BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 144-172

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__144_1>

Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre, dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré; par M. Goursat.

(Séance du 20 juillet 1883.)

1. Les intégrales d'une équation linéaire d'ordre m sont caractérisées par cette propriété que, entre m intégrales, formant un système fondamental, il ne peut exister aucune relation linéaire et homogène; mais il peut y avoir entre ces intégrales une relation homogène d'un degré supérieur.

Dans un récent Mémoire (*Acta mathematica*, t. I, p. 321), M. Fuchs a étudié les équations du troisième ordre à coefficients rationnels dont les intégrales vérifient une relation de cette nature ; l'éminent géomètre a montré que, si la relation est d'un degré supérieur au second, l'intégrale générale peut s'exprimer au moyen de fonctions algébriques. Dans le cas particulier où la relation est du second degré, les intégrales de l'équation proposée sont les carrés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels (¹). Je me propose de montrer qu'il existe un cas de réduction analogue pour les équations linéaires du quatrième ordre. La méthode que j'emploie s'appliquant avec une égale facilité aux équations du troisième ordre, je commencerai par l'indiquer en quelques mots.

2. Soit

$$\frac{d^3 u}{dx^3} + 3\mathrm{B}\frac{d^2 u}{dx^2} + 3\mathrm{C}\frac{du}{dx} + \mathrm{D}u = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire du troisième ordre ou, pour plus de généralité, je suppose que B, C, D soient des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y), y étant lié à x par la relation algébrique $f(x, y) = 0$. S'il existe entre les intégrales de l'équation (1) une relation homogène du second degré à coefficients constants, cette relation pourra être mise sous la forme

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$v_1^2 = v_2 v_3, \tag{2}$$

v_1, v_2, v_3 désignant trois intégrales linéairement distinctes. D'ailleurs, il est clair que, entre les intégrales v_1, v_2, v_3, il ne saurait exister d'autre relation homogène différente de l'équation (2) Cela posé, faisons décrire un cycle à la variable x ; v_1, v_2, v_3 se changent respectivement en

$$\begin{aligned} &a v_1 + b v_2 + c v_3, \\ &a' v_1 + b' v_2 + c' v_3, \\ &a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3, \end{aligned}$$

(¹) *Voir*, à ce sujet, LAGUERRE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 124 et 216 ; APPELL, *Annales de l'École Normale*, 1881, p. 413.

le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

étant essentiellement différent de zéro.

On devra encore avoir

$$(a v_1 + b v_2 + c v_3)^2 = (a' v_1 + b' v_2 + c' v_3)(a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3),$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{a v_1 + b v_2 + c v_3}{a' v_1 + b' v_2 + c' v_3} = \frac{a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3}{a v_1 + b v_2 + c v_3}.$$

La relation (3) doit être identique avec la relation (2), c'est-à-dire que si, entre (2) et (3), on élimine une des quantités v_1, v_2, v_3, le résultat devra être identiquement nul. Pour faire cette élimination, posons

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_3}{v_1} = \omega;$$

on en tire

$$v_1 = \omega v_2, \quad v_3 = \omega^2 v_2,$$

et la relation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{a\omega + b + c\omega^2}{a'\omega + b' + c'\omega^2} = \frac{a''\omega + b'' + c''\omega^2}{a\omega + b + c\omega^2},$$

et cette égalité doit avoir lieu pour toute valeur de ω.

Les trois quantités c, c', c'' ne pouvant être nulles en même temps, puisque Δ est différent de zéro, l'une, au moins, des deux fractions sera du second degré. D'un autre côté, les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions ne peuvent être identiques à un facteur constant près; ce qui entraînerait $\Delta = 0$. Pour que l'égalité (4) ait lieu pour toute valeur de ω, il faudra donc que les deux termes de chacune de ces fractions présentent un facteur commun du premier degré, si elles sont toutes deux du second degré, ou que cela ait lieu pour l'une d'elles, s'il n'y en a qu'une du second degré. Dans les deux cas, par la suppression de ce facteur commun, les deux fractions se réduisent au premier degré, et l'on a identiquement

$$\frac{a\omega + b + c\omega^2}{a'\omega + b' + c'\omega^2} = \frac{a''\omega + b'' + c''\omega^2}{a\omega + b + c\omega^2} = \frac{\lambda\omega + \mu}{\nu\omega + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ désignant des quantités constantes. Il en résulte que tout cycle décrit par la variable change ω en une expression de la forme $\frac{\lambda\omega+\mu}{\nu\omega+\rho}$. Posons, en général,

$$H(u)=\frac{u'''}{u'}-\frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2,$$

u désignant une fonction quelconque de x; on a, quelles que soient les constantes λ, μ, ν, ρ,

$$H\left(\frac{\lambda u+\mu}{\nu u+\rho}\right)=H(u).$$

La fonction $H(\omega)$ *est donc une fonction uniforme du point analytique* (x, y).

Soit $H(\omega)=P(x, y)$; considérons maintenant l'équation du second ordre

$$\frac{d^2z}{dx^2}=p\frac{dz}{dx}+qz,$$

où p et q sont des fonctions uniformes du même point analytique (x, y). Le rapport η de deux intégrales de cette équation satisfait, comme on sait, à l'équation du troisième ordre

$$\frac{\eta'''}{\eta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2=\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}p^2-2q;$$

on peut prendre p et q, et cela, d'une infinité de manières, de façon que l'on ait

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{2}p^2-2q=P(x,y).$$

Il suffira de prendre, par exemple, $p=0$, $q=-\frac{1}{2}P(x, y)$. L'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{2}P(x,y)z=0 \tag{5}$$

admettra deux intégrales dont le rapport sera précisément égal à ω; il suffira de prendre les trois constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de η, de façon que η et ses deux premières dérivées prennent les mêmes valeurs que ω et ses deux premières dérivées pour une valeur particulière de la variable. Soient z_1 et z_2 les deux intégrales dont le rapport est égal à ω; on peut écrire

$$\omega = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1 z_2}{z_2^2}$$

et, par suite,

$$\frac{v_1}{z_1 z_2} = \frac{v_2}{z_2^2} = \frac{v_3}{z_1^2}.$$

Imaginons que l'on ait formé l'équation linéaire du troisième ordre qui admet pour intégrales les carrés des intégrales de l'équation (5) et soit $F(Z) = 0$ cette équation. Ses coefficients seront aussi des fonctions uniformes du point analytique (x, y) et un système fondamental d'intégrales sera constitué par $z_1^2, z_1 z_2, z_2^2$. Désignons par $\frac{1}{\varphi(x, y)}$ la valeur commune des rapports précédents; si dans l'équation $F(Z) = 0$ on fait la transformation

$$Z = \varphi(x, y) u,$$

on devra retrouver l'équation (1). Il en résulte que $\varphi(x, y)$ devra être de la forme

$$\varphi(x, y) = e^{\int \psi(x, y) dx},$$

$\psi(x, y)$ désignant une fonction uniforme du point analytique (x, y).

