Bull. Soc. math. France
130 (1), 2002, p. 87–99

UN RÉSULTAT GÉNÉRIQUE D'UNICITÉ POUR LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

PAR LAURE SAINT-RAYMOND

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique, $\mathcal{E}'$ un espace métrique et (S) un système d'équations d'évolution admettant une solution dans $\mathcal{E}'$ pour toute donnée initiale dans $\mathcal{E}$ et stable vis-à-vis des données initiales sur $\mathcal{E}$. On montre que l'ensemble des données initiales pour lesquelles (S) admet une unique solution est un G_δ de $\mathcal{E}$. En particulier, si l'unicité est vraie sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{E}$, elle l'est génériquement.

ABSTRACT (*A generic result of uniqueness for evolution equations*)
Let $\mathcal{E}$ be a topological space, $\mathcal{E}'$ a metric space and (S) a system of evolution equations admitting a solution in $\mathcal{E}'$ for all initial data in $\mathcal{E}$ and stable with respect to initial data on $\mathcal{E}$. We prove that the set of initial data such that (S) admits a unique solution is a G_δ subset of $\mathcal{E}$. In particular, if the uniqueness property is satisfied on a dense subset of $\mathcal{E}$, it holds generically.

1. Unicité et stabilité

L'unicité pour un système d'équations d'évolution est une question importante pour la modélisation de phénomènes physiques. Le but de cet article est de montrer comment cette question est reliée aux problèmes de stabilité.

Texte reçu le 6 décembre 2000, révisé le 24 avril 2001, accepté le 11 mai 2001.

LAURE SAINT-RAYMOND, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris (France) • *E-mail :* saintray@ann.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35A05, 35B30, 35B35.

Mots clefs. — Unicité, stabilité, équations d'évolution.

De manière évidente, si un système (S) est fortement stable sur un espace $\mathcal{E}$ de données initiales, c'est-à-dire si

$$\forall f, g \text{ solutions de } (S), \quad \|f-g\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{E})} \leq C\|f^0 - g^0\|_{\mathcal{E}},$$

le système (S) admet une unique solution dans $\mathcal{E}$. Cependant, ce type d'estimation de stabilité n'est valable que pour des solutions régulières dont on ne sait pas prouver l'existence en général.

L'idée est donc d'obtenir une condition analogue pour des solutions faibles. Un premier pas dans cette direction est fait grâce à des estimations de stabilité fort-faible :

$$\forall f \text{ solution régulière, } \forall g \text{ solution de } (S),$$
$$\|f-g\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{E})} \leq C(f)\|f^0 - g^0\|_{\mathcal{E}}.$$

On peut alors montrer que si le système (S) a une solution régulière f, toutes les solutions de même donnée initiale coincident avec f. Mais on n'a pas d'unicité pour des données initiales non régulières.

Pour obtenir de l'unicité dans un cadre plus général, il faudrait pouvoir relier cette question à la stabilité faible, c'est-à-dire à une propriété du type :

(P) $\left\{\begin{array}{l}\text{soit } f_n^0 \rightharpoonup f^0, \text{ et } f_n \text{ une solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f_n^0, \text{ toute} \\ \text{valeur d'adhérence } f \text{ de } (f_n) \text{ est solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f^0.\end{array}\right.$

2. Résultat général

Le résultat que nous donnons ici répond partiellement à la question ci-dessus :

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique, $\mathcal{E}'$ un espace métrique et (S) un système d'équations d'évolution admettant une solution dans $\mathcal{E}'$ pour toute donnée initiale dans $\mathcal{E}$ et tel que :*

$(H1)$ *le système (S) est stable sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire qu'on suppose : pour tout $f^0 \in \mathcal{E}$, pour toute famille (f_ϵ^0) de $\mathcal{E}$ convergeant vers f^0, pour toute famille (f_ϵ) de $\mathcal{E}'$ où f_ϵ est une solution de (S) avec donnée initiale f_ϵ^0, il existe au moins une valeur d'adhérence de la famille (f_ϵ) et toute valeur d'adhérence de la famille (f_ϵ) est solution du système (S) avec la donnée initiale f^0 ;*

$(H2)$ *il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ tel que, sur $\mathcal{D}$, (S) admet une unique solution.*

Alors, il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$, tel que, sur $\mathcal{E}^0$, (S) admet une unique solution.

Le théorème 1 repose essentiellement sur un résultat classique de topologie, dont nous rappelons l'énoncé et l'esquisse de la preuve (voir [2] pour les définitions).

