Bull. Soc. math. France
133 (4), 2005, p. 581–600

THÉORÈMES D'ANNULATION POUR DES FIBRÉS MUNIS D'UNE FORME NON DÉGÉNÉRÉE

PAR PIERRE-EMMANUEL CHAPUT

RÉSUMÉ. — Je démontre des théorèmes d'annulation de la cohomologie de Dolbeault de fibrés vectoriels amples sur une variété projective lisse, munis d'une forme symplectique ou d'une forme quadratique non-dégénérée à valeurs dans un fibré en droites. L'hypothèse d'existence d'une telle forme permet d'améliorer les résultats similaires précédents. Je fais aussi des remarques sur la cohomologie des fibrés en droites sur les grassmanniennes isotropes.

ABSTRACT (*Vanishing theorems for vector bundles admitting a non-degenerate form*)
I prove vanishing theorems for the Dolbeault cohomology of ample vector bundles over a smooth projective variety, admitting a non-degenerate quadratic or symplectic form with values in a line bundle. The existence of such a form makes it possible to improve similar existing results. I also give results concerning the Dolbeault cohomology of line bundles on isotropic Grassmannians.

Introduction

De nombreux auteurs se sont attachés à démontrer des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Dolbeault des fibrés vectoriels amples sur une variété projective complexe lisse. Par exemple, Le Potier [10, cor. 3, p. 258] établit le résultat suivant :

Texte reçu le 3 novembre 2003, révisé le 26 novembre 2004.
PIERRE-EMMANUEL CHAPUT, Laboratoire de Mathématiques Jena Leray, Unité Mixte de Recherche CNRS 6629, UFR Sciences et Techniques, 2 rue de la Houssinière - BP 92208 - F-44322 Nantes Cedex 3 • *E-mail :* `Pierre-Emmanuel.Chaput@math.univ-nantes.fr`
Classification mathématique par sujets (2000). — 14F17.
Mots clefs. — Théorèmes d'annulation, grassmanniennes isotropes.

Théorème. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur une variété X projective lisse complexe de dimension n. Alors on a $H^{p,q}(X, \wedge^k E) = 0$ si $p + q > n + k(e - k)$.*

Par la suite, des efforts ont été réalisés notamment pour améliorer cette borne (voir par exemple [13], [8]), généraliser ce résultat à d'autres puissances de Schur [4], et traiter le cas où E a des propriétés de positivité plus faibles [14]. En ce qui me concerne, je propose de diminuer la borne donnée par ce théorème dans le cas où E admet de plus une forme non dégénérée, symplectique ou quadratique. Je démontre le résultat suivant (si V est un espace vectoriel muni d'une forme symplectique, $\wedge^{\langle t\rangle} V$ est la composante irréductible de la $\mathrm{Sp}(V)$-représentation $\wedge^t V$ décrite au paragraphe 1.1) :

Théorème 1. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $2e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites. Alors*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^{\langle t\rangle} E \otimes (\det E)^k\big] = 0 \quad si \quad \begin{cases} p + q > n + \frac{1}{2}t(2e + 3 - t), \\ 4k \geq t + 3, \\ n - p \leq e - t - 1. \end{cases}$$

La borne du théorème de Le Potier est donc, dans ce cas particulier, approximativement divisée par 2. Je démontre aussi un résultat dans le cas $n - p > e - t + 1$ et un analogue pour des fibrés munis d'une forme quadratique :

Théorème 2. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq 2t \leq e$. Alors*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^t E \otimes (\det E)^{2k}\big] = 0 \quad si \quad \begin{cases} p + q > n + \frac{1}{2}t(e + 2 - t), \\ 8k \geq t + 1, \\ n - p \leq \frac{1}{2}e - t - 1. \end{cases}$$

Rappelons l'argument original de J. Le Potier pour son théorème cité en début d'introduction. Considérons, dans la situation de ce théorème, la grassmannienne relative $G(k, E^*)$ des sous-espaces vectoriels de E^* de dimension k. Cette variété est fibrée sur X, d'une part, et admet d'autre part un fibré en droites naturel que je noterai $\mathcal{O}(1)$, qui peut se définir comme le dual du fibré déterminant du fibré tautologique. L'hypothèse d'amplitude de E sur X implique l'amplitude de $\mathcal{O}(1)$ sur $G(k, E^*)$ et, par le théorème de Kodaira-Nakano, l'annulation des groupes de cohomologie $H^{P,Q}(G(k, E^*), \mathcal{O}(1))$ pour $P + Q > \dim G(k, E^*)$. Or, on peut aussi calculer ces groupes au moyen de la suite spectrale dite de Borel Le-Potier, dont les termes d'ordre 1 sont ${}^P E_1^{i,q} = H^{P,q}(X, \wedge^k E)$ si $i = P$ et sont nuls sinon. Cette suite spectrale est donc dégénérée et on en déduit le résultat.

Dans le cas qui m'intéresse, de façon à réduire la borne obtenue, je considère une fibration en grassmanniennes *isotropes*. Pour déterminer les termes de cette suite spectrale, il s'agit de déterminer la cohomologie de Dolbeault des fibrés en droite homogènes sur une telle grassmannienne.

Une première partie étudie donc la cohomologie de ces grassmanniennes, sujet présentant un intérêt indépendant des théorèmes d'annulation. Le cas des grassmanniennes dites *lagrangiennes*, d'espaces linéaires de dimension maximale, traité par Snow [15], est fondamentalement plus simple, car on a affaire à des espaces hermitiens symétriques. Dans le cas général, le fibré tangent n'est pas complètement réductible comme fibré homogène, et donc le calcul de la cohomologie fait intervenir des suites spectrales, dont on peut théoriquement déterminer les termes, mais dont je ne vois pas comment déterminer les morphismes. Je n'ai en fait pu établir dans le cas général que le résultat partiel suivant : les composantes de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne isotrope sont des représentations fondamentales. Par contre, on peut mener à bien le calcul de la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(2)$ sur les grassmanniennes lagrangiennes, et en déduire nos théorèmes d'annulation.

Je remercie Laurent Manivel de m'avoir proposé ce sujet, et de son soutien régulier.

1. Cohomologie des grassmanniennes isotropes

1.1. Notations concernant les représentations. — Les notations concernant les systèmes de racines de $\mathrm{SL}(n), \mathrm{Sp}(2n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont celles de [2, p. 185 et suivantes].

Lorsque λ est une partition, je note S_λ le foncteur de Schur qui lui est associé, $|\lambda|$ son poids et $\ell(\lambda)$ sa longueur (le nombre de parts non nulles) [5]. Je note aussi λ^* la partition duale de λ. Le rang d'une partition λ sera noté $r(\lambda)$; c'est le plus grand entier r tel que $\lambda_r \geq r$. On peut coder une partition λ par deux partitions λ^d et λ^b de longueur $r(\lambda)$ telles que λ_i^d (resp. λ_i^b) soit égal à $\lambda_i - i$ (resp. $\lambda_i^* - i$). Remarquons que $\lambda \mapsto (\lambda^d, \lambda^b)$ est une bijection de l'ensemble des partitions dans l'ensemble des couples de partitions strictement décroissantes. Notons $(\mu \,|\, \nu)$ la partition λ telle que $\lambda^d = \mu$ et $\lambda^b = \nu$. Par exemple, $(6,4,2) = ((6,3) \,|\, (3,2))$. Notons aussi $\lambda + 1$ la partition de même longueur que λ dont la i-ième part vaut $\lambda_i + 1$. Soit alors λ^+ la partition $(\lambda \,|\, \lambda + 1)$ et $\lambda^- = (\lambda + 1 \,|\, \lambda)$ [11].