Les intégrales de l'équation (1) seront donc

$$z_1^2 e^{-\int \psi(x,y) dx}, \quad z_1 z_2 e^{-\int \psi(x,y) dx}, \quad z_2^2 e^{-\int \psi(x,y) dx}.$$

En posant dans l'équation (5)

$$z = e^{\frac{1}{2}\int \psi(x, y) dx} Y,$$

on aura une équation de même forme en Y, dont les carrés des intégrales seront précisément les intégrales de l'équation (1).

Soit

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = P z$$

une équation du second ordre; formons l'équation du troisième ordre en $u = z^2$. On a

$$\begin{aligned}
u &= z^2, \\
\frac{du}{dx} &= 2z\frac{dz}{dx}, \\
\frac{d^2u}{dx^2} &= 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\mathrm{P}z^2, \\
\frac{d^3u}{dx^2} &= 8\mathrm{P}z\frac{dz}{dx} + 2\mathrm{P}'z^2;
\end{aligned}$$

l'élimination de z^2, $z\frac{dz}{dx}$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ entre ces quatre équations, conduit à l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^3u}{dx^3} - 4\mathrm{P}\frac{du}{dx} - 2\mathrm{P}'u = 0.$$

Si l'on pose ensuite $u = \varphi(x)\mathrm{U}$, on aura la forme générale d'une équation du troisième ordre dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré; elle contient deux fonctions arbitraires P et $\varphi(x)$. Étant donnée une équation linéaire quelconque, on sait qu'on peut, par un changement de fonction, faire disparaître le second terme et cela d'une seule manière. Pour qu'une équation du troisième ordre appartienne à la catégorie précédente, il faudra que, cette transformation effectuée, elle soit de la forme (6), et l'on a immédiatement la valeur correspondante de P.

3. Je considère maintenant une équation linéaire du quatrième ordre, et je suppose d'abord que les coefficients soient uniformes

$$(7) \qquad \frac{d^4u}{dx^4} + 4\mathrm{B}\frac{d^3u}{dx^3} + 6\mathrm{C}\frac{d^2u}{dx^2} + 4\mathrm{D}\frac{du}{dx} + \mathrm{E}u = 0.$$

S'il existe entre les intégrales de cette équation une relation homogène du second degré, on sait, d'après la théorie des formes quadratiques, que cette relation pourra toujours être mise sous la forme

$$(8) \qquad \alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + \gamma u_3^2 + \delta u_4^2 = 0,$$

u_1, u_2, u_3, u_4 désignant quatre intégrales formant un système fondamental et α, β, γ, δ des quantités constantes. Deux de ces coefficients ne peuvent être nuls en même temps, mais nous aurons deux cas à distinguer suivant qu'aucun d'eux n'est nul ou que l'un d'eux est égal à zéro.

4. Je prends d'abord le cas où α, β, γ, δ sont tous différents de zéro. La relation précédente pourra s'écrire

$$(8)' \qquad U_1 U_4 = U_2 U_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1\sqrt{\alpha} + u_2\sqrt{-\beta}, \\ U_4 &= u_1\sqrt{\alpha} - u_2\sqrt{-\beta}, \\ U_2 &= u_3\sqrt{-\gamma} + u_4\sqrt{\delta}, \\ U_3 &= u_3\sqrt{-\gamma} - u_4\sqrt{\delta}; \end{aligned}$$

U_1, U_2, U_3, U_4 forment encore un système fondamental.

Désignons par $(U_1)'$, $(U_2)'$, $(U_3)'$, $(U_4)'$ les valeurs nouvelles de ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé; on aura

$$\begin{aligned} (U_1)' &= aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4, \\ (U_2)' &= eU_1 + fU_2 + gU_3 + hU_4, \\ (U_3)' &= e'U_1 + f'U_2 + g'U_3 + h'U_4, \\ (U_4)' &= a'U_1 + b'U_2 + c'U_3 + d'U_4, \end{aligned}$$

a, b, c, ... étant des constantes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Les intégrales $(U_1)'$, $(U_2)'$, $(U_3)'$, $(U_4)'$ doivent encore vérifier la relation $(8)'$; ce qui peut s'écrire

$$(9) \qquad \frac{aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4}{eU_1 + fU_2 + gU_3 + hU_4} = \frac{e'U_1 + f'U_2 + g'U_3 + h'U_4}{a'U_1 + b'U_2 + c'U_3 + d'U_4}.$$

De plus, s'il n'existe pas entre les intégrales de l'équation (7) de relation homogène du second degré différente de la relation $(8)'$, comme nous le supposons, les équations $(8)'$ et (9) devront revenir l'une à l'autre. Si l'on élimine entre elles une des intégrales U_1, U_2, U_3, U_4, le résultat devra être identiquement nul. Pour faire cette élimination, posons

$$\omega_1 = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4},$$
$$\omega_2 = \frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4};$$

l'équation (9) devient

$$(9)' \qquad \frac{(a\omega_1 + b)\omega_2 + c\omega_1 + d}{(e\omega_1 + f)\omega_2 + g\omega_1 + h} = \frac{(e'\omega_1 + f')\omega_2 + g'\omega_1 + h'}{(a'\omega_1 + b')\omega_2 + c'\omega_1 + d'},$$

et cette nouvelle relation devra être satisfaite, quelles que soient les quantités ω_1, ω_2. Les quatre coefficients a, a', e, e' ne peuvent être nuls à la fois; l'une au moins des deux fractions contiendra un terme en $\omega_1\omega_2$. D'autre part, les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions ne peuvent être identiques à un facteur constant près, car il s'ensuivrait que Δ est nul. Il faut donc, pour que l'égalité $(9)'$ ait lieu, quels que soient ω_1, ω_2, que les deux termes de chacune des deux fractions présentent un facteur commun du premier degré en ω_1, ω_2 si elles sont toutes deux du second degré ou que cela ait lieu pour l'une d'elles au moins, s'il n'y en a qu'une du second degré. Supposons, par exemple, $a \neq 0$; l'expression $a\omega_1\omega_2 + b\omega_2 + c\omega_1 + d$ ne peut se décomposer qu'en un produit de deux facteurs tels que $(l\omega_1 + m)$, $(p\omega_2 + q)$.

