SELIVANOFF

Sur les intégrales définies uniformément convergentes

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 147-157
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__147_0>

Sur les intégrales définies uniformément convergentes;
par M. Selivanoff.

(Séances du 19 mai et du 2 juin 1882.)

Supposons que la fonction $f(x, z)$ reste finie et continue entre les limites de l'intégration, lorsqu'on donne à x les valeurs contenues dans un certain contour et que l'intégrale soit finie et déterminée.

La fonction

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x, z)\, dz$$

n'est plus une fonction continue, et généralement l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, z)}{\partial x}\, dz$$

est en défaut.

En effet, supposons que, pour toutes les valeurs de z entre a et b, la fonction soit décomposable de la manière suivante :

$$f(x+h, z) = f(x, z) + h\varphi(x, z) + h\psi(h, z),$$

$\psi(h, z)$ s'annulant pour $h = 0$.

La fonction $\varphi(x, z)$ est alors la dérivée de $f(x, z)$ par rapport à x.

En intégrant, on aura

$$\begin{aligned}\Phi(x+h) &= \int_a^b f(x+h, z)\, dz \\ &= \int_a^b f(x, z)\, dz + h\int_a^b \varphi(x, z)\, dz + h\int_a^b \psi(h, z)\, dz.\end{aligned}$$

Pour que l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x, z)\, dz = \int_a^b \frac{\partial f(x, z)}{\partial x}\, dz$$

soit la dérivée de $\Phi(x)$, il faut et il suffit que

$$\int_a^b \psi(h, z)\, dz = (b-a)\,\psi(h, \zeta)$$

s'annule pour $h = 0$.

Cette condition sera évidemment satisfaite dans le cas où a et b sont finis et $\psi(0, z) = 0$, pour toutes les valeurs de z entre a et b.

Si la fonction $\psi(h, z)$ a la forme $h\psi_1(h, z)$, la condition à laquelle elle est soumise sera satisfaite pourvu que $\psi_1(0, z)$ reste finie entre les limites d'intégration.

Si la fonction $f(x, z)$ a deux dérivées par rapport à x, on peut écrire, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x+h, z) = f(x, z) + hf'(x, z) + \frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h, z).$$

$f''(x, z)$ sera finie, si $f(x, z)$ et $f'(x, z)$ restent finies et continues pour toutes les valeurs de z entre a et b.

Nous avons donc le théorème :

On peut différentier sous le signe $\int$ *l'intégrale*

$$\int_a^b f(x, z)\,dz,$$

ayant ses limites finies, si la fonction $f(x, z)$ *et sa première dérivée restent finies et continues entre les limites d'intégration et si la deuxième dérivée existe.*

Nous nous proposons la question : *Peut-on, dans certains cas, différentier sous le signe, si une des limites d'intégration est infinie?* La proposition précédente est en défaut et il faut trouver un autre moyen de résoudre la question.

Les mêmes difficultés subsistent pour les séries. Chacun des termes de la série est une fonction continue de la variable ; il n'en est pas toujours de même pour la série. La dérivée de la série n'est pas toujours égale à la somme des dérivées de ses termes.

Il y a cependant une classe de séries infinies qui offre une certaine analogie avec les fonctions rationnelles. Ce sont les séries *uniformément convergentes,* ainsi qu'a démontré M. Weierstrass dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* du mois d'août 1880. (*Voir* la traduction française de ce Mémoire dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, avril 1881, p. 161-164.)

La méthode de M. Weierstrass, appliquée aux intégrales définies, donne le moyen de résoudre notre question.

1. L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x, z)\, dz$$

est dite *uniformément convergente* si, pour toutes les valeurs de x contenues dans l'intérieur d'un certain contour, on peut déterminer un nombre p tel, qu'en prenant $m \geqq p$ on ait

$$\operatorname{mod} \int_m^\infty f(x, z)\, dz < k,$$

k étant une quantité aussi petite qu'on voudra, et donnée d'avance.