Si V est un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée (respectivement symplectique), alors $\mathrm{SL}(V)$ contient le sous-groupe $\mathrm{SO}(V)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(V)$). Les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(V)$ sont des représentations de ce sous-groupe, par contre elles ne restent pas toujours irréductibles. Pour l'un des groupes $\mathrm{SL}(V), \mathrm{SO}(V)$ et $\mathrm{Sp}(V)$, nous avons choisi comme tore maximal le sous-groupe des matrices diagonales ; un poids (c'est-à-dire un caractère de ce tore) de $\mathrm{SL}(V)$ se restreint donc en un poids de $\mathrm{SO}(V)$ ou un poids de $\mathrm{Sp}(V)$. Je note alors $S_{\langle\lambda\rangle}V$ la représentation de ce sous-groupe qui a comme plus haut poids la restriction du plus haut poids de la représentation $S_\lambda V$. De même, je note $S^{\langle k\rangle}V$ et $\wedge^{\langle k\rangle}V$ les représentations $S_{\langle(k)\rangle}V$ et $S_{\langle(1,\ldots,1)\rangle}V$.

1.2. Étude du fibré tangent des grassmanniennes isotropes

Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie et r un entier, je note $G(r,V)$ la grassmannienne paramétrant les sous-espaces linéaires de dimension r de V. Sur cette grassmannienne, le fibré tautologique, de rang r, et le fibré quotient, de rang $\dim V - r$, seront respectivement notés T et Q.

Si V, de dimension paire $2e$, est muni d'une forme symplectique ω, alors la grassmannienne isotrope $G_\omega(r,V)$ est, par définition, la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour ω. C'est aussi, dans le plongement de Plücker $\mathbb{P}\wedge^r V$, l'intersection de $G(r,V)$ avec la représentation irréductible $\mathbb{P}\wedge^{\langle r\rangle}V$. Par restriction de T et Q, on obtient des fibrés sur les sous-grassmanniennes isotropes encore notés T et Q. Remarquons que la restriction de Q n'est plus irréductible, puisqu'elle contient le sous-fibré $T^\perp/T$ que nous noterons U.

Soit $v_1,\ldots,v_{2e}$ une base de V dans laquelle la forme ω est donnée par la matrice $\Omega := \left(\begin{smallmatrix} 0 & J \\ -J & 0\end{smallmatrix}\right)$, où J est la matrice ayant des 1 sur la deuxième diagonale ($J_{i,e+1-i} = 1$) et des 0 ailleurs. Soit aussi

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \cap \mathrm{Sp}(V) \right\}$$

le stabilisateur dans $\mathrm{Sp}(V)$ de l'espace isotrope L engendré par les vecteurs $v_{2e-r+1},\ldots,v_{2e}$. Rappelons qu'en général il existe une équivalence entre les fibrés homogènes sur un espace homogène projectif G/P et les représentations du groupe parabolique P [1]. Nous allons utiliser le théorème de Bott pour calculer les groupes de cohomologie $H^{p,q}[G_\omega(r,V),\mathcal{O}(\ell)]$, et nous avons donc besoin de comprendre la représentation correspondant au fibré tangent $TG_\omega(r,V)$. On pourrait déterminer cette représentation en utilisant le fait qu'elle est donnée par l'action adjointe de $\mathcal{P}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ (si $\mathfrak{p}$ désigne l'algèbre de Lie de $\mathcal{P}$).

Je propose plutôt de remarquer que ce fibré est un sous-fibré de la restriction du fibré tangent à $G(r,V)$. Celui-ci est $T^*\otimes Q$; comme l'inclusion des fibrés est $\mathrm{Sp}(V)$-équivariante, le fibré tangent de $G_\omega(r,V)$ correspond à une sous-représentation de la représentation $L^*\otimes(V/L)$. En « décomposant » le fibré $T^*\otimes Q$, on constate que cette sous-représentation est l'ensemble des applications $L\to V/L$ telles que la composée $L\to V/L \xrightarrow{\omega} L^*$ soit une application symétrique. Autrement dit, on a une suite exacte de fibrés

$$0 \to T^*\otimes U \longrightarrow TG_\omega(r,V) \longrightarrow S^2T^* \to 0. \tag{1}$$

Soit de façon similaire V un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée q ; on définit la grassmannienne isotrope $G_q(r,V)$ comme la sous-variété de $G(r,V)$ constituée des r-plans isotropes pour q.

En termes de groupes algébriques, cette variété est un quotient de $\mathrm{SO}(V)$, mais nous la verrons plutôt comme quotient de son revêtement universel, $\mathrm{Spin}(V)$. En effet, ce groupe simplement connexe présente l'avantage que toute représentation de son algèbre de Lie est la différentielle d'une représentation. Par exemple, si $n = 2m$, ou si $n = 2m+1$, nous réaliserons $G_q(m,V)$ dans la représentation spinorielle de plus haut poids $\frac{1}{2}(1,\dots,1)$, dans la base (ϵ_i) : il n'existe une telle représentation que pour $\mathrm{Spin}(V)$. La sous-variété de la grassmannienne $G(m,V) \subset \mathbb{P}\wedge^m V$ constituée des espaces isotropes est donc l'image par l'application de Veronese de degré deux de la grassmannienne $G_q(m,V)$ ainsi réalisée.

Comme dans le cas symplectique, il existe une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \to T^* \otimes U \longrightarrow TG_q(r,V) \longrightarrow \wedge^2 T^* \to 0. \tag{2}$$

1.3. Cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne isotrope. — Notons $\mathcal{O}(1)$ le générateur ample du groupe de Picard de $G_\omega(r,V)$. L'objet de ce paragraphe est l'étude des groupes de cohomologie de Dolbeault de ce fibré.

La suite exacte (1) montre que le fibré des p-formes peut être filtré par les $\wedge^i S^2T \wedge \Omega^{p-i}G_\omega(r,V)$, $0 \le i \le p$ et que les quotients associés sont les $\wedge^i S^2 T \otimes \wedge^{p-i}(T\otimes U^*)$.

La remarque 2.15, p. 25, l'exemple 6, p. 138, et les formules (4.3′), p. 65, et (9.2), p. 143, dans [11] montrent que

$$\wedge^j(V\otimes W) = \bigoplus_{|\lambda|=j} S_\lambda V \otimes S_{\lambda^*}W, \quad \wedge^i S^2 V = \bigoplus_{|\lambda|=i} S_{\lambda^+}V \quad \text{et}$$

$$S_\lambda V \otimes S_\mu V = \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} S_\nu V,$$

où les coefficients de Littlewood-Richardson $c^\nu_{\lambda,\mu}$ sont définis dans [11, p. 143]. Il vient donc que $\Omega^p G(r,V)$ admet une filtration dont les quotients valent

$$\bigoplus_{\substack{|u|=i\\|v|=p-i,w}} c^w_{u^+,v} S_w T \otimes S_{v^*}U.$$

Remarquons que la représentation de $\mathcal{P}$ correspondant à T factorise par la projection $\mathcal{P} \to \mathrm{GL}(r)$. Ainsi, chaque fibré S_wT correspond à une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(r)$, donc de $\mathcal{P}$; c'est donc un fibré homogène irréductible. Par contre, puisque si L est un espace linéaire isotrope, la forme ω induit une forme symplectique sur $L^\perp/L = U_L$, $\mathcal{P}$ ne se projette que sur $\mathrm{Sp}(U)$ (et non $\mathrm{GL}(U)$). Ainsi, la $\mathcal{P}$-représentation correspondant au fibré $S_{v^*}U$ n'est en général pas irréductible. Écrivons donc $S_{v^*}U$ comme somme de fibrés irréductibles

(I_v désigne un ensemble de partitions adéquat) :

$$S_{v^*}U = \bigoplus_{v^{sp}\in I_v} S_{\langle v^{sp}\rangle}U.$$

Finalement, si on choisit un supplémentaire de T dans U,

$$\mathcal{P} \supset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \supset \mathrm{Sp}(\dim V - 2r) \times \mathrm{SL}(r),$$

et $S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U$, corespondant à un produit tensoriel de représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(r)$ et de $\mathrm{Sp}(\dim V - 2r)$, correspond à une représentation irréductible de $\mathcal{P}$; une telle composante est donc un $\mathrm{Sp}(V)$-fibré irréductible.

Je fais alors la remarque suivante.