La suppression d'un facteur commun du premier degré au numérateur et au dénominateur de

$$\frac{a\omega_1\omega_2 + b\omega_2 + c\omega_1 + d}{e\omega_1\omega_2 + f\omega_2 + g\omega_1 + h}$$

ramènera cette fraction à l'une des deux formes

$$\frac{\lambda\omega_1 + \mu}{\nu\omega_1 + \rho}, \quad \frac{\lambda_1\omega_2 + \mu_1}{\nu_1\omega_2 + \rho_1};$$

de même la fraction

$$\frac{(a\omega_1 + b)\omega_2 + c\omega_1 + d}{(e'\omega_1 + f')\omega_2 + g'\omega_1 + h'}$$

devra se réduire à l'une des deux formes

$$\frac{\lambda'\omega_1 + \mu'}{\nu'\omega_1 + \rho'}, \quad \frac{\lambda'_1\omega_2 + \mu'_1}{\nu'_1\omega_2 + \rho'_1}.$$

Mais il est à remarquer que si la première fraction se réduit à $\frac{\lambda\omega_1+\mu}{\nu\omega_1+\rho}$, la seconde devient $\frac{\lambda'_1\omega_2+\mu'_1}{\nu'_1\omega_2+\rho'_1}$ et inversement.

Nous voyons donc que, la variable décrivant un contour fermé quelconque, on a soit

$$(\omega_1)' = \frac{\lambda\omega_1+\mu}{\nu\omega_1+\rho}, \qquad (\omega_2)' = \frac{\lambda'_1\omega_2+\mu'_1}{\nu'_1\omega_2+\rho'_1},$$

soit

$$(\omega_1)' = \frac{\lambda_1\omega_2+\mu_1}{\nu_1\omega_2+\rho_1}, \quad (\omega_2)' = \frac{\lambda'\omega_1+\mu'}{\nu'\omega_1+\rho'}.$$

Posons comme plus haut $\mathrm{H}(u) = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2$; la variable x décrivant un contour fermé quelconque, les fonctions $\mathrm{H}(\omega_1)$, $\mathrm{H}(\omega_2)$ ne peuvent que revenir à leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles. Donc :

Les fonctions $\mathrm{H}(\omega_1), \mathrm{H}(\omega_2)$ *sont racines d'une équation quadratique à coefficients uniformes*

$$\mathrm{H}^2 + 2\Phi(x)\mathrm{H} + \Psi(x) = 0. \tag{10}$$

Soient H_1, H_2 les deux racines de cette équation; considérons les deux équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\mathrm{H}_1 y = 0,\\ &\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{2}\mathrm{H}_2 z = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Soient y_1, y_2 un système fondamental d'intégrales de la première, et z_1, z_2 un système fondamental d'intégrales de la seconde : les produits y_1z_1, y_1z_2, y_2z_1, y_2z_2 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes. En effet, la variable décrivant un contour fermé quelconque, les racines H_1, H_2 de l'équation (10) reviennent à leurs valeurs initiales ou s'échangent entre elles. En désignant par $(y_1)'$, $(y_2)'$, $(z_1)'$, $(z_2)'$ les valeurs finales des fonctions y_1, y_2, z_1, z_2, on a, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} (y_1)' &= c_0y_1 + c_1y_2,\\ (y_2)' &= c'_0y_1 + c'_1y_2,\\ (z_1)' &= d_0z_1 + d_1z_2,\\ (z_2)' &= d'_0z_1 + d'_1z_2, \end{aligned}$$

et, dans le second cas,

$$\begin{aligned}(y_1)' &= d_0 z_1 + d_1 z_2,\\ (y_2)' &= d'_0 z_1 + d'_1 z_2,\\ (z_1)' &= c_0 y_1 + c_1 y_2,\\ (z_2)' &= c'_0 y_1 + c''_1 y_2;\end{aligned}$$

dans les deux cas les valeurs finales des produits $y_1 y_2$, $y_1 z_2$, $y_2 z_1$, $y_2 z_2$ s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des valeurs initiales.

Supposons, comme on l'a expliqué tout à l'heure (n° 2), qu'on ait choisi les intégrales y_1, y_2, z_1, z_2 de façon que le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ soit égal à ω_1 et le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ à ω_2, et soit $F(P) = 0$ l'équation du quatrième ordre à coefficients uniformes qui admet pour intégrales les produits des intégrales des deux équations (11). Des relations

$$\omega_1 = \frac{y_1}{y_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4},$$
$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4},$$

on tire facilement

$$\frac{U_1}{y_1 z_1} = \frac{U_2}{y_2 z_1} = \frac{U_3}{y_1 z_2} = \frac{U_4}{y_2 z_2}.$$

Désignons par $\frac{1}{\varphi(x)}$ la valeur commune des rapports précédents; si, dans l'équation $F(P) = 0$, on pose

$$P = \varphi(x) u,$$

on devra retrouver l'équation (7). Il en résulte que $\varphi(x)$ sera de la forme

$$\varphi(x) = e^{\int \psi(x)\, dx},$$

$\psi(x)$ étant une fonction uniforme de x, et l'équation (7) aura pour intégrales

$$y_1 z_1 e^{-\int\psi(x)\,dx}, \quad y_1 z_2 e^{-\int\psi(x)\,dx}, \quad y_2 z_1 e^{-\int\psi(x)\,dx}, \quad y_2 z_2 e^{-\int\psi(x)\,dx}.$$

Soient maintenant $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ deux fonctions uniformes de x, telles que $\pi_1(x) + \pi_2(x) = \psi(x)$. Si dans les équations (11) on pose

$$y = e^{\int \pi_1(x)\,dx}\,\mathrm{Y},$$
$$z = e^{\int \pi_2(x)\,dx}\,\mathrm{Z},$$

les intégrales de l'équation proposée (7) seront précisément les produits des intégrales des deux équations du second ordre en Y et en Z. On a donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène du second degré et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme (8)', les intégrales de cette équation sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont racines d'équations quadratiques à coefficients uniformes.*

Remarque I. — On peut prendre pour π_1 et π_2 des fonctions quelconques de x, assujetties à la seule condition

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) = \psi(x).$$

Si l'on prend, comme nous l'avons supposé, des fonctions uniformes, les coefficients de $\frac{d\mathrm{Y}}{dx}$ et de $\frac{d\mathrm{Z}}{dx}$ seront uniformes, et les coefficients de Y et de Z seront racines d'une équation du second degré à coefficients uniformes, comme H_1 et H_2.

Remarque II. — Il peut arriver que dans l'équation (10) $\Phi^2 - \Psi$ soit un carré parfait; dans ce cas, les équations en Y et en Z seront elles-mêmes à coefficients uniformes et absolument distinctes l'une de l'autre.

Remarque III. — Supposons que l'équation (7) ait toutes ses intégrales régulières; $\mathrm{H}(\omega_1)$, $\mathrm{H}(\omega_2)$ présentent pour toute valeur de x le caractère de fonctions algébriques, et, par suite, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ seront des fonctions rationnelles de la variable. On pourra prendre pour $\mathrm{H}(\omega)$ une fonction rationnelle de x et de v, v étant liée à x par une équation du second degré. On peut, de plus, reconnaître facilement que les produits $(x - a_i)^2\mathrm{H}(\omega)$, $\frac{1}{x^2}\mathrm{H}(\omega)$ restent finis pour $x = a_i$ et pour $x = \infty$. Il en résulte que les intégrales des équations en y et en z sont également régulières.