Proposition. — *Soit X un espace topologique, Y un espace métrique, et F une application multivoque semi-continue supérieurement de X dans Y. On suppose qu'il existe un sous-ensemble dense D de X tel que*

$$\forall x \in D, \quad F(x) \text{ est un singleton.}$$

Alors il existe un G_δ dense de X, noté X^0, tel que

$$\forall x \in X^0, \quad F(x) \text{ est un singleton.}$$

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le recouvrement $\bigcup_{y\in Y} B(y, \frac{1}{n})$ de Y par les boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n}$. On définit alors l'ensemble

$$\Omega_n = \big\{x \in X\,; \exists\, y \in Y,\ F(x) \subset B(y, \tfrac{1}{n})\big\}.$$

Comme F est semi-continue supérieurement, $\{x \in X\,; F(x) \subset B(y, \frac{1}{n})\}$ est ouvert pour tout $y \in Y$: Ω_n est donc ouvert.

Soit $x \in X$ tel que $F(x)$ est un singleton $\{y\}$. Alors $F(x)$ est contenu dans la boule $B(y, \frac{1}{n})$ pour tout $n \in I^*$, en particulier $F(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$. Réciproquement, soit $x \in X$ tel que $F(x) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$, le diamètre de $F(x)$ est plus petit que $\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $F(x)$ est un singleton. L'ensemble

$$\{x \in X\,; F(x) \text{ est un singleton}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \Omega_n$$

est donc un G_δ. Comme on a supposé qu'il contenait une partie dense de X, c'est un G_δ dense. □

Munis de cet outil, nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème 1.

Preuve du théorème 1. — On note $X = \mathcal{E}$ l'ensemble des données initiales sur lequel (S) est stable, et $Y = \mathcal{E}'$ l'espace où sont définies les solutions de (S). On définit l'application multivoque F par :

$$\forall f^0 \in X, \quad F(f^0) = \big\{f \in Y\,; f \text{ solution de } (S) \text{ avec donnée initiale } f^0\big\}.$$

La première étape consiste à vérifier que l'application F est semi-continue supérieurement, *i.e.* que pour tout fermé $E \subset Y$, pour toute $f^0 \in X$ et pour toute famille (f_ϵ^0) convergeant vers f^0 dans X, si $F(f_\epsilon^0) \cap E \neq \varnothing$, alors $F(f^0) \cap E$ n'est pas vide. Considérons donc $E \subset Y$, $f^0 \in X$ et une famille (f_ϵ^0) convergeant vers f^0 dans X. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, $F(f_\epsilon^0) \cap E \neq \varnothing$. Il existe alors une famille (f_ϵ) telle que $f_\epsilon \in F(f_\epsilon^0) \cap E$.

L'hypothèse $(H1)$ implique que la famille (f_ϵ) a au moins une valeur d'adhérence f. De plus, comme toutes les valeurs d'adhérence de (f_ϵ) appartiennent à $F(f^0)$, f appartient à $F(f^0)$. Il existe donc une suite (ϵ_n) telle que (f_{ϵ_n}) converge vers f dans Y. Comme E est fermé, on a nécessairement $f \in E$. Finalement $f \in F(f^0) \cap E \neq \varnothing$. L'application F est alors semi-continue supérieurement.

L'hypothèse $(H2)$ montre que $F(f^0)$ est un singleton pour tout $f^0 \in \mathcal{D}$.

La proposition implique alors que $F(f^0)$ est un singleton pour toute donnée f^0 dans un G_δ dense de $X = \mathcal{E}$, c'est-à-dire que (S) admet génériquement une unique solution. □

Remarques. — Le théorème 1 est intéressant dans la mesure où il assure qu'un système d'équations vérifiant les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ est génériquement déterministe : on peut alors dire qu'il est physiquement raisonnable. Néanmoins, la méthode n'est pas constructive, c'est-à-dire que pour une condition initiale donnée, on ne sait pas dire s'il y a unicité ou non.

L'autre limite de ce théorème est liée à l'hypothèse $(H2)$: l'unicité générique n'est pas donnée sous la seule condition de stabilité faible, comme on aurait pu l'espérer. En pratique, cela signifie qu'il est nécessaire de savoir construire des solutions suffisamment régulières.

Nous proposons ici trois exemples d'utilisation du théorème 1 pour des équations classiques de la physique des gaz et des plasmas : les équations d'Euler des fluides incompressibles en 2D, le système de Vlasov-Poisson et le modèle BGK de l'équation de Boltzmann.