LEMME 1.1. — *Soit $S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U$ une composante du gradué associé à $\Omega^pG_\omega(r,V)$. Soit ℓ la longueur de w. Alors :*

- *soit $H^q[G_\omega(r,V), S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)] = 0$, pour tout $q \in \mathbb{N}$;*
- *soit il existe un unique $q = q(v^{sp}, w)$ tel que*

$$H^q\big[G_\omega(r,V), S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)\big] \neq 0$$

et de plus $H^{q(v^{sp},w)}(S_wT \otimes S_{\langle v^{sp}\rangle}U \otimes \mathcal{O}(1)) = \wedge^{\langle r-\ell\rangle}V$.

Démonstration. — Comme ce fibré est irréductible, on peut appliquer le théorème de Bott [1, p. 113]. Si le poids associé à ce fibré est singulier, on est dans le premier cas ; s'il est régulier, il y a un et un seul degré où la cohomologie ne s'annule pas. L'intérêt de ce lemme est d'expliciter dans ce cas le groupe de cohomologie.

Rappelons que $v_1, \dots, v_{2e}$ forment une base de V dans laquelle la forme symplectique ω s'écrit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs, par définition, $\mathcal{P}$ est le stabilisateur de l'espace isotrope L engendré par les vecteurs $v_{2e-r+1}, \dots, v_{2e}$. Pour $1 \le i \le e$, v_i est de poids ϵ_i et v_{e+i} de poids $-\epsilon_{e+1-i}$.

Soient $k = e - r$ et $\ell = \ell(w)$. Les poids de la représentation associée au fibré T sont ceux des vecteurs $v_{2e-r+1}, \dots, v_{2e}$, soit $-\epsilon_r \ge \cdots \ge -\epsilon_1$. Une base de la fibre de U au point base de $\mathrm{Sp}(V)/\mathcal{P}$ est $(v_{r+1}, \dots, v_{2e-r})$; les poids de la représentation associée à ce fibré sont donc $\epsilon_{r+1} \ge \cdots \ge \epsilon_e \ge -\epsilon_e \ge \cdots \ge -\epsilon_{r+1}$.

Écrivons alors les plus hauts poids correspondant aux fibrés $S_wT, S_{v^{sp}}U$ et $\mathcal{O}(1)$, dans la base (ϵ_i), ainsi que le poids ρ :

$$\begin{array}{rl} \text{coordonnées} & : \big(\ \epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-\ell}\ ,\ \epsilon_{r-\ell+1},\dots,\epsilon_r\ ,\qquad \epsilon_{r+1},\dots,\epsilon_e\big), \\ S_wT & : (\ 0,\dots,0\ ,\ -w_\ell,\dots,-w_1\ ,\qquad 0,\dots,0\big), \\ S_{v^{sp}}U & : \big(\ 0,\dots,0\ ,\ 0,\dots,0\ ,\ v_1^{sp}-v_{2k}^{sp},\dots,v_k^{sp}-v_{k+1}^{sp}\big), \\ \mathcal{O}(1) & : \big(\ 1,\dots\ ,\ \dots,1\ ,\qquad 0,\dots,0\big), \\ \rho = & \big(\ e,e-1\ ,\ \dots\ ,\qquad \dots,1\big). \end{array}$$

Il s'agit donc d'étudier le poids

$$(3)\quad (e+1,e,\dots,k+\ell+1-w_\ell,\dots,k+2-w_1,k+v_1^{sp}-v_{2k}^{sp},\dots,1+v_k^{sp}-v_{k+1}^{sp}).$$

Remarquons que ce poids, outre une suite d'entiers consécutifs écrits dans un ordre décroissant, est constitué de deux suites strictement décroissantes, la première quelconque et la deuxième positive. Comme les racines de l'algèbre de Lie sp_{2e} sont $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ pour tous les couples (i,j) d'entiers distincts entre 1 et e, et $\pm 2\epsilon_i$ pour tout i, ce poids est régulier si et seulement si toutes les valeurs absolues de ses coordonnées sont distinctes et non nulles.

Étudions les $k+\ell$ dernières coordonnées. Nous avons vu qu'une base de la fibre de U au-dessus du point base est $(v_{r+1},\dots,v_{2e-r})$. Une base de vecteurs propres de $S_{v^*}U$ est en bijection avec l'ensemble des tableaux semi-standard de forme v^* contenant les lettres $r+1,\dots,2e-r$ [5, prop. 15.55]. Si $\mathcal{C}(v^*)$ désigne l'ensemble des cases du diagramme correspondant à v^*, un tel tableau peut être vu comme une application $\mathcal{C}(v^*) \to \{r+1,\dots,2e-r\}$; cette bijection associe à un tableau f l'image de $\otimes_{c\in\mathcal{C}(v^*)} x_{f(c)}$ par la projection naturelle $U^{\otimes|v^*|} \to S_{v^*}U$. Le poids de ce vecteur est $\sum_{r+1\le i\le e}(k_i - k_{2e+1-i})\epsilon_i$, où k_i désigne le nombre de lettres i dans le tableau. Sur un tableau semi-standard, il ne peut y avoir des lettres 1 que sur la première ligne : il y en donc au plus v_1^*, et donc $v_1^{sp} \le v_1^*$. Comme v^{sp} est une partition, $v_i^{sp} \le v_1^*$.

Comme S_wT est une composante de $S_{u^+}T \otimes S_vT$, par la règle de Littlewood-Richardson, on voit que les cases sur la i-ième ligne de $w-u^+$ sont numérotées d'un entier inférieur ou égal à i. Ainsi, $v_1^* \le \ell$ et $k + v_1^{sp} - v_{2k}^{sp} \le \ell + k$.

Par ailleurs, pour une partition de type u^+, on a toujours $u_1^+ = \ell(u^+)+1$. Toujours en tenant compte de la règle de Littlewood-Richardson, quand on perturbe une telle partition en la multipliant par une partition v, on ajoute à chaque ligne au plus v_1 cases. Comme $S_{v^{sp}}U$ est une composante de $S_{v^*}U$, pour qu'il soit non nul, il faut que $\ell(v^*) \le rg(U) = 2k$; on a donc $v_1 \le 2k$.

Ainsi, $w_1 \le \ell(u^+)+1+2k \le \ell+1+2k$. Cette inégalité donne $k+2-w_1 \ge -\ell-k+1$; par ailleurs, il est clair que $k+\ell+1-w_\ell \le k+\ell$. Puisque les ℓ entiers $k+i+1-w_i$ sont ordonnés de façon croissante (par rapport à i), tous ces entiers sont donc compris entre $-\ell-k+1$ et $k+\ell$, donc de valeur absolue inférieure ou égale à $k+\ell$.

Ainsi, les valeurs absolues des $k+\ell$ dernières coordonnées sont donc des entiers distincts entre 1 et $k+\ell$; ce sont donc tous ces entiers. Le poids du groupe de cohomologie non nul de cette composante est donc :

$$(e+1,e,\dots,\ell+k+2,\ell+k,\ell+k-1,\dots,1)-(e,e-1,\dots,1)=(1,\dots,1,0,\dots,0),$$

avec $\ell+k$ lettres 0 et donc $e-(\ell+k)$ lettres 1, ce qui conduit au résultat annoncé. □

Par ailleurs, on peut calculer ce degré $q(v^{sp},w)$. Pour cela notons :

- $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_i$ les entiers positifs de la suite $k+1+t-w_t$,
- $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_j$ les valeurs absolues de ces entiers négatifs et
- $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_k$ les entiers $k+v_1^{sp}-v_{2k}^{sp},\cdots,1+v_k^{sp}-v_{k+1}^{sp}$,

de sorte que le poids considéré en (3) est

$$(e+1,e,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_i,-\beta_1,\dots,-\beta_j,\gamma_1,\dots,\gamma_k).$$

On a alors avec ces notations

Lemme 1.2. — $q(v^{sp},w)=q(\alpha,\beta,\gamma)=\displaystyle\sum_{u=1}^{j}\beta_u+jk+\#\big\{(u,v):\alpha_u<\gamma_v\big\}.$

Démonstration. — $q(\alpha,\beta,\gamma)$ est égal au nombre de racines simples qui ont un produit scalaire négatif avec $(e+1,e,\dots,\alpha_1,\dots,\alpha_i,-\beta_1,\dots,-\beta_j,\gamma_1,\dots,\gamma_k)$. Notons p_t le t-ième entier de cette liste. Ces racines peuvent être soit $\epsilon_a+\epsilon_b$, soit $\epsilon_a-\epsilon_b$ avec $a\neq b$.