J'ai admis, pour faire le raisonnement, que les coefficients B, C, D, E étaient uniformes; mais il est bien aisé de voir que la méthode et les résultats subsistent si ces coefficients sont des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). Il n'y a qu'à remplacer partout *fonctions uniformes d'une variable* par *fonctions uniformes d'un point analytique* (x, y) et *contour fermé* par *cycle*.

5. Voici comment on pourra former l'équation générale du quatrième ordre dont les intégrales vérifient la relation (8)'. Considérons les deux équations du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{H}y,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \mathrm{K}z,$$

qui donnent comme conséquences

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{H}\frac{dy}{dx} + \mathrm{H}'y,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}'')y + 2\mathrm{H}'\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \mathrm{K}\frac{dz}{dz} + \mathrm{K}'z,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = (\mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'')z + 2\mathrm{K}'\frac{dz}{dx},$$

et posons $u = yz$. On aura successivement

$$\frac{du}{dx} = z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (\mathrm{H} + \mathrm{K})yz + 2\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = (\mathrm{H}' + \mathrm{K}')yz + (3\mathrm{K} + \mathrm{H})z\frac{dy}{dx} + (3\mathrm{H} + \mathrm{K})y\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = (\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}'' + \mathrm{K}^2 + \mathrm{K}'' + 6\mathrm{KH})yz + 2(\mathrm{H}' + 2\mathrm{K}')z\frac{dy}{dx}$$
$$+ 2(2\mathrm{H}' + \mathrm{K}')y\frac{dz}{dx} + 4(\mathrm{H} + \mathrm{K})\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx};$$

l'élimination de yz, $y\frac{dz}{dx}$, $z\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}$ entre ces cinq équations conduit à l'équation linéaire du quatrième ordre

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^4u}{dx^4}-\frac{K'-H'}{K-H}\frac{d^3u}{dx^3}-2(K+H)\frac{d^2u}{dx^2}\\ &\quad+\frac{[5(HK'-KH')+HH'-KK']}{K-H}\frac{du}{dx}\\ &\quad+\left[\frac{K'^2-H'^2}{K-H}+(K-H)^2-(K''+H'')\right]u=0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait ensuite la transformation $u=\varphi(x)U$, on aura la forme la plus générale des équations demandées; elle contient, comme on voit, trois fonctions arbitraires K, H et $\varphi(x)$.

6. Supposons en second lieu que l'un des coefficients α, β, γ, δ de la relation (8) soit nul, par exemple $\delta=0$. Cette relation pourra alors s'écrire

$$(13)\qquad U_1^2=U_2U_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_1&=\sqrt{\alpha}\,u_1,\\ U_2&=\sqrt{-\beta}\,u_2+\sqrt{\gamma}\,u_3,\\ U_3&=\sqrt{-\beta}\,u_2-\sqrt{\gamma}\,u_3. \end{aligned}$$

Soient toujours $(U_1)'$, $(U_2)'$, $(U_3)'$, $(U_4)'$ les valeurs que prennent ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé. On devra donc avoir

$$(U_1)'^2=(U_2)'(U_3)',$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad \frac{aU_1+bU_2+cU_3+dU_4}{eU_1+fU_2+gU_3+hU_4}=\frac{e'U_1+f'U_2+g'U_3+h'U_4}{aU_1+bU_2+cU_3+dU_4};$$

et s'il n'existe pas, comme nous le supposons, d'autre relation homogène du second degré entre les intégrales de l'équation (7), les équations (13) et (14) devront revenir l'une à l'autre.

Si l'on élimine entre ces deux équations une des quantités U_1, U_2, U_3, le résultat devra être identiquement nul. Pour faire cette élimination, je pose

$$\omega_1=\frac{U_1}{U_2}=\frac{U_3}{U_1},\quad \omega_2=\frac{U_4}{U_2};$$

l'équation (14) devient

$$\frac{a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2}{e\omega_1 + f + g\omega_1^2 + h\omega_2} = \frac{e'\omega_1 + f' + g'\omega_1^2 + h'\omega_2}{a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2},$$

et cette nouvelle égalité doit être vérifiée pour toute valeur de ω_1 et de ω_2, sans que cependant les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions soient identiques à un facteur constant près. Il faudra donc que l'une au moins des deux fractions soit du second degré et que les deux termes de cette fraction se décomposent en un produit de deux facteurs du premier degré et aient un facteur commun.

Supposons, par exemple, $c \neq 0$; la fonction $a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2$ ne pourra se décomposer en un produit de facteurs du premier degré si $d = 0$. De même, si $g \neq 0$, le dénominateur de cette fraction ne pourra se décomposer en un produit de deux facteurs que si $h = 0$. Si $g = 0$, le trinôme $e\omega_1 + f + h\omega_2$ ne pourra entrer en facteur dans $a\omega_1 + b + c\omega_1^2$ que si $h = 0$.

On aura donc dans tous les cas $d = 0$, $h = 0$, et, par suite, $h' = 0$. Il suit de là que U_1, U_2, U_3 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre à coefficients uniformes et, comme elles vérifient la relation (13), d'après ce qui a été démontré antérieurement, on a le théorème suivant :

Théorème II. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène du second degré et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme* (13), *cette équation admet comme intégrales les carrés des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.*

On voit par là que l'équation (7) ne sera pas *irréductible*. Si $F(u) = 0$ est l'équation générale du troisième ordre dont les intégrales vérifient la relation (13), l'équation (7) sera de la forme

$$\frac{dF(u)}{dx} - P\,F(u) = 0,$$

P désignant une fonction de x.

7. Je suppose maintenant que les intégrales de l'équation (7) vérifient deux relations analogues à l'équation (8). Il est com-

mode, pour faciliter le raisonnement, d'employer le langage géométrique, qui n'est en définitive qu'une interprétation de faits algébriques, indépendants des conditions de réalité des quantités qui y figurent. Ainsi U_1, U_2, U_3, U_4 désignant des quantités imaginaires quelconques, on peut définir ces quantités comme les coordonnées homogènes d'un point; l'ensemble des systèmes de valeurs qui vérifient une relation homogène du second degré, telle que

$$(15) \qquad F(u_1, u_2, u_3, u_4) = A u_1^2 + A' u_2^2 + A'' u_3^2 + \ldots = 0$$

sera dite une surface du second degré. A ce point de vue-là, le problème que nous venons de traiter revient à la recherche des transformations linéaires qui font revenir sur elle-même une surface du second degré. Si maintenant on prend pour U_1, U_2, U_3, U_4 quatre intégrales de l'équation (7) formant un système fondamental, et si ces intégrales vérifient deux relations analogues à la relation (15), on peut, toujours dans cet ordre d'idées, considérer U_1, U_2, U_3, U_4 comme les coordonnées homogènes d'un point d'une courbe intersection de deux surfaces du second degré. La variable x décrivant un contour fermé quelconque, U_1, U_2, U_3, U_4 sont remplacées par des combinaisons linéaires et homogènes de ces intégrales. Mais les deux nouvelles relations analogues à l'équation (15) doivent admettre les mêmes solutions que les premières, de sorte que la question revient à chercher les transformations linéaires qui font revenir sur elle-même la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré.

