible en termes finis, c'est-à-dire pour s'exprimer seulement par les trois formes canoniques de Legendre. Cependant, suivant la nature particulière de la fonction f, l'intégration en forme finie peut quelquefois s'effectuer; et en effet Legendre a soumis, dans son célèbre Ouvrage ([1]), cette possibilité à une discussion approfondie. Clausen ([2]) a traité plus tard une des intégrales examinées par Legendre. Enfin, de nos jours, un essai de Malet ([3]) a dirigé de nouveau l'attention sur ces intégrales *pseudo-elliptiques,* pour les appeler par ce nom. Il étudiait le cas spécial, où $\mathrm{R}(x) = 0$ représente une équation réciproque du quatrième degré, et il fit voir que l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{\left(x \pm \frac{1}{x}\right) dx}{\sqrt{ax^4 \mp bx^3 + cx^2 \mp bx + a}}$$

peut être évaluée immédiatement.

Parmi les intégrales pseudo-elliptiques connues aujourd'hui, une des plus intéressantes est la suivante :

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}}.$$

Legendre et Clausen s'en sont occupés; et ce dernier analyste,

---

tionen (*Sitzungsberichte d. math.-phys. Classe der Œsterr. Acad.,* t. LXX. Vienne, 1874).

([1]) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes,* t. I, p. 136. Paris, 1827.

([2]) Clausen, *Ueber ein Integral in Legendre's Traité des fonctions elliptiques* (*Astronom. Nachrichten,* n° 442; *Archiv der Mathem. und Physik,* IIIe Partie, p. 335).

([3]) Malet, *Two theorems in integration* [*Annali di Matematica pura ed applicata,* t. VI, (2), p. 252].

si réputé pour son habileté à transformer les expressions algébriques, a fait usage d'un procédé dont on ne peut s'empêcher d'admirer l'extrême élégance, quoiqu'on ne saisisse pas bien pourquoi il a choisi justement cette voie. C'est ce point que nous avons entrepris d'éclaircir, et nous croyons avoir atteint notre but. Envisageant la méthode de Clausen, nous sommes parvenus à la conception d'un criterium au moyen duquel on peut décider en certains cas si une intégrale elliptique proposée possède effectivement ce caractère, ou bien si elle n'en a que les apparences.

Opérant sur la fraction

$$\frac{x}{x^3+8},$$

et posant

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{\alpha x^2}{x^3+8} + \frac{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2}{x+2},$$

l'identification donne les valeurs

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2},$$

et l'on obtient par là

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{x^3+8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x+2}.$$

En désignant par B_1, B_2, B_3 ces trois fractions, abstraction faite de leurs coefficients constants, nous aurons

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{6x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}} \\ &= \frac{3}{2}\int\frac{B_1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{B_2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{B^3}{\sqrt{x^3-1}} + \text{const.} \end{aligned}$$

Il existe un théorème général qui s'applique à ces trois intégrales et que l'on pourrait nommer le théorème *des coefficients indéfinis*. En voici l'énoncé :

Lorsque l'on cherche si l'intégrale

$$S = \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\frac{dx}{\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}},$$

dans laquelle $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *représentent deux fonctions algébriques entières, respectivement d'ordre* P *et* N, *est une intégrale elliptique ou si elle peut s'effectuer sous forme finie, on posera*

$$y = \frac{\alpha x^{N-P+2} + \beta x^{N-P+1} + \ldots + \mu x + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

et l'on formera l'expression

$$\frac{dy}{my^2 + n}.$$

En posant ensuite

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\zeta\varphi(x)\,dx}{\psi(x)\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

ζ *désignant un facteur arbitraire constant, on obtiendra par l'identification des coefficients de* x^0, x^1, x^2, ... *un système d'équations. La simultanéité de ces équations est une condition suffisante pour que l'intégrale* S *appartienne aux intégrales pseudo-elliptiques.*

On obtient, en effet, en posant

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = p, \quad py = z,$$

$$S = \frac{1}{\zeta}\int \frac{dy}{my^2 + n} = \frac{1}{\zeta n}\int \frac{dy}{1 + p^2y^2} = \frac{1}{\zeta np}\int \frac{dz}{1 + z^2},$$

ou enfin

$$S = \frac{1}{\zeta np}\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{\zeta\sqrt{mn}}\operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{\frac{m}{n}}\,\frac{\alpha x^{N-P+2} + \ldots + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}\right],$$

où il faudrait encore ajouter la constante arbitraire.

On voit immédiatement qu'une des nouvelles inconnues $\alpha, \beta, \ldots, \mu, r, m, n$ reste toujours arbitraire et que notre problème se réduit à exprimer par elle toutes les autres.