Dans le premier cas, on a $p_a<0$ ou $p_b<0$; supposons que $p_a<0$: il existe alors u tel que $p_a=-\beta_u$. Pour chaque u les indices b doivent être tels que $-\beta_u+p_b<0$ et, pour ne pas compter deux fois une même paire (u,b), on peut demander de plus que $\beta_u\geq|p_b|$. D'après le fait que les $|p_b|$ sont tous les entiers entre 1 et $i+j+k$, il y a exactement β_u tels indices.

Dans le deuxième cas des racines de la forme $\epsilon_a-\epsilon_b$, les jk combinaisons avec a correspondant à β_u et b à γ_v conviennent, par ailleurs les couples où a correspond à α_u et b à γ_v avec $\alpha_u<\gamma_v$ conviennent également.

On obtient le résultat annoncé en combinant ces remarques. □

Une conséquence du lemme 1.1 est

Proposition 1.1. — *$H^{p,q}[G_\omega(r,V),\mathcal{O}(1)]$ est somme de représentations fondamentales.*

Démonstration. — Dans la suite spectrale de Borel-Le Potier [10], par le lemme 1.1, les termes d'ordre 1 sont tous des représentations fondamentales. Comme les morphismes qui interviennent dans cette suite spectrale sont équivariants, cela est aussi vrai pour les termes d'ordre supérieur. □

Dans le cas d'une grassmannienne isotrope lagrangienne, on peut par cette méthode déterminer précisément toute la cohomologie de Dolbeault de $\mathcal{O}(1)$:

PROPOSITION 1.2. — *On a*

$$H^{m(m+1),m^2}(G_\omega(e,\mathbb{C}^{2e}),\mathcal{O}(1)) = \wedge^{\langle e-2m\rangle}\mathbb{C}^{2e}$$

pour $0 \le m \le [\frac{1}{2}e]$ *et les autres termes sont nuls.*

Dans cette proposition, pour x réel, j'ai noté $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Snow [15, Theorem p. 6] a déterminé tous les couples d'entiers (p,q) tels que $H^{p,q}(G_\omega(e,\mathbb{C}^{2e}),\mathcal{O}(1)) \neq 0$, en utilisant la décomposition du fibré des p-formes établie par Kostant. Il ne décrit pas ces groupes de cohomologie, mais c'est une conséquence facile de son étude. Je propose ici, pour éviter d'introduire ses notations, de montrer que cette proposition est une conséquence facile de mon lemme 1.1.

Démonstration. — Puisque le fibré U est nul, une composante du fibré des p-formes s'écrit $S_{u^+}T$. Reprenant les notations du lemme 1.1, il s'agit d'étudier le poids

$$(e+1,\dots,\ell+3,\ell+1-u_\ell^+,\dots,2-u_1^+),$$

où ℓ désigne la longueur de u^+, soit u_1. Notons $\alpha_i = i+1-u_i^+$. La suite (α_i) est strictement décroissante. La démonstration du lemme 1.1 montre qu'il existe i tel que $|\alpha_i| = 1$. Soit m la longueur de u ; $u_{m+1}^+ \le m$, donc $\alpha_{m+1} \ge 2$. De plus, $u_m^+ \ge m+1$, donc $\alpha_m \le 0$. Comme pour tout i, $\alpha_i \neq 0$ et qu'il existe i tel que $|\alpha_i| = 1$, on a donc $\alpha_m = -1$, soit $u_m^+ = m+2$, ou $u_m = 2$. On a donc $u_{m+1}^+ = m$ et $\alpha_{m+1} = 2$. De même, en raisonnant sur l'entier i tel que $|\alpha_i| = 3$, on voit que $u_{m-1} = 4$, et on peut alors démontrer par récurrence que $u = (2m, 2(m-1),\cdots,2)$.

Alors un calcul immédiat montre que le poids considéré est

$$\big(e+1,\dots,2m+2,2m,2m-2,\dots,2,-1,-3,\dots,-(2m-1)\big).$$

On en déduit que les entiers p et q correspondant sont $m(m+1)$ et m^2 (lemme 1.2), et que la représentation irréductible est de plus haut poids $(1,\dots,1,0,\dots,0)$. □

1.4. Cas orthogonal. — Comme dans le cas d'une forme symplectrique, la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ ne fait apparaître que des représentations fondamentales :

PROPOSITION 1.3. — $H^{p,q}[G_q(r,V),\mathcal{O}(1)]$ *est somme de représentations fondamentales. De plus,* $H^{p,q}[G_q(r,V),\mathcal{O}(1)] = 0$ *si* $\dim V = 2r$ *ou* $\dim V = 2r+1$.

Le cas des espaces de dimension maximale a déjà été démontré par Snow [15].

Démonstration. — Il suffit de démontrer ce résultat pour une composante du gradué associé au fibré des p-formes. Par [11, exemple 6, p. 138],

$$\wedge^i S^2 V = \bigoplus_{|\lambda|=i} S_{\lambda^-} V,$$

où $\lambda^- = (\lambda + 1 \,|\, \lambda)$. Pour toute composante du gradué associé au fibré des p-formes, il existe des partitions u, v, w, v^0 telles que cette composante soit $S_w T \otimes S_{\langle v \rangle^0} U$ avec $S_w T$ une composante de $S_{u^-} T \otimes S_v T$ et $S_{\langle v^0 \rangle} U$ une composante de $S_{v^*} U$. Soit $n = \dim V$ et ℓ la longueur de w.

Le résultat va alors découler d'inégalités concernant ces partitions. Tout d'abord, on a $v_1 = \ell(v^*) \leq n - 2r$, car sinon $S_{v^*} U = 0$. Puisque $S_w T$ est une composante de $T_{u^-} T \otimes S_v T$, on a $w_1 \leq u_1^- + v_1 \leq (\ell - 1) + (n - 2r)$. On remarque alors que la règle de Littlewood-Richardson implique que $\ell(v) \leq \ell$, soit $v_1^* \leq \ell$, et donc $v_1^0 \leq \ell$, car comme dans le cas symplectique, il est facile de voir que $v_1^0 \leq v_1^*$.

Il y a quatre cas, selon la parité de n et le fait que l'on considère ou non des espaces de dimension maximale. Commençons par le cas $n = 2m$ et $r < m$. Notons encore $k = m - r$.

Les plus hauts poids correspondant aux fibrés sont alors

$$\begin{aligned}
S_w T \ &: \big(\ 0, \dots, 0\ ,\ -w_\ell, \dots, -w_1\ , \qquad\qquad\qquad\qquad 0, \dots, 0\big),\\
S_{v^0} U \ &: \big(\ 0, \dots, 0\ , \qquad 0, \dots, 0 \qquad ,\ v_1^0 - v_{2k}^0, \dots, v_k^0 - v_{k+1}^0\big),\\
\mathcal{O}(1) \ &: \big(\ 1, \dots \qquad , \qquad \dots, 1 \qquad\quad , \qquad\qquad\qquad\qquad 0, \dots, 0\big),\\
\rho = \ &\big(\ e-1, e-2, \quad \dots \qquad\qquad , \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dots, 0\big).
\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'étudier le poids

$$\big(e, e-1, \dots, k+\ell-w_\ell, \dots, k+1-w_1, k-1+v_1^0-v_{2k}^0, \dots, v_k^0 - v_{k+1}^0\big).$$

Ce poids est de nouveau constitué de deux suites décroissantes, et il suffit de majorer les valeurs absolues qui interviennent. Comme on a vu que $w_1 \leq \ell - 1 + 2k$, on a $k + 1 - w_1 \geq -k - \ell + 2$. Par ailleurs, $k + \ell - w_\ell \leq k + \ell - 1$ et $k - 1 + v_1^0 \leq k + \ell - 1$. Ainsi, toutes ces valeurs absolues sont comprises entre 0 et $k + \ell - 1$; ce sont donc tous ces nombres et le groupe de cohomologie correspondant est une puissance extérieure. Notons que ce poids peut avoir une composante égale à 0 sans être singulier puisqu'aucune racine de D_m n'est de la forme $c\epsilon_i, c \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}$.