Nous devons évidemment écarter le cas où cette intersection se décomposerait en deux courbes planes, et nous n'avons qu'à examiner les cas où cette intersection est une véritable biquadratique gauche ou se compose d'une ligne droite et d'une cubique gauche.

8. Prenons d'abord le cas où l'intersection se compose d'une biquadratique gauche, et supposons qu'elle n'admet ni point double, ni point de rebroussement. On sait qu'il existe quatre cônes du second degré, et quatre seulement, passant par cette courbe, les sommets formant les quatre sommets d'un tétraèdre. Imaginons qu'on ait pris ce tétraèdre pour tétraèdre de référence; les équations de la biquadratique pourront être prises sous la

forme suivante :

$$(15)\qquad \begin{cases} U_1^2 + U_2^2 \;\;= U_3^2, \\ U_1^2 + aU_2^2 = U_4^2; \end{cases}$$

et celles-ci entraînent les suivantes :

$$(16)\qquad \begin{cases} (a-1)U_2^2 + U_3^2 = U_4^2, \\ (a-1)U_1^2 + U_4^2 = aU_3^2; \end{cases}$$

ce qui revient à prendre convenablement les intégrales U_1, U_2, U_3, U_4 formant un système fondamental. Toute transformation linéaire qui fait revenir la biquadratique gauche sur elle-même ne doit pas changer le tétraèdre de référence; les faces de ce tétraèdre se correspondront à elles-mêmes à moins de s'échanger entre elles. Il en résulte qu'après un contour fermé décrit par la variable, la valeur finale de U_1, par exemple, aura l'une des formes suivantes, où λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont constants :

$$\lambda_1 U_1, \quad \lambda_2 U_2, \quad \lambda_3 U_3, \quad \lambda_4 U_4,$$

et ainsi des autres. Si nous considérons les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{U_1}\frac{dU_1}{dx}, \quad \frac{1}{U_2}\frac{dU_2}{dx}, \quad \frac{1}{U_3}\frac{dU_3}{dx}, \quad \frac{1}{U_4}\frac{dU_4}{dx},$$

ces quatre fonctions ne pourront que reprendre leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles; ce sont donc *les racines d'une équation du quatrième degré à coefficients uniformes.*

Pour examiner de plus près les transformations possibles, je remarque que le nombre des cas à examiner est égal au nombre des permutations de quatre lettres, c'est-à-dire vingt-quatre. Les considérations suivantes donnent presque immédiatement celles qui sont possibles. Je remarque que le rapport anharmonique des quatre plans passant par une tangente à la courbe gauche et par les quatre sommets du tétraèdre de référence est constant et a l'une des valeur suivantes :

$$a, \quad 1-a, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad \frac{a-1}{a}.$$

Les vingt-quatre permutations des lettres U_1, U_2, U_3, U_4 se partagent en six groupes de quatre permutations, le rapport anharmonique conservant la même valeur pour un même groupe. Telles sont les quatre permutations

$$\begin{array}{l} U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4, \\ U_2,\ U_1,\ U_4,\ U_3, \\ U_3,\ U_4,\ U_1,\ U_2, \\ U_4,\ U_3,\ U_2,\ U_1. \end{array}$$

Il en résulte un certain nombre de transformations linéaires qui laissent invariable la biquadratique et qui sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{llll} U_1 = \lambda U_2, & U_2 = \mu U_1, & U_3 = \nu U_4, & U_4 = \rho U_3, \\ U_1 = \lambda U_3, & U_2 = \mu U_4, & U_3 = \nu U_1, & U_4 = \rho U_2, \\ U_1 = \lambda U_4, & U_2 = \mu U_3, & U_3 = \nu U_2, & U_4 = \rho U_1 ; \end{array}$$

pour la première, par exemple, il suffira de prendre

$$\lambda^2 = a\mu^2 = -a\nu^2 = -\rho^2,$$

et l'on a des conditions analogues pour les autres. Ces transformations existent toujours, quel que soit a. Au contraire, pour qu'il existe une transformation linéaire telle que

$$U_1 = \lambda U_2, \quad U_2 = \mu U_3, \quad U_3 = \nu U_4, \quad U_4 = \rho U_1,$$

qui change en elle-même la biquadratique gauche, comme le rapport anharmonique de quatre plans n'est pas changé par une transformation de ce genre, il faudra que les rapports anharmoniques correspondant aux deux permutations

$$\begin{array}{l} U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4, \\ U_2,\ U_3,\ U_4,\ U_1 \end{array}$$

aient la même valeur ou bien $1 - a = a$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, et, si cette condition est remplie, il suffira de prendre pour λ, μ, ν, ρ des coefficients satisfaisant aux conditions

$$\lambda^2 = -\frac{\mu^2}{2} = -\frac{\nu^2}{2} = -\rho^2.$$

Tout pareillement, pour qu'il existe d'autres transformations que celles dont on vient de parler, il faut et il suffit que deux des rapports anharmoniques précédents aient la même valeur ou que a ait l'une des valeurs

$$-1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2}\pm\sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En résumé, les transformations linéaires qui reproduisent une biquadratique gauche sont en *nombre limité,* en considérant comme identiques les transformations qui ne diffèrent que par un facteur constant. Soit U une intégrale quelconque de l'équation (7)

$$U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + C_4 U_4;$$

les valeurs que pourra prendre cette intégrale pour une valeur donnée de la variable s'obtiendront en multipliant un nombre *fini* d'entre elles par des facteurs constants. Il en résulte que la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

n'admet, pour chaque valeur de x, qu'un nombre limité de valeurs. Cela posé, soient maintenant u_1, u_2, u_3, u_4 quatre intégrales quelconques de l'équation (7), formant un système fondamental; on a entre ces intégrales la relation

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d^3u_1}{dx^3} & \frac{d^2u_1}{dx^2} & \frac{du_1}{dx} & u_1 \\ \frac{d^3u_2}{dx^3} & \frac{d^2u_2}{dx^2} & \frac{du_2}{dx} & u_2 \\ \frac{d^3u_3}{dx^3} & \frac{d^2u_3}{dx^2} & \frac{du_3}{dx} & u_3 \\ \frac{d^3u_4}{dx^3} & \frac{d^2u_4}{dx^2} & \frac{du_4}{dx} & u_4 \end{vmatrix} = C e^{\int -4B\,dx};$$

supposons qu'on ait fait disparaître le second terme B; la relation (17) pourra s'écrire

$$(17)'\qquad u_1u_2u_3u_4 \begin{vmatrix} \frac{1}{u_1}\frac{d^3u_1}{dx^3} & \frac{1}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx^2} & \frac{1}{u_1}\frac{du}{dx} & 1 \\ \frac{1}{u_2}\frac{d^3u_2}{dx_3} & \dots\dots & \dots\dots & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & . \\ \frac{1}{u_4}\frac{d^3u_4}{dx^3} & \dots\dots & \dots\dots & 1 \end{vmatrix} = C.$$