Appliquons maintenant notre règle générale à chacune des trois intégrales de Clausen. Considérant d'abord la plus simple,

$$S_1 \equiv \int \frac{B^3\,dx}{2\sqrt{x^3 - 1}},$$

nous écrirons d'après notre méthode

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad dy = \frac{(x^3 - 1)(4\alpha x + 2\beta) - 3x^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{2(x^3 - 1)\sqrt{x^3 - 1}},$$

et

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\alpha x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[m\alpha^2 x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x - 1}{x + 2}.$$

D'où l'on tire ces six équations :

I. $\alpha = m\alpha^2,$

II. $-\beta + 2\alpha = 2m\alpha\beta + n - m\alpha^2,$

III. $-3\gamma - 2\beta = m\beta^2 + 2m\alpha\gamma - 2m\alpha\beta - n,$

IV. $-4\alpha - 6\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2 - 2m\alpha\gamma,$

V. $-2\beta - 8\alpha = m\gamma^2 - n - 2m\beta\gamma,$

VI. $-4\beta = -m\gamma^2 + n.$

En éliminant $n = m\gamma^2 - 4\beta$ des équations II et III, nous obtenons ce nouveau système :

I. $m\alpha = 1,$

II^a. $3\alpha + \beta = m\gamma^2,$

III^a. $-4\beta - 5\gamma = m\beta^2 - m\gamma^2,$

IV^a. $-4\alpha - 4\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2.$

En éliminant ensuite $m = \frac{1}{\alpha}$ nous obtenons trois équations homogènes pour α, β, γ

II^b. $3\alpha^2 + \alpha\beta = \gamma^2.$

III^b. $-4\alpha\beta - 5\alpha\gamma = \beta^2 - \gamma^2,$

IV^b. $-4\alpha^2 - 4\alpha\gamma = 2\beta\gamma - \beta^2.$

Enfin l'élimination de l'inconnue α nous donne les deux équations

II^c. $\beta^4 + 5\beta^3\gamma + 18\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^3 + 22\gamma^4 = 0,$

IV^c $4\beta^3 + 27\beta^2\gamma + 54\beta\gamma^2 + 32\gamma^3 = 0.$

Il faut donc résoudre l'équation cubique

$$4\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3+27\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+54\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)+32=0,$$

qui nous donne la valeur réelle $\frac{\beta}{\gamma}=-2$, $\beta=-2\gamma$. Or, en substituant cette valeur dans l'équation II^b, nous aurons $\alpha=\gamma$ et, à cause de l'équation I, $m=\frac{1}{\gamma}$. Enfin nous tirons de l'équation VI la valeur $n=\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma^2+4\cdot2\gamma=9\gamma$. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu égard à l'équation V, mais si l'on y substitue les valeurs obtenues pour α, β, m, n, on voit qu'elle est identiquement satisfaite.

On reconnaît aussi sans difficulté que γ disparaît des calculs. Nous obtiendrons de cette manière

$$y=\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x^3-1}},\quad \frac{dy}{my^2+n}=\frac{dy}{y^2+9},$$

et

$$\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x+2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}=\int\frac{dy}{y^2+9}=\frac{1}{9}\int\frac{dy}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{3},$$

ou

$$S_1=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}}+\text{const.}$$

Par là se trouve aussi résolue une question proposée dernièrement par Realis [1]; la deuxième intégrale

$$\int\frac{x+1}{x-2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

dont il propose la recherche se ramène sans difficulté à la précédente, et probablement aussi la troisième, qui se présente sous la forme plus compliquée

$$\int\frac{x^2-x+4}{x^2-x+2}\frac{dx}{\sqrt{x^3+Ax^2-3x-2}}$$

peut être soumise à une méthode analogue d'évaluation.

---

[1] Realis, Question proposée n° 102 (*Mathesis*, t. II, p. 48).

Arrivons maintenant à l'intégrale

$$S_2 \equiv \int \frac{B_2\, dx}{2\sqrt{x^3 - 1}}.$$

Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ possèdent aussi dans ce cas le même degré; le nombre $(N - P)$ est nul et nous avons comme équation fondamentale la suivante :

$$\frac{\alpha x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[m\alpha^2 x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 4}.$$

La multiplication élevant chaque membre de cette équation au sixième degré, on obtient sept équations pour le calcul des grandeurs $\alpha, \beta, \gamma, m, n$; ce sont les suivantes :

$$\begin{array}{lrl}
\text{I.} & \alpha & = -m\alpha^2, \\
\text{II.} & -2\alpha - \beta & = -2m\alpha\beta - n + 2m\alpha^2, \\
\text{III.} & -3\gamma + 2\beta + 4\alpha & = -m\beta^2 - 2m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta + 2n + 2m\alpha^2, \\
\text{IV.} & -4\alpha + 6\gamma - 4\beta & = -2m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta + 2n, \\
\text{V.} & -2\beta + 8\alpha - 12\gamma & = -m\gamma^2 + n + 4m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma, \\
\text{VI.} & -16\alpha + 4\beta & = 2m\gamma^2 - 2n + 4m\beta\gamma, \\
\text{VII.} & -8\beta & = 2m\gamma^2 - 2n.
\end{array}$$