Considérons la différence

$$\Phi(x+h) - \Phi(x).$$

En partageant l'intégrale en deux parties, nous aurons

$$\begin{aligned} &\Phi(x+h) - \Phi(x) \\ &\quad = \int_a^m [f(x+h, z) - f(x, z)]\, dz \\ &\qquad + \left[\int_m^\infty f(x+h, z)\, dz - \int_m^\infty f(x, z)\, dz\right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est infiniment petit avec h, car il est égal à

$$(m-a)[f(x+h, \zeta) - f(x, \zeta)],$$

ζ étant compris entre a et m.

Si les quantités x et $x+h$ sont contenues dans le contour de convergence uniforme, on a pour le second terme

$$\left| \int_m^\infty f(x+h, z)\, dz - \int_m^\infty f(x, z)\, dz \right| < 2k\ (^1).$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'intégrale est uniformément convergente, elle est une fonction continue, pour les valeurs du paramètre contenues dans le contour de convergence uniforme.

(¹) Le signe | | désigne, d'après M. Weierstrass, le module.

2. Supposons que, *pour toutes les valeurs de z plus grandes que a, on ait le développement*

$$f(x, z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)x + \varphi_2(z)x^2 + \ldots + \varphi_n(z)x^n + \ldots.$$

Si, pour $|x| = r$,

$$|f(x, z)| \leqq g,$$

g étant une fonction de z finie pour $z > a$, on a, d'après une proposition connue,

$$|\varphi_n(z)| \leqq g r^{-n}.$$

En se fondant sur ce théorème, nous avons, pour $|x| = r_1 < r$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{R}_n| &= |\varphi_n(z)x^n + \varphi_{n+1}(z)x^{n+1} + \varphi_{n+2}(z)x^{n+2} + \ldots| \\ &\leqq g\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \left[1 + \frac{r_1}{r} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \ldots\right],\end{aligned}$$

ou

$$|\mathrm{R}_n| \leqq \frac{g}{1 - \frac{r_1}{r}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^n.$$

On voit que, pour toutes les valeurs de x dont le module est $< r$,

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{R}_n(x, z) = 0.$$

En intégrant depuis a jusqu'à m, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_a^m f(x, z)\,dz \\ &\quad = \int_a^m \varphi_0(z)\,dz + x\int_a^m \varphi_1(z)\,dz + \ldots \\ &\qquad + x^{n-1}\int_a^m \varphi_{n-1}(z)\,dz + \int_a^m \mathrm{R}_n(x, z)\,dz.\end{aligned}$$

Le terme complémentaire a pour limite zéro quand m croît indéfiniment, comme on le voit facilement d'après la valeur moyenne de cette intégrale, à savoir

$$(m - a)\mathrm{R}_n(x, \zeta).$$

Mais il est indispensable que *m soit fini et que* $|x| < r$.

Sous ces conditions, l'*intégrale*

$$\int_a^\infty f(x, z)\,dz$$

est développable suivant les puissances croissantes de x.

Nous allons démontrer que *la même proposition a lieu pour l'intégrale*

$$\int_a^\infty f(x, z)\,dz,$$

si elle est uniformément convergente, pour $|x| \leqq r$.

Supposons que

$$\left|\int_m^\infty f(x, z)\,dz\right| \leqq k, \quad |x| \text{ étant } \leqq r.$$

En prenant un nombre m' plus grand que m, mais fini, nous avons

$$\int_m^{m'} f(x, z)\,dz$$
$$= \int_m^{m'} \varphi_0(z)\,dz = x \int_m^{m'} \varphi_1(z)\,dz + \ldots + x^n \int_m^{m'} \varphi_n(z)\,dz + \ldots.$$

Pour $|x| = r$, nous aurons *a fortiori*

$$\left|\int_m f(x, z)\,dz\right| \leqq k,$$

et, d'après le théorème déjà mentionné,

$$\left|\int_m^{m'} \varphi_n(z)\,dz\right| \leqq kr^{-n}.$$

Rien n'oblige maintenant à laisser m' fini, puisque la seconde partie est indépendante de m'.