On vient de voir que les fonctions $\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}$, $\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}$, ... admettent, pour chaque valeur de x, un nombre limité de valeurs. Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} = f(x);$$

on en déduit successivement

$$\frac{1}{u_1}\frac{d^2u_1}{dx^2} = f'(x) + f(x)^2 \qquad = f_1(x),$$

$$\frac{1}{u_1}\frac{d^3u_1}{dx^3} = f_1'(x) + f(x)f_1(x) = f_2(x);$$

il en résulte que, pour une valeur donnée de x, le déterminant précédent n'admet qu'un nombre limité de valeurs; et, par suite, il en est de même du produit $u_1u_2u_3u_4$. Si le produit de quatre intégrales quelconques n'admet en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, il en est de même du quotient de deux intégrales quelconques et, par suite, d'une intégrale quelconque. On a donc le théorème suivant :

Théorème III. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient deux relations homogènes du second degré, pouvant être mises sous la forme* (15), *une intégrale quelconque sera racine d'une équation entière à coefficients uniformes, pourvu qu'on fasse disparaître le second terme dans l'équation* (7).

Si l'équation (7) a toutes ses intégrales régulières, l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

9. Je suppose en second lieu que la biquadratique gauche ait un point double; il existe seulement trois cônes distincts du second degré passant par la courbe gauche.

L'un de ces cônes S_1 a son sommet au point double, les deux autres S_2, S_3 passent par ce point double sans être tangents en ce point au cône S_1. Imaginons qu'on ait pris le tétraèdre de référence de la manière suivante : le plan $U_1 = 0$ sera le plan passant par les sommets des trois cônes S_1, S_2, S_3; le sommet opposé sera pris sur le diamètre conjugué du plan U_1 par rapport au cône S_1.

Enfin, les plans U_2, U_3, U_4 seront les plans passant par ce sommet et par les trois côtés du triangle ayant pour sommets les sommets des cônes S_1, S_2, S_3. On pourra mettre les équations de ces cônes sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
&S_1 : U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0,\\
&S_2 : U_1^2 + aU_3^2 + 2U_1U_4 = 0,\\
&S_3 : (a-1)U_1^2 + aU_2^2 - 2U_1U_4 = 0.
\end{aligned}$$

Toute transformation linéaire qui fait revenir la courbe sur elle-même ne doit pas changer le cône S_1, et les cônes S_2 et S_3 ne doivent pas être changés non plus, à moins de se permuter. Il en résulte que le plan $U_1 = 0$ doit être invariable par toute substitution de cette nature; les plans $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ doivent aussi être invariables, à moins de se permuter entre eux, et le plan $U_4 = 0$ doit se changer en un plan passant par l'intersection des plans $U_1 = 0$, $U_4 = 0$. Toutes les substitutions possibles sont comprises dans le Tableau suivant :

$$\begin{aligned}
&U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \pm\lambda U_2, \quad U_3 = \pm\lambda U_3, \quad U_4 = \lambda U_4,\\
&U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \pm\lambda U_3, \quad U_3 = \pm\lambda U_2, \quad U_4 = \frac{\lambda}{2}(a-2)U_1 - \lambda U_4,
\end{aligned}$$

λ étant une constante arbitraire. Toutes ces substitutions changent en elles-mêmes la relation $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0$, qui peut s'écrire

$$(18) \qquad U_1^2 = V_1V_2,$$

en posant

$$\begin{aligned}
V_1 &= U_2\sqrt{-1} + U_3,\\
V_2 &= V_2\sqrt{-1} - U_3;
\end{aligned}$$

il en résulte que V_1, V_2 sont les carrés des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes (n° 2); on aura

$$\begin{aligned}
V_1 &= y_1^2,\\
V_2 &= y_2^2,\\
U_1 &= y_1y_2.
\end{aligned}$$

La variable x décrivant un contour fermé quelconque, nous savons que les valeurs finales de V_1, V_2 seront de l'une des formules

$$(V_1)' = \lambda V_1, \quad (V_2)' = \lambda V_2,$$
$$(V_1)' = \lambda V_1, \quad (V_2)' = -\lambda V_2,$$
$$(V_1)' = \lambda V_2, \quad (V_2)' = \lambda V_1,$$
$$(V_1)' = \lambda V_2, \quad (V_2)' = -\lambda V_1;$$

par suite, les valeurs finales de y_1^2, y_2^2 seront de même forme. Il en résulte que les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}$$

seront racines d'une équation du second degré à coefficients uniformes. Cela posé, supposons que dans l'équation du second ordre qui admet pour intégrales y_1, y_2 on ait fait disparaître le coefficient de $\frac{dy}{dx}$; la relation

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C$$

peut s'écrire

$$y_1 y_2 \left(\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}\right) = C;$$

elle montre que le produit $y_1 y_2$ ne peut prendre que deux valeurs égales et de signes contraires; donc le produit $y_1^2 y_2^2$ *est une fonction uniforme de la variable.* D'un autre côté, puisque, par un contour fermé décrit par x, y_1^2 se change en λy_1^2 ou λy_2^2, et de même y_2^2 en $\pm\lambda y_1^2$ ou $\pm\lambda y_2^2$, le produit $y_1^2 y_2^2$ se change en $\pm\lambda^2 y_1^2 y_2^2$. Comme le produit $y_1^2 y_2^2$ est uniforme, on aura $\lambda^2 = \pm 1$; il suit de là que y_1^8 et y_2^8 sont racines d'une équation quadratique à coefficients uniformes. Si donc on pose $y^8 = z$, z sera donné par une équation telle que

$$z^2 + Pz + Q^4 = 0, \tag{19}$$

P et Q étant des fonctions uniformes, puisque le produit $y_1^2 y_2^2$ est uniforme. Un système fondamental d'intégrales de l'équation (7) sera formé par

$$y_1^2, \quad y_2^2, \quad y_1 y_2, \quad \frac{y_1^4 - y_2^4}{y_1 y_2}.$$

10. La biquadratique gauche peut avoir un point de rebroussement; il n'existe alors que deux cônes du second degré passant par cette courbe : l'un d'eux S_1 ayant son sommet au point de rebroussement, le second S_2 passant par ce même point et tangent en ce point au premier. Je prendrai un tétraèdre de référence formé de la manière suivante : soit U_1 le plan tangent commun aux deux cônes. J'appelle U_2 le second plan tangent mené par le sommet de S_2 au cône S_1. Je prendrai pour U_3 le plan des deux génératrices de contact du cône S_1 avec les plans U_1 et U_2, et pour U_4 le plan tangent à S_2 le long de la seconde génératrice d'intersection de ce cône avec U_2. Les équations de la biquadratique gauche pourront être mises sous la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} U_3^2 - U_1 U_2 = 0, \\ U_2^2 - U_1 U_4 = 0. \end{cases}$$