On réduit avec avantage toutes ces inconnues à la grandeur n et l'on trouve d'une manière semblable à celle que nous avons exposée plus haut

$$\alpha = 0, \quad \beta = n, \quad \gamma = -n, \quad m = -\frac{3}{n}, \quad n = n,$$

et alors par la différentiation directe $n = \zeta = 1$. Ainsi on obtient

$$y = \frac{x - 1}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad \frac{dy}{my^2 + n} = \frac{dy}{-3y^2 + 1}$$

et, pour $z = \pm\sqrt{3}.yi$,

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x + 4}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \int \frac{dy}{-3y^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{-3}}.\int \frac{dz}{1 + z^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-3}} \text{ arc tang } z,$$

ou

$$S_2 = -\frac{i}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{3}\, i \frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}}\right] + \text{const.}$$

On sait que toute fonction trigonométrique inverse de cette forme peut être transformée en un logarithme réel, ce qui donne pour S_2 la valeur

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{1+y\sqrt{3}}{1-y\sqrt{3}} + \text{const.}$$

et après la substitution de x

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

La troisième intégrale de Clausen appartient évidemment à une autre catégorie, parce que la fonction $\psi(x)$ y surpasse la fonction $\varphi(x)$ à l'égard de son degré. Il faut dans notre théorème poser $N - P = 1$. Si l'on pose

$$y = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{\sqrt{x^3-1}},$$

$$dy = \frac{3\alpha x^5 + \beta x^4 - \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{2(x^3-1)\sqrt{x^3-1}}\, dx,$$

et si l'on forme alors l'expression

$$\frac{dy}{my^2+n},$$

on obtient l'équation

$$\frac{3\alpha x^5 + \beta x^4 - \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{m\alpha^2x^6 + 2m\alpha\beta x^5 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^4 + (2m\alpha\delta + 2m\beta\gamma + n)x^3 + (m\gamma^2 + 2m\beta\delta)x^2 + 2m\gamma\delta x + (m\delta^2 - n)}$$
$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{x^3+8}.$$

L'identification donne alors les neuf équations

I. $$3\alpha = 3m\alpha^2,$$

II. $$\beta = 6m\alpha\beta,$$

III. $$-\gamma = 3m\beta^2 + 6m\alpha\gamma,$$

IV. $$-6\alpha + 24\alpha - 3\delta = 6m\alpha\delta + 6m\beta\gamma + 3n,$$

V. $$-4\beta + 8\beta = 3m\gamma^2 + 6m\beta\delta,$$

VI. $$-2\gamma - 8\gamma = 6m\gamma\delta,$$

VII. $$-48\alpha - 24\delta = 3m\delta^2 - 3n,$$

VIII. $$-32\beta\gamma = 0,$$

IX. $$-16\gamma = 0.$$

La résolution de ce système s'exécute avec beaucoup moins de difficulté que celle des deux systèmes antérieurs. La valeur $\gamma = 0$ découle immédiatement de l'équation IX, et l'équation III donne alors $\beta = 0$. En ajoutant les deux équations IV et VII on obtient

$$-30\alpha - 27\delta = 6m\alpha\delta + 3m\delta^2,$$
$$-10\alpha - 9\delta = 2m\alpha\delta + m\delta^2,$$

ou, à cause de l'équation I $\left(m = \frac{1}{\alpha}\right)$,

$$-10\alpha - 9\delta = 2\delta + \frac{\delta^2}{\alpha},$$
$$\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 + 11\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = -10.$$

Cette équation possède les deux racines réelles $\frac{\delta}{\alpha} = -10$ et $\frac{\delta}{\alpha} = -1$, mais on gagne facilement la persuasion que la première ne satisfait pas au système entier et qu'il faut pour cela choisir la seconde. En substituant $\delta = -\alpha$ dans l'une des équations IV ou VII on calcule $n = 9\alpha$, et la série de nos valeurs est alors la suivante :

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\alpha, \quad m = \frac{1}{\alpha}, \quad n = 9\alpha.$$

Quant à la grandeur α, la différentiation nous apprend qu'il faut prendre $\alpha = \zeta = 1$. Or, on est parvenu au résultat

$$\frac{3}{2}\int\frac{x^2\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}} = \int\frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{3}$$

ou

$$S_3 = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x^3-1}{3\sqrt{x^3-1}} + \text{const.} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{x^3-1}}{3} + \text{const.}$$

Si l'on résume tous les résultats précédents, on peut écrire

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{x^3-1}}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}\right]$$

ou, par l'application de la formule connue

$$\operatorname{arc\,tang} u + \operatorname{arc\,tang} v = \operatorname{arc\,tang}\frac{u+v}{1-uv}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{18}\operatorname{arc\,tang}\frac{3x(x-1)}{(4-x)\sqrt{x^3-1}} + \frac{1}{12\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

C'est la formule donnée par Clausen. Nous espérons que le lecteur sera d'accord avec nous dans l'opinion que le chemin dont la poursuite nous a conduit à ce résultat a été réellement celui du mathématicien allemand. Notre théorème n'éclaircit pas seulement un calcul qui semble mystérieux au premier abord, mais il peut aussi, dans beaucoup de cas, servir de critérium pour reconnaître si une intégrale elliptique donnée peut s'effectuer en termes finis.