- Dans le cas $n = 2m+1, r < m$, on note $k = m - r$ et on étudie de même le poids

$$\big(e+\tfrac12, \dots, k+\ell+\tfrac12-w_\ell, \dots, k+1+\tfrac12-w_1, k-\tfrac12+v_1^0-v_{2k+1}^0, \dots, \tfrac12+v_k^0-v_{k+2}^0\big).$$

On a $k+1+\frac12-w_1 \geq -k-\ell+2+\frac12$, $k+\ell+\frac12-w_\ell \leq k+\ell-\frac12$ et $k-\frac12+v_1^0 \leq k+\ell-\frac12$. Ainsi, ces nombres sont tous les entiers entre $\frac12$ et $k+\ell-\frac12$, et on peut conclure.

• Si $n=2m$ et $r=m$, on étudie le poids $\left(e-\frac{1}{2},\dots,\ell-\frac{1}{2}-u_\ell^-,\dots,\frac{1}{2}-u_1^-\right)$. Comme $\ell-\frac{1}{2}-u_\ell^-\leq \ell-1-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}-u_1^-=\frac{3}{2}-\ell$, ce poids est singulier.

• Enfin, si $n=2m+1$ et $r=m$, on considère le poids $(e,\dots,\ell-w_\ell,\dots,1-w_1)$. Comme $w_1\leq u_1^-+1\leq \ell$, les valeurs de ces entiers sont entre 0 et $\ell-1$, ils ne peuvent donc pas être distincts et non nuls et ce poids est de nouveau singulier. □

On peut de nouveau préciser cette étude dans le cas lagrangien :

Proposition 1.4. — *On a* $H^{m^2,m(m-1)}[G_q(e,\mathbb{C}^{2e}),\mathcal{O}(2)]=\wedge^{e-2m}\mathbb{C}^{2e}$ *pour* $0\leq m\leq[\frac{1}{2}e]$ *et les autres termes sont nuls.*

Démonstration. — Comme le poids de $\mathcal{O}(2)$ est $(1,\dots,1)$, le poids à considérer est $(e,e-1,\dots,\ell-u_l^-,\dots,1-u_1^-)$. Notons $\alpha_i=i-u_i^-$. Par l'argument utilisé plus haut, $\{|\alpha_i|\}$ est l'ensemble de tous les entiers entre 0 et $\ell-1$. Soit m la longueur de u ; $u_{m+1}^-=m$ donc $\alpha_{m+1}=1$. Ainsi $\alpha_m\leq 0$, et comme il existe i tel que $|\alpha_i|=0$, on a donc $\alpha_m=0$, et $u_m=1$. Si $\ell(u^-)=m+1$, alors $u_1=m$, $u=(m,m-1,\dots,1)$, ce qui est absurde. On a donc $u_{m+2}^-=m-1$, $\alpha_{m+2}=3$ et donc $\alpha_{m-1}=-2$, soit $u_{m-1}=3$. En raisonnant par récurrence, on en déduit que $u=(2m-1,2m-3,\dots,1)$. On montre alors que $p=m^2,q=m(m-1)$ et que le groupe de cohomologie correspondant est $\wedge^{e-2m}\mathbb{C}^{2e}$. □

2. Géométrie des fibrés munis d'une forme symplectique ou quadratique

Je rappelle dans ce paragraphe des résultats classiques concernant les fibrés munis d'une forme non-dégénérée. Le lecteur pourra par exemple trouver des preuves de ces résultats dans ma thèse [3].

2.1. Cas symplectique. — Soit X une variété projective lisse et E un fibré vectoriel sur X de rang $2e$ muni d'une forme symplectique. Ceci signifie qu'on se donne un fibré en droites L sur X et une section globale ω de $E^*\otimes E^*\otimes L$ telle que pour tout $x\in X$, ω_x est symplectique.

Soit V un espace vectoriel de dimension $2e$ fixé, et pour tout ouvert U_i trivialisant E et L, f_i et g_i des isomorphismes entre $E_{|U_i}$ et le fibré trivial $V\times U_i\to U_i$, et entre $L_{|U_i}$ et $\mathbb{C}\times U_i$. Soit $x\in X$ et $\Omega_i(x)$ la forme symplectique définie par

$$\Omega_i(x)(v_1,v_2)=g_i\big\{\omega_x[f_i^{-1}(x,v_1),f_i^{-1}(x,v_2)]\big\}.$$

Lemme 2.1. — *Soit E un fibré muni d'une forme symplectique à valeurs dans L, V un espace vectoriel de dimension* $\dim E$ *fixé et Ω une forme symplectique sur V. On peut choisir des trivialisations de E et L de telle sorte que les fonctions de transition $f_{i,j}$ de E et $g_{i,j}$ de L vérifient $f_{i,j}^*\Omega_i=g_{i,j}\Omega_j$.*

Par ailleurs, si r est un entier, la projection $G_\omega(r,E) \to X$ est une fibration localement triviale.

Une autre propriété géométrique est que si E est ample, alors le fibré en droites L l'est aussi.

LEMME 2.2. — *On a* $L^e \simeq \det E := \wedge^{2e} E$.

2.2. Cas quadratique. — On se donne maintenant un fibré quadratique E, c'est-à-dire un fibré E, un fibré en droites L et une section globale q de $E^* \otimes E^* \otimes L$ telle qu'en tous points $x \in X$, q_x est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Soient Q_i les formes quadratiques définies de façon similaire au paragraphe précédant ; le résultat reste valable si on s'autorise un morphisme fini :

LEMME 2.3. — *Soit E un fibré muni d'une forme quadratique à valeurs dans L, V un espace vectoriel de dimension* $\mathrm{rg}(E)$ *fixé et q une forme quadratique sur V. Il existe un morphisme fini $\varphi : Y \to X$ tel que les fonctions de transition $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ de φ^*E et φ^*L vérifient $f_{i,j}^* Q_i = g_{i,j} Q_j$. Par ailleurs, si r est un entier, la projection $G_q(r,\varphi^*E) \to Y$ est une fibration localement triviale.*

LEMME 2.4. — *On a* $(\det E)^2 \simeq L^e$.

Pour démontrer un théorème d'annulation en cohomologie, on peut passer à un revêtement fini. En effet, si $\varphi : Y \to X$ est un revêtement fini, E un fibré vectoriel ample muni d'une forme quadratique q à valeurs dans L, considérons les fibrés $F = \varphi^*E$ et $M = \varphi^*L$ sur Y ; F est ample et φ^*q est une forme quadratique sur F à valeurs dans M. Si S est un foncteur de Schur et t un entier, comme on sait que l'application $H^{p,q}(X, SE \otimes L^t) \to H^{p,q}(Y, SF \otimes M^t)$ induite par φ est injective [12, lemme 1.5.1, p. 128], on déduit l'annulation de $H^{p,q}(X, SE \otimes L^t)$ de celle de $H^{p,q}(Y, SF \otimes M^t)$.

Dans la suite, je supposerai donc que E et L sont tels que leurs fonctions de transition $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ vérifient $f_{i,j}^* q = g_{i,j} q$ et que la projection $G_q(r,E) \to X$ est localement triviale.

On aurait aussi pu remarquer que notre forme quadratique est, dans le cadre holomorphe, localement triviale, et montrer nos théorèmes d'annulation dans ce cadre.

3. Théorèmes d'annulation

Dans ce paragraphe, je démontre les théorèmes d'annulation annoncés dans l'introduction. Les résultats obtenus concernant la cohomologie de $\mathcal{O}(1)$ sur une grassmannienne isotrope sont trop peu précis pour montrer des théorèmes d'annulation ; j'utilise plutôt la cohomologie de fibrés en droites sur les grassmanniennes lagrangiennes pour obtenir mes résultats.