3. Application aux équations d'Euler incompressibles en 2D

Le résultat que nous énonçons ici avait déjà été obtenu par Pierre-Louis Lions dans [6] par une méthode semi-constructive, c'est-à-dire que le G_δ dense de données initiales pour lesquelles il y a unicité de la solution était obtenu comme intersection d'ouverts décrits explicitement. Par contre, comme ici, il n'y avait pas de caractérisation explicite du G_δ dense lui-même, c'est-à-dire que pour une donnée initiale fixée (non régulière), on ne sait pas dire s'il y a ou non unicité de la solution.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles définis respectivement par*

$$\mathcal{E} = \Big\{u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)\,;\nabla_x\cdot u^0 = 0,\ \omega^0 = \partial_{x_1}u_2^0 - \partial_{x_2}u_1^0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2),$$
$$\text{et } \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega^0(\mathrm{d}x) \le C_0\Big\},$$

$$\mathcal{E}' = \big\{u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))\,; \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^2(\mathbb{R}^2))} \le C_0\big\}$$

et munis respectivement des topologies faibles de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$. Alors il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$ tel que pour tout $u^0 \in \mathcal{E}^0$, les équations d'Euler incompressibles

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla_x u + \nabla_x \pi = 0,\\ \nabla_x\cdot u = 0,\\ u(0,x,v) = u^0(x), \end{cases}$$

admet une unique solution faible $u \in \mathcal{E}'$.

Preuve du théorème 2. — Soit (u^0_ϵ) une famille de $\mathcal{E}$ convergeant vers u^0 pour la topologie faible de L^2. D'après [3], pour tout ϵ, il existe $u_\epsilon \in \mathcal{E}'$ solution des équations d'Euler incompressibles avec la donnée initiale u^0_ϵ. De plus, on a

$$\partial_t \omega_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla_x \omega_\epsilon = 0, \quad \partial_t u_\epsilon^2 + u_\epsilon \cdot \nabla_x u_\epsilon^2 + 2u_\epsilon \cdot \nabla_x \pi_\epsilon = 0$$

et comme $\nabla_x \cdot u_\epsilon = 0$,

$$\omega_\epsilon \geq 0 \text{ p.p.}, \quad \|u_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega_\epsilon(\mathrm{d}x) \leq C_0.$$

Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ une valeur d'adhérence de la famille $(u_\epsilon)_\epsilon$ pour la topologie préfaible. Il existe une suite extraite de (u_ϵ) (renotée (u_ϵ) abusivement) telle que $u_\epsilon \rightharpoonup u$. Pour tout $T > 0$,

- (ω_ϵ) est équicontinue sur $[0, T]$ à valeurs dans $W^{-2,1}(\mathbb{R}^2))$;
- (ω_ϵ) est positive et bornée dans $L^\infty([0, T], \mathcal{M} \cap H^{-1}(\mathbb{R}^2))$.

Le théorème de Delort permet alors de passer à la limite dans les produits symétriques (qui s'expriment à l'aide d'intégrales singulières)

$$u_{1\epsilon}^2 - u_{2\epsilon}^2 \to u_1^2 - u_2^2 \quad \text{et} \quad u_{1\epsilon} u_{2\epsilon} \to u_1 u_2$$

au sens des distributions sur $[0, T[\, \times \mathbb{R}^2$. On peut donc passer à la limite dans la formulation en vorticité des équations d'Euler incompressibles

$$\partial_t \omega + (\partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2})(u_1 u_2) + \partial_{x_1} \partial_{x_2}(u_1^2 - u_2^2) = 0, \quad u = \nabla \Delta^{-1} \omega,$$

au sens des distributions. On obtient ainsi que u est solution faible des équations d'Euler incompressibles avec donnée initiale u^0. L'hypothèse $(H1)$ est vérifiée.