Nous avons donc

$$\left|\int_m^\infty \varphi_n(z)\,dz\right| \leqq kr^{-n};$$

l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi_n(z)\,dz$$

est par conséquent finie.

Il ne reste plus que quelques mots pour achever la démonstration.

Faisons la différence

$$S = \int_a^\infty f(x, z)\,dz - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^\infty \varphi_n(z)\,dz$$

$$= \int_m^\infty f(x, z)\,dz - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_m^\infty \varphi_n(z)\,dz,$$

puisque nous avons déjà démontré que

$$\int_a^m f(x, z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^m \varphi_n(z)\,dz.$$

Posons $|x| = r_1 < r$,

$$|S| \leq \left| \int_m^\infty f(x, z)\,dz \right| + \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n \left| \int_m^\infty \varphi_n(z)\,dz \right|,$$

ou

$$|S| \leq k + \sum_{n=0}^{\infty} k \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \leq k\left(1 + \frac{r_1}{r - r_1}\right).$$

En faisant grandir m, on peut faire k aussi petit que l'on veut; S, pouvant devenir aussi petite que l'on veut, doit être égal à o, parce qu'elle est indépendante de m. Donc

$$\int_a^\infty f(x, z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^\infty \varphi_n(z)\,dz.$$

3. Voici une conséquence de cette proposition.

Supposons que l'intégrale

$$\Phi(x + h) = \int_a^\infty f(x + h, z)\,dz$$

soit uniformément convergente pour les valeurs de h dont le module est égal ou $< r$ et que la fonction $f(x + h, z)$ soit pour les mêmes valeurs développable suivant les puissances entières et positives de h.

D'après le théorème de Taylor,

$$f(x+h.\,z)=f(x,z)+h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\ldots,$$

et, comme nous avons démontré,

$$\Phi(x+h)$$
$$=\int_a^\infty f(x,z)\,dz+h\int_a^\infty\frac{\partial f}{\partial x}dz+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3-n}\int_a^\infty\frac{\partial^n f}{\partial x^n}dz+\ldots.$$

Nous voyons que $\Phi(x+h)$ est aussi développable suivant les puissances entières et positives de h, ou, d'après M. Weierstrass, la fonction $\Phi(x)$ *se comporte régulièrement dans le voisinage du point* x.

Par conséquent,

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)+h\frac{d\Phi}{dx}+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3-n}\frac{d^n\Phi}{dx^n}+\ldots.$$

En égalant les coefficients, nous trouvons

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_a^\infty f(x,z)\,dz=\int_a^\infty\frac{\partial^n f(x,z)}{\partial x^n}dz.$$

On peut donc différentier sous le signe $\int$ *autant de fois que l'on veut, si, dans le voisinage du point* x, *l'intégrale est uniformément convergente et la fonction* f *se comporte régulièrement.*

4. Comme exemple, considérons l'intégrale

$$\Phi(x)=\int_0^\infty e^{-xz^2}\,dz.$$

Elle est uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles et positives de x, ou imaginaires dont la partie réelle est positive.

En effet, posons

$$x=t+ui,\quad t>0;$$

$$\left|\int_m^\infty e^{-(t+ui)z^2}\,dz\right|<\int_m^\infty e^{-tz}\,dz,$$

ou

$$<\frac{e^{-mt}}{t}.$$

En prenant pour t une valeur positive a, on détermine m de telle façon que

$$\frac{e^{-mt}}{t} < k;$$

cette inégalité aura lieu pour toutes les valeurs de t plus grandes que a.

Donc

$$\left| \int_m^\infty e^{-xz^2} dz \right| < k.$$

La fonction $\Phi(x)$ est continue dans le voisinage de tous les points x situés à droite de l'axe des ordonnées.