3.1. Théorème d'annulation dans le cas symplectique. — Soit, pour x réel, $[x]$ la partie entière de x et $[x]^+$ le plus petit entier supérieur ou égal à x, et soit, pour e et t des entiers,

$$r(e,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{si } t \text{ est pair,} \\ e & \text{si } t \text{ est impair.} \end{cases}$$

PROPOSITION 3.1. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p,q,t,l des entiers avec $1 \leq t \leq e$. Alors on a*

$$H^{p,q}(X, \wedge^{\langle 2t\rangle} E \otimes L^{\ell}) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n + t(4e-2t+1) \\ \ell \geq (t-1)[\frac{1}{2}(n-p)]^+ + e - t \\ n-p \leq 2(e-t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} p+q > n + t[2(t+n-p+1)+1] \\ \ell \geq t[\frac{1}{2}(n-p)]^+ \\ n-p > 2(e-t). \end{cases}$$

W. Nahm [8] obtient cette annulation pour $p+q > n + 2\delta(n-p)(2e-t)$ (où $t \mapsto \delta(t)$ est une fonction de l'ordre de $\sqrt{t}$. La borne de la proposition 3.1 est donc meilleure pour $t < \delta(n-p)$.

Démonstration. — À t fixé, l'annulation sous la deuxième condition est une conséquence de l'annulation sous la première. En effet, si la proposition est vraie sous la première condition pour t, soient p, q, ℓ des entiers tels que

$$p+q > n + t\big[2(t+n-p+1)+1\big] \quad \text{et} \quad \ell \geq t\big[\tfrac{1}{2}(n-p)\big]^+.$$

Soit alors $\varphi : X' \to X$ un morphisme fini et $M' \to X'$ un fibré en droites tel que $M'^{\otimes 2} = \varphi^* L$. Les fibrés $E' := \varphi^* E, M'$ et $L' := \varphi^* L$ sont alors amples [7], et on peut considérer sur X' le fibré $F' := E' \oplus (M' \oplus M')^{2(f-e)}$ avec

$$f = \big[\tfrac{1}{2}(n-p)\big]^+ + t. \tag{4}$$

Alors F' est ample de rang $4f$. Pour $x' \in X'$, la forme symplectique $\omega_{\varphi(x')}$ est une forme symplectique sur $E'_{x'}$ à valeurs dans $L'_{x'}$. On va l'étendre à une forme $\omega_{x'}$ sur F'. Il suffit pour cela de poser, sur une composante de $F'_{x'}$ de la forme $M' \oplus M'$,

$$\omega_{x'}\big[(m_1 \oplus m_2), (n_1 \oplus n_2)\big] = m_1 \otimes n_2 - m_2 \otimes n_1 \in L',$$

et de décider que ces espaces sont orthogonaux deux à deux et orthogonaux à E'.

Comme $n-p+1 \geq 2(f-t)$ par (4), l'hypothèse $p+q > n+t[2(t+n-p+1)+1]$ donne $p+q > n+t(4f-2t+1)$. De plus,

$$\ell \geq t\big[\tfrac{1}{2}(n-p)\big]^+ = (t-1)\big[\tfrac{1}{2}(n-p)\big]^+ + f - t.$$

On a donc, par la première partie de la proposition, $H^{p,q}(X', \wedge^{\langle 2t\rangle} F' \otimes L'^{\ell}) = 0$. Maintenant, $\wedge^{\langle 2t\rangle} F' \supset \wedge^{\langle 2t\rangle} E'$, donc $H^{p,q}(X', \wedge^{\langle 2t\rangle} E' \otimes L^{\ell}) = 0$. Comme φ est finie, l'application $\varphi^* : H^{p,q}(X, \wedge^{\langle 2t\rangle} E \otimes L^{\ell}) \to H^{p,q}(X', \wedge^{\langle 2t\rangle} E' \otimes L'^{\ell})$ est injective, donc $H^{p,q}(X, \wedge^{\langle 2t\rangle} E \otimes L^{\ell}) = 0$.

Montrons donc la première partie. Soient p, q, ℓ, t des entiers tels que $p+q > n+t(4e-2t+1)$ et $n-p \leq 2(e-t)$ et supposons vraie par récurrence la proposition pour tout p, q et $t' < t$. Soit $\pi : G_\omega(2e, E) \to X$ la fibration en grassmanniennes lagrangiennes. Posons $\widetilde{\ell} = \ell - (e-t)$,

$$P = p + (e-t)(e-t+1), \tag{5}$$

et considérons la suite spectrale de Borel-Le Potier [10] calculant la cohomologie de $M = \mathcal{O}(1) \otimes (\pi^* L)^{\widetilde{\ell}}$ sur $G_\omega(2e, E)$.

Si $\pi : Y \to X$ est une fibration et E un fibré vectoriel sur Y, notons $R^{p,q}\pi_* E$ le faisceau $R^q\pi_*(E \otimes \Omega^p_{Y/X})$, où $\Omega^p_{Y/X}$ désigne le fibré des p-formes relatives à la fibration π. Soit $G^{t,P} = \Omega^{P-t}_{G_\omega(2e,E)/X} \otimes \pi^*\Omega^t_X$. Les termes d'ordre 1 de la suite de Borel-Le Potier, qui aboutit sur $H^{P,q}(G_\omega(2e, E), M)$, sont donnés par

$${}^P E_1^{t,q-t} = H^q\big(G_\omega(2e, E), G^{t,P} \otimes M\big).$$

Pour calculer les groupes de cohomologie $H^q(Y, G^{t,p} \otimes E)$, on utilise une suite spectrale de Leray. La suite spectrale de termes d'ordre 2

$${}^{P,t}E_2^{k,j-k} = H^{t,k}(X, R^{P-t,j-k}\pi_* M) \tag{6}$$

aboutit sur ${}^P E_1^{t,j}$.

Comme par la proposition 1.3, $H^{i,j}[G_\omega(2e, \mathbb{C}^{4e}), \mathcal{O}(1)]$ ne peut être non nul que si (i,j) est de la forme $(m(m+1), m^2)$, on a

$${}^{P,i}E_2^{j,k} \neq 0 \implies \exists\, t' : P - i = (e-t')(e-t'+1), k = (e-t')^2. \tag{7}$$

Si ces égalités sont vraies, on a

$${}^{P,i}E_2^{j,k} = H^{P-(e-t)'(e-t'+1),j}(X, \wedge^{\langle 2t'\rangle} E \otimes L^{\ell+t-'t}). \tag{8}$$

En effet, pour calculer les fibrés $R^{(e-t')(e-t'+1),(e-t')^2}\pi_*(\mathcal{O}(1) \otimes (\pi^* L))$, il suffit de comprendre les applications induites en cohomologie par les applications de changement de cartes $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$. Soit $x \in U_i \cap U_j$ et γ un nombre tel que $\gamma^2 = g_{i,j}(x)$. Par le lemme 2.1, $f_{i,j}(x)/\gamma$ est une application symplectique ; son action induite en cohomologie est donc donnée par le théorème de Bott. Il s'agit de

$$\wedge^{\langle 2t'\rangle} \frac{f_{i,j}}{\gamma} = \frac{\wedge^{\langle 2t'\rangle} f_{i,j}(x)}{\gamma^{2t'}}.$$

Comme les homothéties agissent trivialement sur le fibré tangent d'une grassmannienne isotrope, l'action de $\gamma.Id$ en cohomologie est $\gamma^{2e} = g_{i,j}(x)^e$. Ainsi, l'action induite en cohomologie par $f_{i,j}(x)$ vaut $g_{i,j}(x)^{e-t'} \wedge^{\langle 2t'\rangle} f_{i,j}(x)$. Ceci montre que le fibré $R^{(e-t')(e-t'+1),(e-t')^2}\pi_*(\mathcal{O}(1))$ correspondant est $\wedge^{\langle 2t'\rangle}E \otimes L^{e-t'}$ et on trouve le résultat (8).