Toute transformation qui fait revenir la biquadratique gauche sur elle-même ne doit pas changer les cônes S_1 et S_2, ni par suite les plans U_1, U_2, U_3, U_4 qui sont liés invariablement à ces deux cônes. Il en résulte que ces transformations seront de la forme

$$U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \mu U_2, \quad U_3 = \nu U_3, \quad U_4 = \rho U_4;$$

inversement toute transformation de cette nature n'altère pas la biquadratique pourvu que les constantes λ, μ, ν, ρ vérifient les relations

$$\nu^2 = \lambda\mu, \quad \mu^2 = \lambda\rho.$$

On voit que les quatre dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{U_1}\frac{dU_1}{dx}, \quad \frac{1}{U_2}\frac{dU_2}{dx}, \quad \frac{1}{U_3}\frac{dU_3}{dx}, \quad \frac{1}{U_4}\frac{dU_4}{dx}$$

seront des fonctions uniformes de la variable $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, et l'on aura

$$U_1 = e^{\int f_1(x)\,dx}, \quad U_2 = e^{\int f_2(x)\,dx}, \quad U_3 = e^{\int f_3(x)\,dx}, \quad U_4 = e^{\int f_4(x)\,dx}.$$

Les relations (20) deviennent

$$(21) \qquad \begin{cases} 2 f_3(x) = f_1 + f_2, \\ 2 f_2(x) = f_1 + f_4; \end{cases}$$

réciproquement si f_1, f_2, f_3, f_4 sont quatre fonctions uniformes vérifiant les relations (21), il est clair que U_1, U_2, U_3, U_4 sont quatre intégrales d'une équation du quatrième ordre à coefficients uniformes, vérifiant les relations (20).

11. Je suppose en dernier lieu que la courbe d'intersection se compose d'une génératrice commune et d'une cubique gauche. Faisant abstraction de la génératrice, la question revient à trouver les transformations linéaires qui font revenir sur elle-même une cubique gauche. J'emploierai, pour traiter ce dernier problème, le raisonnement employé aux nos 2 et 3. Il existe, comme on sait, une infinité de cônes du second degré passant par la cubique; soient S_1 et S_2 deux de ces cônes et L_1 la génératrice commune. Soit U_2 le plan tangent à S_1 le long de L_1 et L_2 la seconde génératrice d'intersection de U_2 avec S_2; soit de même U_3 le plan tangent à S_2 le long de L_1 et L_3 la seconde génératrice d'intersection de U_3 avec S_1. Soient encore U_1 le plan tangent à S_2 le long de L_2 et U_4 le plan tangent à S_1 le long de L_3. En prenant pour tétraèdre de référence le tétraèdre formé par les quatre plans U_1, U_2, U_3, U_4, les équations de la cubique ou les relations entre un système fondamental de l'équation (7) pourront s'écrire

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_2^2 &= U_1 U_3, \\ U_3^2 &= U_2 U_4; \end{aligned} \right.$$

soient, comme plus haut, $(U_1)'$, $(U_2)'$, $(U_3)'$, $(U_4)'$ les valeurs que prennent ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé; les relations

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} (U_2)'^2 &= U_1' U_3', \\ (U_3)'^2 &= U_2' U_4' \end{aligned} \right.$$

devront être des conséquences des relations (22). En éliminant entre les équations (22) et une des nouvelles équations (23) deux des quantités U_1, U_2, U_3, U_4, on devra être conduit à une identité. Pour faire cette élimination, je pose

$$\omega = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3};$$

on en tire

$$U_2 = \omega U_1, \quad U_3 = \omega^2 U_1, \quad U_4 = \omega^3 U_1;$$

la première des relations (23) devient

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}&(h\omega^3+g\omega^2+f\omega+e)^2\\&=(d\omega^3+c\omega^2+b\omega+a)(h'\omega^3+g'\omega^2+f'\omega+e'),\end{aligned}\right.$$

et doit être satisfaite pour toute valeur de ω. Les quantités d, h, d', h' ne pouvant être nulles en même temps, supposons $h \neq 0$; on aura aussi $h' \neq 0$, $d \neq 0$. Supposons d'abord

$$h\omega^3+g\omega^2+f\omega+e=h(\omega-\alpha)(\omega-\beta)(\omega-\gamma),$$

α, β, γ étant trois nombres différents. Les polynômes qui figurent dans le second membre de la relation (24) ne peuvent contenir les trois facteurs simples $\omega-\alpha$, $\omega-\beta$, $\omega-\gamma$; car ces polynômes seraient identiques à un facteur constant près, et l'on aurait $\Delta = 0$. Il faudra donc que chacun d'eux contienne un facteur double et un facteur simple; on aura, par exemple,

$$\begin{aligned}d\omega^2+c\omega^2+b\omega+a&=d(\omega-\alpha)^2(\omega-\beta),\\h'\omega^3+g'\omega^2+f'\omega+e'&=h'(\omega-\beta)^2(\omega-\gamma)^2\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{(U_2)'}{(U_1)'}=\frac{h\omega^3+g\omega^2+f\omega+e}{d\omega^3+c\omega^2+b\omega+a}=\frac{h(\omega-\gamma)}{d(\omega-\alpha)}.$$

Si $h\omega^3+g\omega^2+f\omega+e$ est le produit d'un facteur double $\omega-\alpha$ par un facteur simple $\omega-\beta$, l'un des polynômes du second membre de (24) contiendra un facteur triple et l'autre un facteur double et un facteur simple, ou bien tous les deux contiendront un facteur double et un facteur simple. Ce dernier cas est à rejeter, car les deux polynômes seraient identiques. Dans le premier cas, on aura

$$\begin{aligned}d\omega^3+c\omega^2+b\omega+a&=d(\omega-\alpha)^3,\\h'\omega^3+g'\omega^2+f'\omega+e'&=h'(\omega-\alpha)(\omega-\beta)^2,\end{aligned}$$

et le produit $\frac{(U_2)'}{(U_1)'}$ se réduit à $\frac{h(\omega-\beta)}{d(\omega-\alpha)}$.