On considère alors l'espace de fonctions $\mathcal{D}$ défini par

$$\Big\{ u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \,;\, \nabla_x \cdot u^0 = 0,\ \omega^0 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^2), \\ \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega^0(\mathrm{d}x) \leq C_0 \text{ et } \|\omega^0\|_{W^{1,\infty} \cap L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty \Big\}.$$

Soit u une solution faible des équations d'Euler incompressibles avec donnée initiale $u^0 \in \mathcal{D}$. Comme le tourbillon ω est transporté par le flot, on vérifie aisément que les normes L^p de ω sont préservées. En différentiant l'équation sur le tourbillon, on trouve

$$\partial_t \partial_{x_i} \omega + u \cdot \nabla_x \partial_{x_i} \omega + \partial_{x_i} u \cdot \nabla_x \omega = 0.$$

L'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\|\nabla_x u\|_{L^\infty} \leq C\big(1 + \|\omega\|_{L^\infty}(1 + \log(1 + \|\nabla_x \omega\|_{L^\infty})) + \|\omega\|_{L^1}\big)$$

couplée avec le lemme de Gronwall, permet d'obtenir une borne $L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ sur ω, et donc sur u, pour tout $T < \infty$. En particulier, u est solution forte des équations d'Euler. Il est alors facile de montrer que u est unique. En effet, si u' est aussi une solution,

$$\partial_t (u - u')^2 + u' \cdot \nabla_x (u - u')^2 = 2(u - u') \cdot [\nabla_x \pi' - \nabla_x \pi + (u' - u) \cdot \nabla_x u]$$

d'où, en intégrant en x,

$$\big\|(u-u')(t)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \big\|(u-u')(0)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\int_0^t \big\|(u-u')(s)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \big\|u(s)\big\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \mathrm{d}s$$

ce qui implique que $u = u'$. Sur $\mathcal{D}$, l'unicité est vérifiée.

On vérifie alors que $\mathcal{D}$ contient

$$\Big\{u^0 \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)\,;\nabla_x \cdot u^0 = 0,\ \omega^0 \geq 0 \text{ et } \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int \omega^0(dx) < C_0\Big\}$$

et que par conséquent, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$. L'hypothèse $(H2)$ est satisfaite. On peut alors appliquer le théorème 1, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. — Dans [6], la classe de données initiales étudiée est plus grande

$$\mathcal{E} = \big\{u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)\,;\nabla_x \cdot u^0 = 0 \text{ et } \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_0\big\}.$$

En effet, l'existence et l'unicité sont obtenues de façon générique dans cette classe. Ce résultat, comme le théorème 3, utilise de façon cruciale le principe de comparaison fort-faible

$$\big\|(u-u')(t)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \big\|(u-u')(0)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \exp\Big(\int_0^t \big\|u(s)\big\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \mathrm{d}s\Big).$$

Ainsi l'ensemble $\mathcal{E}^0$ est défini comme l'intersection sur $n \in \mathbb{N}^*$ des ouverts denses

$$\mathcal{O}_n = \Big\{u^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)\,;\nabla_x \cdot u^0 = 0,\ \|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \text{ et } \exists\, \bar{u}^0 \in L^2 \cap C^{1,\alpha}, \nabla_x \cdot \bar{u}^0 = 0,\ \|u^0 - \overline{u}^0\|_{L^2} \leq \frac{1}{n} \exp\Big(-n\int_0^n \big\|\bar{u}(s)\big\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \mathrm{d}s\Big)\Big\}.$$

4. Application au système de Vlasov-Poisson

Théorème 3. — *On considère les ensembles*

$$\mathcal{E} = \Big\{f^0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \text{ positive}\,; \|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} + \iint f^0(x,v)(1+|v|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}v \leq C_0\Big\}$$

$$\mathcal{E}' = \big\{f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^6))\,; \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^6))} \leq C_0\big\}$$

munis respectivement des topologies faibles de $L^2(\mathbb{R}^6)$ et de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^6))$. Alors il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$ tel que pour tout $f^0 \in \mathcal{E}^0$, le système *de Vlasov-Poisson*

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, \\ E = -\nabla_x V, \ -\Delta_x V = \int f(t,x,v)\mathrm{d}v, \\ f(0,x,v) = f^0(x,v), \end{cases}$$

admet une unique solution faible $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$.

Preuve du théorème 3. — Soit (f_ϵ^0) une famille de $\mathcal{E}$ convergeant vers f^0 pour la topologie faible. D'après [1], pour tout ϵ, il existe $f_\epsilon \in \mathcal{E}'$ solution du système de Vlasov-Poisson avec la donnée initiale f_ϵ^0. De plus, comme $\nabla_{x,v} \cdot (v,E) = 0$, on a

$$f_\epsilon \geq 0 \text{ p.p.}, \quad \|f_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} \leq \|f_\epsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} \leq C_0.$$

Et, en multipliant par $(1+|v|^2)$ et en intégrant par parties, on a la conservation de la masse et de l'énergie

$$\iint f_\epsilon(t,x,v)\big(1+|v|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}v + \int |E_\epsilon|^2 \,\mathrm{d}x \leq C_0.$$