La formule (7) implique que lorsque P et i sont fixés, il y a au plus une valeur de k telle que ${}^{P,i}E_2^{j,k}$ soit non nul ; cette suite spectrale est donc dégénérée. Ainsi,

$$(9)\quad {}^{P}E_1^{P-(e-t')(e-t'+1),j+(e-t')(2e-2t'+1)-P} = H^{P-(e-t')(e-t'+1),j}(X, \wedge^{\langle 2t'\rangle}E \otimes L^{\ell+t-t'}),$$

et les autres termes sont nuls. En particulier,

$${}^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P} = {}^{P}E_1^{p,q-p+(e-t)^2} = H^{p,q}(X, \wedge^{\langle 2t\rangle}E \otimes L^{\ell}).$$

On cherche maintenant à montrer que ce terme n'est compensé par aucun autre de la suite spectrale.

Soit donc t', et considérons les termes ${}^{P}E_1^{P-(e-t')(e-t'+1),u}$.

• Si $t' > t$, alors on a

$$P - (e-t')(e-t'+1) \geq P - (e-t-1)(e-t) = p + 2(e-t) \geq n$$

par (5). Pour que $\Omega_X^{P-(e-t')(e-t'+1)}$ soit non nul, il faut donc que $t' = t+1$ et $n = p+2(e-t)$. La différentielle qui pourrait compenser ${}^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}$ serait l'application

$$d_{2e-2t} : {}^{P}E_{2e-2t}^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P} \longrightarrow {}^{P}E_{2e-2t}^{n,q+(e-t)(2e-2t+1)-P-(2e-2t-1)}.$$

Or, par (9), ce dernier groupe est inclus dans

$${}^{P}E_1^{n,q+2(e-t)+(e-t-1)(2e-2t-1)-P} = H^{n,q+2(e-t)}(X, \wedge^{\langle 2t+2\rangle}E \otimes L^{\ell-1}).$$

Ce dernier groupe est nul par le théorème de Le Potier si $q+2(e-t) > 4e-2t-2$, soit $q > 2e-2$, ce qui est le cas.

• Si $t' < t$, on utilise l'hypothèse de récurrence. Le terme qui pourrait compenser ${}^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}$ est alors

$$\begin{aligned}&{}^{P}E_{(e-t')(e-t'+1)-(e-t)(e-t+1)}^{P-(e-t')(e-t'+1),q+(e-t)^2+(e-t')(e-t'+1)-1-P}\\ &\qquad\subset H^{P-(e-t')(e-t'+1),q+(e-t)^2-(e-t')^2-1}(X, \wedge^{\langle 2t'\rangle}E \otimes L^{\ell+t-t'}).\end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned}P - (e-t')(e-t'+1) &= p - (t-t')(2e-t-t'+1)\\ &\leq p - (2e-t-t') - (t-t') = p - 2e + 2t' < n - 2(e-t')\end{aligned}$$

(en effet on peut supposer $p < n$), on est dans le deuxième cas de la proposition, et $q + (e-t)^2 - (e-t')^2 - 1 = q - (t-t')(2e-t-t') - 1$. Ce dernier groupe est nul par hypothèse de récurrence si

$$p+q>t'\big[2(t'+n-p+1)+1\big]+(t-t')(4e-2t-2t'+1)+1. \tag{10}$$

Comme $t'<t$ et $n-p\leq 2(e-t)$, on a $t'+n-p<2e-t$, et comme on peut supposer $t'>0$, le terme de droite de l'inéquation (10) est inférieur à

$$t'\big[2(2e-t)+1\big]+(t-t')(4e-2t+1)=t'(4e-2t+1)<p+q.$$

Ainsi, aucun terme ne peut compenser

$$^{P}E_1^{p,q+(e-t)(2e-2t+1)-P}=H^{p,q}(X,\wedge^{\langle 2t\rangle}E\otimes L^{\ell})$$

et donc $^{P}E_1^{p,q-p+(e-t)^2}={}^{P}E_\infty^{p,q-p+(e-t)^2}$. Ce dernier est un terme du gradué associé à $H^{P,q+(e-t)^2}[G_\omega(2e,E),\mathcal{O}(1)]$, qui est nul par Kodaira dès que l'on a $P+q+(e-t)^2>n+e(2e+1)$, soit par (5) dès que $p+q>e(2e+1)-(e-t)(2e-2t+1)=t(4e-2t+1)$. □

Le cas des puissances extérieures impaires est très similaire :

Proposition 3.2. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e+2$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p,q,t,ℓ des entiers avec $0\leq t\leq e$. Alors on a*

$$H^{p,q}(X,\wedge^{\langle 2t+1\rangle}E\otimes L^{\ell})=0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q>n+2e+1+t(4e-2t+1),\\ \ell\geq t[\frac{1}{2}(n-p)]^{+}+e-t,\\ n-p\leq 2(e-t)\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} p+q>n+2e+1+t[2(t+n-p+1)+1],\\ \ell\geq (t+1)[\frac{1}{2}(n-p)]^{+},\\ n-p>2(e-t).\end{cases}$$

Démonstration. — Pour les mêmes raisons que précédemment, il suffit de démontrer cette proposition sous les premières conditions. La récurrence commence à $t=0$, c'est pourquoi on trouve la borne sur ℓ que j'ai indiquée. On étudie alors la suite spectrale qui calcule la cohomologie de $\mathcal{O}(1)\otimes(\pi^*L)^{\ell-(e-t)}$ sur la grassmannienne lagrangienne $G_\omega(2e+1,E)$. On pose aussi $P=p+(e-t)(e-t+1)$. Comme la proposition 1.3 reste valable, le calcul des termes de cette suite spectrale est identique. La récurrence fonctionne donc de manière similaire ; le seul changement concerne la dimension de $G_\omega(2e+1,\mathbb{C}^{4e+2})$ qui est $(e+1)(2e+1)$. Ainsi on aura $^{P}E_\infty^{p,q-p+(e-t)^2}=0$ comme précédemment si $P+q+(e-t)^2>n+(e+1)(2e+1)$, soit $p+q>t(4e-2t+1)+2e+1$. On trouve ainsi la borne que j'ai indiquée pour $p+q$. □

En applicant les deux propositions précédentes au fibré $F' = E' \oplus (M' \oplus M')$, comme dans la preuve de la proposition 3.1, on obtient le résultat mentionné en introduction. Notons $r(e,t)$ l'entier $\frac{1}{2}t$ si t est pair, et e si t est impair.

Théorème 3.1. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $2e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme symplectique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq t \leq e$. Alors on a*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^{\langle t\rangle} E \otimes (\det E)^k\big] = 0 \ \textit{si} \ \begin{cases} p+q > n + \big[\frac{1}{2}t\big]\big(4\big[\frac{1}{2}e\big]^+ - t\big) + r(e,t), \\ k \geq \big(\big[\frac{1}{2}(t-1)\big]\big[\frac{1}{2}(n-p)\big]^+ + e - \big[\frac{1}{2}t\big]\big)/e, \\ n-p \leq 2\big[\frac{1}{2}(e-t)\big]. \end{cases}$$

Démonstration. — Le lemme 2.2 implique que $(\det E)^k \simeq L^{ke}$. Alors, les propositions 3.1 et 3.1 montrent ce théorème pour t et e de même parité. Il suffit, pour l'établir pour t pair et e impair par exemple, d'appliquer, comme dans la preuve de la proposition 3.1, le cas t et e pairs à $F' = E' \oplus (M' \oplus M')$, qui est un fibré de rang multiple de 4. □

Remarque. — Le théorème est donc applicable dès que

$$p+q > n + \tfrac{1}{2}t(2e+3-t), \quad 4k \geq t+3, \quad n-p \leq e-t-1.$$

3.2. Théorème d'annulation dans le cas quadratique

Proposition 3.3. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p, q, t, ℓ des entiers avec $1 \leq t \leq e$. Alors on a*

$$H^{p,q}(X, \wedge^{2t} E \otimes L^\ell) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n + t(4e-2t-1), \\ \ell \geq (t-1)\big[\frac{1}{2}(n-p+1)\big]^+ + e - t, \\ n-p \leq 2(e-t)-1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} p+q > n + t\big[2(t+n-p+2)-1\big], \\ \ell \geq t\big[\frac{1}{2}(n-p+1)\big]^+, \\ n-p > 2(e-t)-1. \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons d'abord que la première partie de cette proposition est vraie pour un entier t. Alors soit $\varphi : X' \to X$ un morphisme fini, $E' = \varphi^* E$, $L' = \varphi^* L$ et M' un fibré en droites tel que $M'^2 = L'$. Soit $F' = E' \oplus M'^{4(f-e)}$ avec $f = [\frac{1}{2}(n-p+1)]^+ + t$, et définissons une forme quadratique sur F' de façon similaire au cas symplectique.

