BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 137-139

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__137_1>

Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. Weill.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale d'ordre ρ définie par les équations

$$x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\ldots(t-\zeta)}, \quad y = \frac{f_1(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\ldots}.$$

Soit un système de courbes de degré m dont l'équation contient un paramètre variable λ au degré k. Nous nous proposons de trouver le lieu du centre des moyennes distances des sommets du polygone formé par les points communs à la courbe variable et à la courbe fixe.

L'équation de la courbe variable étant

$$(1) \qquad \lambda^k S_m + \lambda^{k-1} S_{1m} + \ldots + \Sigma_m = 0,$$

les valeurs du paramètre t correspondant aux points considérés satisferont à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1), x et y par leurs valeurs en fonction de t, équation qui sera de la forme

$$(2) \qquad \lambda^k \varphi_{m\rho}(t) + \ldots = 0.$$

Les abscisses des points communs seront données par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= A + \frac{B}{t_1 - \alpha} + \frac{C}{t_1 - \beta} + \cdots + \frac{L}{t_1 - \gamma_2}, \\ x_2 &= A + \frac{B}{t_2 - \alpha} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_{m\rho} &= A + \frac{B}{t_{m\rho} - \alpha} + \cdots. \end{aligned}$$

Si donc on désigne par X l'abscisse du centre des moyennes distances, on aura

$$m\rho X = m\rho A + B \sum_1^{m\rho} \frac{1}{t - \alpha} + C \sum_1^{m\rho} \frac{1}{t - \beta} + \cdots,$$

ou bien

$$m\rho X = A + B \frac{\lambda^k \varphi'_{m\rho}(\alpha) + \ldots}{\lambda^k \varphi_{m\rho}(\alpha) + \ldots} + C \frac{\lambda^k \varphi'_{m\rho}(\beta) + \ldots}{\lambda^k \varphi_{m\rho}(\beta) + \ldots} + \cdots.$$

On trouve pour Y une expression analogue, et l'on conclut de là que le centre des moyennes distances décrit une courbe unicursale de degré ρk; soit λ_1 une racine de l'équation

$$\lambda^k \varphi_{m\rho}(\alpha) + \ldots = 0.$$

Pour $\lambda = \lambda_1$, X et Y deviennent infinis, et le rapport $\frac{Y}{X}$ est égal à $\frac{B_1}{B}$: donc les asymptotes de la courbe sont parallèles à celles de la courbe unicursale donnée, et chaque direction asymptotique de la courbe unicursale est une direction asymptotique multiple d'ordre k du lieu cherché.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à une courbe unicursale fixe d'ordre ρ et à un système de courbes d'ordre m, dont l'équation contient un paramètre variable au degré k, est une courbe unicursale d'ordre ρk, ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre k les directions asymptotiques de la courbe unicursale.*

Il faut remarquer que le degré du lieu ne dépend pas de m. Le théorème précédent donne lieu à un grand nombre de résultats particuliers ; l'un des plus intéressants est celui où l'on a $k = 1$: alors le système des courbes variables forme un faisceau, et le lieu λ est une courbe d'ordre ρ, ayant mêmes directions asymptotiques que la courbe unicursale.

En particulier, considérons une conique fixe et un polygone variable inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe. Si l'on appelle t le paramètre définissant un sommet du polygone, nous avons établi que les m valeurs de t correspondant à l'un des polygones satisfaisaient à une équation de degré m dont les coefficients sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ, la variation de ce paramètre correspondant au déplacement continu de ce polygone; dès lors les calculs et les résultats sont applicables, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixe est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit.*

On en conclut, en particulier, que si un polygone se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique, le centre des moyennes distances des sommets décrit un cercle; ce cercle se réduit à un point lorsque la conique à laquelle le polygone est circonscrit a l'un de ses foyers au centre du cercle dans lequel le polygone est inscrit.