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^6))$ une valeur d'adhérence de la famille (f_ϵ) pour la topologie préfaible. Il existe une suite extraite de (f_ϵ) (renotée (f_ϵ) abusivement) telle que $f_\epsilon \rightharpoonup f$. Soit ρ_ϵ et j_ϵ la densité macroscopique et la fonction de courant associées à f_ϵ. Une inégalité standard d'interpolation montre que

$$\|\rho_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{7/5}(\mathbb{R}^3))} \leq \|f_\epsilon\|^{4/7}_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^6))} \Big(\sup_t \iint f_\epsilon \,|v|^2 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\Big)^{3/7},$$

$$\|j_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{7/6}(\mathbb{R}^3))} \leq \|f_\epsilon\|^{2/7}_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^6))} \Big(\sup_t \iint f_\epsilon \,|v|^2 \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\Big)^{5/7}.$$

D'où

$$\|E_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, W^{1,7/5}(\mathbb{R}^3))} \leq C, \quad \|\partial_t E_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{7/6}(\mathbb{R}^3))} \leq C.$$

Les injections de Sobolev impliquent alors que (E_ϵ) est fortement compacte dans $L^2([0,T[\times\mathbb{R}^3)$, d'où $E_\epsilon \to E = \nabla_x \Delta_x^{-1} \int f dv$ dans $L^2([0,T[\times\mathbb{R}^3)$. On peut alors passer à la limite dans l'équation de Vlasov sous forme conservative

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (Ef) = 0$$

au sens des distributions. On obtient ainsi que f est solution faible du système de Vlasov-Poisson avec donnée initiale f^0. L'hypothèse $(H1)$ est vérifiée.

On considère alors l'espace de fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \Big\{ f^0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \text{ positive}\,; \\ \|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} + \iint f^0(x,v)\big(1+|v|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}v < C_0, \\ \text{et } \big\|f^0(1+|v|^m)\big\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^6)} < \infty \Big\} \end{aligned}$$

où m est une constante strictement supérieure à 6. D'après [7], pour tout $f^0 \in \mathcal{D}$, il existe une solution f du système de Vlasov-Poisson vérifiant

$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \le T} \iint f(t,x,v)\big(1+|v|^m\big)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x \le C_T.$$

Par interpolation, on vérifie alors que $\rho \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^3))$ avec $q > 3$, d'où $E \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$. On en déduit que

$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \le T} \big\| f(1+|v|^m)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \le C_T;$$

en particulier $\rho \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}^3))$. On peut alors différentier l'équation cinétique et obtenir un cran de régularité supplémentaire. Finalement, on a

$$\forall T > 0, \quad \sup_{t \le T} \big\| f(1+|v|^m)\big\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^6)} \le C_T$$

et f est une solution forte du système de Vlasov-Poisson.

Cette inégalité permet de dériver un principe d'unicité fort-faible : soit f' une solution faible du système de Vlasov-Poisson

$$\partial_t(f-f') + v\cdot\nabla_x(f-f') + E'\cdot\nabla_v(f-f') = (E'-E)\cdot\nabla_v f.$$

En appliquant une formule duale des inégalités de Sobolev, on obtient

$$\big\|(E'-E)\cdot\nabla_v f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \le \|\rho-\rho'\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \Big\| \int |\nabla_v f|\,\mathrm{d}v\Big\|^{2/3}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \Big\| \int |\nabla_v f|\,\mathrm{d}v\Big\|^{1/3}_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Or, pour tout $t \le T$

$$\Big\| \int |\nabla_v f|\,\mathrm{d}v\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le \big\|(1+|v|^4)\cdot|\nabla_v f|\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \int \frac{1}{1+|v|^4}\mathrm{d}v \le C_T.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient alors

$$\big\|(f-f')(t)\big\| \le \|f^0 - f'^0\| \exp\Big(C\int_0^t \big\|f(1+|v|^m)(s)\big\|_{W^{1,\infty}\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^6)}\mathrm{d}s\Big).$$

Toute solution faible du système de Vlasov-Poisson de donnée initiale $f^0 \in \mathcal{D}$ coïncide nécessairement avec la solution forte. Or, il est facile de vérifier que $\mathcal{D}$ contient

$$\Big\{ f^0 \in C^\infty_c(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3) \text{ positive}\,;\, \|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} + \iint f^0(x,v)\big(1+|v|^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}v < C_0\Big\}$$

et que par conséquent, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$. L'hypothèse $(H2)$ est satisfaite. On peut alors appliquer le théorème 1, ce qui conclut la démonstration. □