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_a^\infty e^{-(x+h)z^2} dz$$

est uniformément convergente pour les valeurs de h telles que les points $x+h$ soient à l'intérieur d'un cercle situé à droite de l'axe des ordonnées et ayant x pour centre.

La fonction $e^{-(x+h)z^2}$ est développable suivant les puissances entières et positives de h dans ce même cercle.

Donc

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty e^{-xz^2} . dz = \int_a^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-xz^2}) dz.$$

5. Comme second exemple, considérons l'intégrale de Laplace

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1+z^2} dz,$$

finie et déterminée pour x réel.

La fonction

$$\frac{\cos(x+h)z}{1+z^2}$$

est développable suivant les puissances entières et positives de h, mais l'intégrale $\Phi(x+h)$ n'est pas uniformément convergente pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur ou égal à r.

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_0^\infty \frac{\cos(x+h)z}{1+z^2} dz$$

devient même infinie, si h est imaginaire. La valeur absolue de $\cos x$ est < 1 seulement dans le cas de x réel. Lorsqu'on donne à x une valeur imaginaire, $\cos x$ croît indéfiniment avec le module de x et de telle façon que

$$\lim \left| \frac{\cos x}{x^n} \right| = \infty, \quad \lim |x| = \infty.$$

Pour reconnaître si l'on peut différentier notre intégrale sous le signe $\int$, il faut recourir à la méthode générale.

En employant la formule de Taylor

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - h^2 \cos(x + \theta h),$$

on trouve sur-le-champ

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) - h \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz - h^2 \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x+\theta h)z}{1+z^2} dz.$$

On a l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = - \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz$$

l'expression

$$h \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x+\theta h)z}{1+z^2} dz$$

s'annule pour $h = 0$, ce qui a lieu en effet.

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos xz}{1+z^2} dz$$

est décomposable en deux :

$$\int_0^\infty \cos xz \, dz - \int_0^\infty \frac{\cos xz \, dz}{1+z^2}.$$

La première intégrale est finie, quoique indéterminée ; la seconde est finie et déterminée. Le produit de cette expression par h s'annule donc pour $h = 0$.

Voici la conclusion :

L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1+z^2} dz$$

peut être différentiée sous le signe et on obtient l'intégrale

$$-\int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2}\,dz,$$

qui est nécessairement finie et déterminée pour toutes les valeurs réelles de x.

Appliquons le même raisonnement à l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2}\,dz.$$

Nous trouverons qu'elle peut être différentiée si l'expression

$$h\int_0^\infty \frac{z^3 \sin(x+\theta h)z}{1+z^2}\,dz$$

s'annule pour $h = 0$.

Nous ne savons pas ce que devient cette expression pour $h = 0$, puisque l'intégrale qui multiplie h est infinie.

Dans ce cas particulier, il y a un moyen indirect de conclure que la différentiation est impossible. Le résultat est l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos xz}{1+z^2}\,dz,$$

indéterminée pour toutes les valeurs réelles de x, et il est impossible qu'elle soit la dérivée d'une fonction finie et déterminée.

On sait que

$$\int_0^\infty \frac{\cos xz\,dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

Par la différentiation, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2} = dz\,\frac{\pi}{2}e^{-x};$$

c'est donc une fonction finie et déterminée ayant une dérivée.

Donc l'égalité

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2}\,dz = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z \sin xz}{1+z^2}\right)dz$$

est en défaut.

6. La règle de différentiation sous le signe $\int$ n'est pas applicable aux intégrales de la forme

$$\Phi(x) = \int_a^b \frac{f(x, z)}{(z-b)^n} dz,$$

puisque la quantité sous le signe devient infinie pour $z = b$.

Cette intégrale a une valeur finie et déterminée, si n est < 1.

En faisant la substitution

$$z - b = \frac{1}{t},$$

nous ramènerons l'intégrale à la forme déjà considérée

$$-\int_{\frac{1}{a-b}}^{\infty} \frac{f\left(x, b + \frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}} dt.$$

La fonction sous le signe $\int$ est finie et continue entre les limites d'intégration.