Alors, la définition de f montre que $n-p+1 \leq 2(f-t) \leq n-p+2$; ainsi nous pouvons appliquer la première partie à F'. L'hypothèse $\ell \geq t[\frac{1}{2}(n-p+1)]^+$ signifie exactement $\ell \geq (t-1)[\frac{1}{2}(n-p+1)]^+ + f - t$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} p+q &> n+t\big[2(t+n-p+2)-1\big] \\ &\geq n+t\big[2(t+2f-2t)-1\big] = n+t(4f-2t-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $H^{p,q}(X', \wedge^{2t})E' \otimes L'^{\ell}) = 0$ et $H^{p,q}(X, \wedge^{2t}E \otimes L^{\ell}) = 0$.

Pour démontrer le premier point, on regarde la suite spectrale calculant la cohomologie de $\mathcal{O}(2) \otimes (\pi^*L)^{\ell-(e-t)}$ sur $G_q(2e, E)$, où je note π la projection $G_q(2e, E) \to X$. On pose $P = p + (e-t)^2$. Alors on montre de même que

$${}^P E_1^{P-(e-t')^2, j+(e-t')(2e-2t'-1)-P} = H^{P-(e-t')^2, j}(X, \wedge^{2t'}E \otimes L^{\ell+t-t'}).$$

Il s'agit donc de même d'annuler ces termes pour $t \neq t'$. Mais si $t' > t$, cela résulte facilement du théorème de Le Potier. Pour $t' < t$, il suffit d'annuler $H^{p',q'}(X, \wedge^{2t'}E \otimes L^{\ell+t-t'})$ avec

$$p' = p - (t-t')(2e-t-t'), \quad q' = q - (t-t')(2e-t-t'-1) - 1.$$

Mais, d'une part, $p' \leq p - (2e - 2t' + 1) < n - 2(e-t') - 1$, car on peut supposer que $p < n$; on est donc dans le deuxième cas. D'autre part, il suffit de montrer que

$$p+q > n + t'\big[2(t'+n-p+2)-1\big] + (t-t')(4e-2t-2t'-1) + 1.$$

Or puisque $t'+n-p \leq t'+2(e-t)-1 < 2e-t-1$, le membre de droite de l'inéquation est inférieur à

$$n + t'\big[2(2e-t)-1\big] + (t-t')(4e-2-1) = n + t(4e-2t-1),$$

et il est donc bien plus petit que $p+q$.

Enfin, il reste à montrer que $H^{P,q+(e-t)(e-t-1)}[G_q(2e,E), \mathcal{O}(2)]$ est nul par le théorème de Kodaira. En effet,

$$\begin{aligned} \dim G(2e,E) - P - q - (e-t)(e-t-1) \\ &= n + e(2e-1) - (e-t)^2 - (e-t)(e-t-1) \\ &= n + e(2e-1) - (e-t)(2e-2t-1) \\ &= n + t(4e-2t-1). \end{aligned}$$

□

De façon tout à fait similaire, on démontre :

Proposition 3.5. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang $4e+2$ sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites ample L. Soient p, q, t, l des entiers avec $0 \leq t \leq e$. Alors on a*

$$H^{p,q}(X, \wedge^{2t+1}E \otimes L^{\ell}) = 0$$

dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} p+q > n + t(4e-2t-1)+2e, \\ \ell \geq t\big[\frac{1}{2}(n-p+1)\big]^{+} + e - t, \\ n-p \leq 2(e-t)-1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} p+q > n + t\big[2(t+n-p+2)-1\big]+2e, \\ \ell \geq (t+1)\big[\frac{1}{2}(n-p+1)\big]^{+}, \\ n-p > 2(e-t)-1. \end{cases}$$

Pour x réel, notons $\{x\} = x - [x]$ sa partie décimale. Ces deux propositions peuvent se rassembler en

Théorème 3.2. — *Soit E un fibré vectoriel ample de rang e sur X, variété projective lisse de dimension n, muni d'une forme quadratique. Soient p, q, t, k des entiers avec $0 \leq t \leq [\frac{1}{2}e]$. Alors on a*

$$H^{p,q}\big[X, \wedge^{t} E \otimes (\det E)^{2k}\big] = 0$$

si

$$\begin{cases} p+q > n + \big[\frac{1}{2}t\big]\big(4\big[\frac{1}{4}e - \{\frac{1}{2}t\}\big]^{+} + 2\big\{\frac{1}{2}t\big\} - t - 1\big) + 4\big\{\frac{1}{2}t\big\}\big[\frac{1}{4}(e-2)\big]^{+}, \\ k \geq \big(\big[\frac{1}{2}(t-1)\big]\big[\frac{1}{2}(n-p+1)\big]^{+} + 2\big\{\frac{1}{2}t\big\}\big(\big[\frac{1}{4}(e-2)\big]^{+} - \big[\frac{1}{2}t\big]\big)\big)/e, \\ n-p \leq 2\big[\frac{1}{4}e - \big\{\frac{1}{2}t\big\}\big]^{+} + 2\big\{\frac{1}{2}t\big\} - t - 1. \end{cases}$$

Remarque. — Ce théorème s'applique si

$$p+q > n + \tfrac{1}{2}t(e+2-t), \quad 8k \geq t+1, \quad n-p \leq \tfrac{1}{2}e - t - 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Akhiezer (D.) – *Lie Group Actions in Complex Analysis*, Aspects of Mathematics, vol. 27, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1995.

[2] Bourbaki (N.) – *Groupes et algèbres de Lie, chapitre 6*, Hermann, 1968.

[3] Chaput (P.E.) – *Géométrie de quelques algèbres et théorèmes d'annulation*, Thèse, Université de Grenoble, 2003, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/these_alpha.html`.

[4] Demailly (J.-P.) – *Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle*, Invent. Math., t. **91** (1988), pp. 203–220.

[5] Fulton (W.) & Harris (J.) – *Representation Theory. A First Course*, Graduate Texts in Math., vol. 129, Springer Verlag, New York, 1991.

[6] Graham (W.) – *Nonemptiness of symmetric degeneracy loci*, arXiv : `math.AG/0305159`, 2003.

[7] Hartshorne (R.) – *Ample vector bundles*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. **29** (1966), pp. 63–94.

[8] LAYTIMI (F.) & NAHM (W.) – *A generalization of Le Potier's vanishing theorem*, arXiv : `math.AG/0210010`, 2002.

[9] LE POTIER (J.) – *Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque*, Math. Ann., t. **218** (1975), pp. 35–53.

[10] ———, *Cohomologie de la grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel*, Math. Ann., t. **226** (1977), pp. 257–270.

[11] MACDONALD (I.G.) – *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2e éd., Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 1995, with contributions by A. Zelevinsky.

[12] MANIVEL (L.) – *Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels amples*, Thèse, Université de Grenoble, 1992.

[13] ———, *Vanishing theorems for ample vector bundles*, Invent. Math., t. **127** (1997), pp. 401–416.

[14] SCHIFFMAN (B.) & SOMMESE (A. J.) – *Vanishing theorems for weakly positive vector bundles*, Research Notes in Math., vol. 112, Pitman, Boston, MA, 1985.

[15] SNOW (D.M.) – *Vanishing theorems on compact Hermitian symmetric spaces*, Math. Z., t. **198** (1988), pp. 1–20.