REMARQUES. — Il est possible d'étendre un peu le domaine de validité du théorème 3, en remarquant que si

$$f \in L^\infty\big(\mathbb{R}^+, L^p(\mathbb{R}^6)\big) \quad \text{et si} \quad f\big(1+|v|^2\big) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^6)\big),$$

par interpolation, $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^q(\mathbb{R}^3))$ où $q = (5p-3)/(3p-1)$, et donc

$$E \in L^\infty\big(\mathbb{R}^+, L^r(\mathbb{R}^3)\big) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{3}\cdot$$

Si $r = p'$, le produit Ef est bien défini. Il suffit donc de supposer que

$$p \geq \frac{12 + 3\sqrt{5}}{11}$$

(voir [4]).

D'autre part, les hypothèses sur la donnée initiale permettant de montrer la propagation de la régularité, et donc l'unicité, peuvent être affaiblies (voir [5]).

5. Application au modèle BGK de l'équation de Boltzmann

THÉORÈME 4. — *Soit M une maxwellienne sur $\mathbb{R}^3$ et*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \Big\{ & f^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^6) \text{ positive}\,; \\
& \qquad \|f^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} + \iint \Big(f^0 \log \frac{f^0}{M} - f^0 + M \Big) \mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \leq C_0 \Big\}, \\
\mathcal{E}' = \big\{ & f \in L^\infty([0,\tau] \times \mathbb{R}^6) \text{ positive}\,; \|f\|_{L^\infty([0,\tau]\times\mathbb{R}^6)} \leq C_0 \exp(C\tau) \big\},
\end{aligned}$$

munis des topologies préfaibles de $L^\infty(\mathbb{R}^6)$ et de $L^\infty([0,\tau]\times\mathbb{R}^6)$. Alors il existe un G_δ dense de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E}^0$ tel que pour tout $f^0 \in \mathcal{E}^0$, le modèle BGK de l'équation de Boltzmann

$$\begin{aligned}
& \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = M_f - f, \\
& M_f(t,x,v) = \frac{R(t,x)}{(2\pi T(t,x))^{3/2}} \exp\Big(- \frac{|v - U(t,x)|^2}{2T(t,x)} \Big), \\
& R(t,x) = \int f(t,x,v)\,\mathrm{d}v, \quad RU(t,x) = \int f(t,x,v) v\,\mathrm{d}v, \\
& (RU^2 + 3RT)(t,x) = \int f(t,x,v) v^2\,\mathrm{d}v, \\
& f(0,x,v) = f^0(x,v)
\end{aligned}$$

admet une unique solution faible $f \in \mathcal{E}'$.

Preuve du théorème 4. — Une généralisation de [8] montre que, pour tout $f^0 \in \mathcal{E}$, il existe f solution du modèle BGK avec la donnée initiale f^0 (voir [10]), que f vérifie alors une estimation d'entropie, mais ce résultat ne suffit pas à guarantir que les solutions sont dans $\mathcal{E}'$. Pour cela, on utilise l'estimation suivante :

$$R=\int f\,\mathrm{d}v\leq\frac{1}{\alpha^2}\int_{|v-U|>\alpha}|v-U|^2 f\,\mathrm{d}v+\int_{|v-U|\leq\alpha}f\,\mathrm{d}v$$
$$\leq\frac{3RT}{\alpha^2}+\frac{4\pi}{3}\alpha^3\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leq 8(RT)^{3/5}\|f\|^{2/5}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

pour $\alpha=\|f\|^{-1/5}_{L^\infty}(RT)^{1/5}$. On en déduit

$$\|M_f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\leq\frac{R}{(2\pi T)^{3/2}}\leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

et en appliquant le lemme de Gronwall

$$\|f\|_{L^\infty([0,\tau]\times\mathbb{R}^6)}\leq\|f^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}\exp(C\tau).$$

Les solutions faibles de données initiales dans $\mathcal{E}$ sont donc dans $\mathcal{E}'$ si on a bien choisi la constante C.

Il faut ensuite vérifier la stabilité du système vis-à-vis de la convergence faible des données initiales. Soit (f^0_ϵ) une famille de $\mathcal{E}$ convergeant vers f^0 pour la topologie faible. Pour tout ϵ, on considère f_ϵ une solution de l'équation BGK avec donnée initiale f^0_ϵ. L'estimation d'entropie donne

$$\iint\big[f_\epsilon\log(f_\epsilon/M)-f_\epsilon+M\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}v\leq C_0$$

qui implique en particulier que $f_\epsilon\geq 0$ presque partout.

De plus,

$$\iint f_\epsilon\mathbb{1}_{f_\epsilon\geq\lambda M}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}x\to 0\ \text{quand}\ \lambda\to\infty\ \text{uniformément en}\ \epsilon,$$

donc (f_ϵ) est relativement compacte dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}t\mathrm{dx},\mathrm{L}^1_{\mathrm{v}})$ faible. Comme

$$\iint[M_{f_\epsilon}\log(M_{f_\epsilon}/M)-M_{f_\epsilon}+M]\mathrm{d}x\mathrm{d}v\leq\iint[f_\epsilon\log(f_\epsilon/M)-f_\epsilon+M]\mathrm{d}x\mathrm{d}v\leq C_0,$$

on a aussi la relative compacité de M_{f_ϵ} dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{dtdx},\mathrm{L}^1_{\mathrm{v}})$ faible. En particulier,

$$(\partial_t f_\epsilon+v.\nabla_x f_\epsilon)\ \text{est relativement faiblement compacte dans}\ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}t\mathrm{d}x,L^1_v).$$

L'inégalité de Young

$$|f_\epsilon-M|\,(1+|v|^2)$$
$$\leq 4\theta\left([f_\epsilon\log(f_\epsilon/M)-f_\epsilon+M]+M\left[\exp\left(\frac{1+|v|^2}{4\theta}\right)-\frac{1+|v|^2}{4\theta}-1\right]\right)$$

montre que $(f_\epsilon(1+|v|^2))$ est bornée dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}t\mathrm{d}x,L^1_v)$, et plus précisément que $(f_\epsilon(1+|v|^2)(1+|x|^2)^{-2})$ est bornée dans $L^\infty_t(L^1_{x,v})$. Et, de la même façon,

$(M_{f_\epsilon}(1+|v|^2)(1+|x|^2)^{-2})$ est bornée dans $L^\infty_t(L^1_{x,v})$. À extraction près, on a alors

$$\begin{aligned} f_\epsilon - M &\rightharpoonup f - M \text{ faiblement dans } L^1_{\mathrm{loc}}\big([0,\tau]\times\mathbb{R}^6\big),\\ M_{f_\epsilon} - M &\rightharpoonup Q - M \text{ faiblement dans } L^1_{\mathrm{loc}}\big([0,\tau]\times\mathbb{R}^6\big).\end{aligned}$$

Un résultat de dispersion ([8]) permet de montrer que $(f_\epsilon(1+|v|^3))$ est bornée $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}t\mathrm{d}x, L^1_v)$ et, par interpolation, que $(f_\epsilon(1+|v|^2))$ est relativement compacte dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}t\mathrm{d}x, L^1_v)$ faible.

Les lemmes de moyenne donnent alors (à extraction d'une suite près)

$$\int f_\epsilon \begin{pmatrix}1\\ v\\ |v|^2\end{pmatrix}\mathrm{d}v \to \int f \begin{pmatrix}1\\ v\\ |v|^2\end{pmatrix}\mathrm{d}v \quad \text{fortement dans } L^1\big([0,\tau]\times K\big)$$

pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^3$. Donc $R_\epsilon\to R$ et, presque partout sur $V=\{(t,x)\,;R(t,x)\neq 0\}$, $U_\epsilon\to U$, $T_\epsilon\to T$ avec $T(t,x)>0$. On en déduit que $Q=M_f$ presque partout sur V. Bien sûr, $Q=0=M_f$ presque partout sur $[0,\tau[\times\mathbb{R}^3\setminus V$. Cela montre que M_{f_ϵ} converge simplement vers M_f. La limite f est alors solution faible de l'équation de BGK. L'hypothèse $(H1)$ est vérifiée.

Un résultat de Perthame et Pulvirenti [9] donne l'unicité de la solution pour toute donnée initiale dans

$$\Big\{f^0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3) \text{ positive, } \big\|f^0(x,v)(1+|v|^q)\big\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}<\infty,\\ \text{et } \inf_{x,t}\int f^0(x-vt,v)\mathrm{d}v>0\Big\}$$

où q est une constante fixée supérieure à 5. On va montrer que ce résultat se généralise sur l'ensemble $\mathcal{D}$ défini par

$$\begin{aligned}\Big\{f^0\in L^\infty(\mathbb{R}^6) \text{ positive}\,;\\ \|f^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} + \iint\Big(f_0\log\frac{f_0}{M} - f_0 + M\Big)\mathrm{d}v\mathrm{d}x < C_0,\\ \big\|f^0(x,v)(1+|v|^q)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}<\infty \quad\text{et}\quad \inf_{x,t}\int f^0(x-vt,v)\mathrm{d}v>0\Big\}.\end{aligned}$$

Pour cela, il est important de remarquer que la contrainte

$$\inf_{x,t}\int f^0(x-vt,v)\mathrm{d}v>0$$

(qui est incompatible avec une borne L^1 sur f^0) est compatible avec la borne d'entropie : la borne d'entropie indique en effet qu'à l'infini f^0 se comporte comme M, et donc qu'il n'y a pas de vide. On peut alors avoir un bon contrôle des moments, et montrer que $f \mapsto M_f$ est lipschitzienne. Un résultat simple de dispersion utilisant

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f \geq -f$$

montre que

$$R(t,x) \geq \exp(-t) \int f^0(x - vt, v) \mathrm{d}v \geq c_0 \exp(-\tau).$$

On a alors

$$T^{3/2} \geq \frac{R}{C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}} \geq \frac{c_0}{C_0 C} \exp(-C\tau).$$

Des inégalités d'interpolation permettent d'autre part, de montrer que pour $q > 5$,

$$R(T + U^2)^{(q-3)/2} \leq C_q \big\| f \ |v|^q \big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$$

et donc

$$T + |U|^2 \leq C(\tau).$$

Grâce à ces estimations, on montre que

$$\begin{aligned}\big\|(M_f - M_{f'})(1 + |v|^2)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &\leq C(\tau)\big(|R - R'| + |U - U'| + |T - T'|\big)\\ &\leq C(\tau)\big\|(f - f')(1 + |v|^2)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau le lemme de Gronwall, on obtient

$$\big\|(f - f')(1 + |v|^2)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \big\|(f^0 - f'^0)(1 + |v|^2)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \exp\big(C(\tau)t\big),$$

ce qui implique l'unicité.

Pour établir $(H2)$, il s'agit alors de vérifier que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{E}$. Pour cela, il suffit de voir que $\mathcal{D}$ contient

$$\big\{f^0 = M + g^0 \,;\, g^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^6) \text{ et } \exists\, \lambda \in [0,1[,\ g^0 \geq -\lambda M\big\}$$

qui est dense dans $\mathcal{E}$. Le théorème 1 permet de conclure. □

Remarque. — Ici, contrairement aux deux problèmes précédents, on a obtenu directement de l'unicité dans un sous-ensemble de solutions faibles : on n'a pas utilisé un principe de comparaison fort-faible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arsen'ev (A. A.) – *Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations (russian)*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., t. **15** (1975), pp. 136–147, 276.

[2] Aubin (J.-P.) & Cellina (A.) – *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 264, Springer-Verlag, 1984.

[3] Delort (J.M.) – *Existence de nappes de tourbillon en dimension 2*, J. Amer. Math. Soc., t. **4-3** (1991), pp. 553–586.

[4] Diperna (R.J.) & Lions (P.-L.) – *Global weak solutions of kinetic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, t. **46** (1988), no. 3, pp. 259–288.

[5] Gasser (I.), Jabin (P.E.) & Perthame (B.) – *Regularity and propagation of moments in some nonlinear vlasov systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, t. **130** (2000), no. 6, pp. 1259–1273.

[6] Lions (P.-L.) – *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1 : Incompressible models*, Oxford Lecture Series in Math. and Appl., Clarendom Press, Oxford, 1996.

[7] Lions (P.-L.) & Perthame (B.) – *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson System*, Invent. Math., t. **105** (1991), pp. 415–430.

[8] Perthame (B.) – *Global existence to the BGK Model of Boltzmann equation*, J. Diff. Equ., t. **82** (1989), pp. 191–205.

[9] Perthame (B.) & Pulvirenti (M.) – *Weighted L^∞ Bounds and Uniqueness for the Boltzmann BGK Model*, Arch. Rational Mech. Anal., t. **125** (1993), pp. 289–295.

[10] Saint-Raymond (L.) – *Discrete time Navier-Stokes limit for the BGK Boltzmann equation*, à paraître dans Comm. Partial Diff. Eq., 2001.