Enfin, si $h\omega^3+g\omega^2+f\omega+e$ contenait un facteur triple, les trois polynômes seraient identiques. En résumé, dans tous les cas qui peuvent se présenter, lorsque la variable décrit un contou fermé, ω se change en une expression de la forme

$$\frac{\lambda\omega+\mu}{\nu\omega+\rho},$$

λ, μ, ν, ρ étant des constantes qui ne dépendent que du chemin suivi par la variable. Il en résulte, en employant toujours la même notation, que $H(\omega)$ est une fonction uniforme de la variable. Soit $P(x)$ cette fonction; considérons l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}P(x)y=0; \tag{25}$$

on pourra choisir deux intégrales y_1, y_2 telles que leur rapport soit égal à ω. On aura

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{U_2}{U_1}=\frac{U_3}{U_2}=\frac{U_4}{U_3}$$

ou bien

$$\frac{U_1}{y_1^3}=\frac{U_2}{y_1^2y_2}=\frac{U_3}{y_1y_2^2}=\frac{U_4}{y_2^3}.$$

Soit $F(Z)=0$ l'équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes qui admet pour intégrales les cubes des intégrales de l'équation (25); un système fondamental d'intégrales de cette équation sera formé par

$$y_1^3,\quad y_1^2y_2,\quad y_1y_2^2,\quad y_2^3.$$

On passera de l'équation $F(Z)=0$ à l'équation (7) en posant

$$Z=\frac{1}{\varphi(x)}u;$$

$\varphi(x)$ étant de la forme $e^{\int\psi(x)dx}$, où $\psi(x)$ est une fonction uniforme.

Les intégrales de l'équation (7) seront

$$y_1^3e^{\int\psi(x)dx},\quad y_1^2y_2e^{\int\psi(x)dx},\quad y_1y_2^2e^{\int\psi(x)dx},\quad y_2^3e^{\int\psi(x)dx}.$$

Si dans l'équation (25) on pose $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\varphi(x)}}z$, les intégrales de l'équation (7) seront les cubes des intégrales de l'équation en z. Donc :

THÉORÈME IV. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient deux relations homogènes du second degré, pouvant être mises sous la forme* (22), *les intégrales de cette équation sont les cubes des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.*

12. Voici comment on pourra former l'équation générale du quatrième ordre de cette nature. Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{H}y;$$

en posant $u = y^3$, on aura successivement

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= 3y^2\frac{dy}{dx},\\
\frac{d^2u}{dx^2} &= 3\mathrm{H}y^3 + 6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\\
\frac{d^3u}{dx^3} &= 3\mathrm{H}'y^3 + 21\mathrm{H}y^2\frac{dy}{dx} + 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,\\
\frac{d^4u}{dx^4} &= (3\mathrm{H}'' + 21\mathrm{H}^2)y^3 + 30\mathrm{H}'y^2\frac{dy}{dx} + 60\mathrm{H}y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2;
\end{aligned}$$

en éliminant entre ces cinq équations y^3, $y^2\frac{dy}{dx}$, $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{d^4u}{dx^4} - 10\mathrm{H}\frac{d^2u}{dx^2} - 10\mathrm{H}'\frac{du}{dx} + (9\mathrm{H}^2 - 3\mathrm{H}'')u = 0. \tag{26}$$

Pour obtenir l'équation la plus générale du type demandé, il suffira de faire la transformation $u = \varphi(x)\mathrm{U}$, $\varphi(x)$ étant une fonction quelconque de x, elle contiendra deux fonctions arbitraires H et $\varphi(x)$. Pour qu'une équation du quatrième ordre réponde à la question, il suffira qu'elle soit de la forme (26), quand on aura fait disparaître le second terme, et l'on a tout de suite la valeur correspondante de H.

13. J'ai déjà fait remarquer que le problème traité revient à la recherche des substitutions linéaires qui font revenir sur elle-même, soit une surface du second degré, soit une biquadratique ou une cubique gauche. On voit par là de quelle importance est, dans la théorie des équations linéaires, l'étude des substitutions linéaires qui reproduisent une forme donnée. Sans aborder ici cette étude dans toute sa généralité, il est bien aisé de mettre en évidence le lien intime qui existe entre ces deux questions. Soit $F(y)=0$ une équation différentielle linéaire d'ordre m à coefficients uniformes et

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m)=0 \tag{27}$$

une relation homogène d'ordre n entre m intégrales y_1, y_2, ..., y_m formant un système fondamental. Supposons qu'entre ces intégrales il n'existe pas d'autre relation homogène de même degré. Soient y'_1, y'_2, ..., y'_m les valeurs nouvelles de ces intégrales après un contour fermé décrit par la variable ; la relation

$$f(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)=0$$

devra être identique avec la relation (27). Le groupe de l'équation $F(y)=0$ ne contiendra donc que des substitutions reproduisant la forme homogène $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Si ces dernières substitutions sont en nombre limité, en considérant comme identiques celles qui ne diffèrent que par un facteur constant, on en conclura comme au nº 8 que la dérivée logarithmique d'une intégrale quelconque n'admet, pour chaque valeur de la variable, qu'un nombre limité de valeurs ; puis, si l'on fait disparaître le coefficient de $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ dans l'équation proposée, le même raisonnement montre que chaque intégrale n'admettra, pour une valeur particulière de la variable, qu'un nombre limité de valeurs différentes.

Si l'équation $F(y)=0$ a toutes ses intégrales régulières, on voit que l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

Plus généralement, supposons que les intégrales y_1, y_2, ..., y_m vérifient une relation algébrique de degré n ; cette relation pourra s'écrire, en groupant ensemble les termes de même degré :

$$\varphi_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)+\varphi_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_m)+\ldots+\varphi_p(y_1, y_2, \ldots, y_m)=0 \tag{28}$$

S'il n'existe entre ces intégrales aucune autre relation de degré égal ou inférieur à n, la relation obtenue en remplaçant $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ devra être identique à (28). Il en résulte que les groupes homogènes $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \ldots, \varphi_p$ devront se reproduire identiquement, et le groupe de l'équation ne contiendra que des substitutions linéaires qui reproduisent à la fois les formes homogènes $\varphi_p, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$. Si le nombre des substitutions qui reproduisent l'une de ces formes est limité, on en tirera les mêmes conséquences que tout à l'heure.

Si l'équation $F(y) = 0$ est du troisième ordre, toute relation homogène de degré n entre les intégrales $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ peut être regardée comme l'équation, en coordonnées homogènes, d'une courbe plane et l'on se trouve amené à la recherche des substitutions linéaires qui n'altèrent pas une courbe plane. Le cas d'une conique est celui qui a été traité antérieurement (n° 2); il y a une infinité de substitutions répondant à la question. Mais, si

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

représente une courbe *indécomposable* d'un degré supérieur au second, il est bien aisé de voir qu'il n'y a, en général, qu'un nombre fini de substitutions linéaires reproduisant cette courbe. Il suffit d'employer un raisonnement analogue à celui qui a été employé par M. Poincaré, dans le cas des cubiques (*Journal de l'École Polytechnique,* L^e Cahier). On sait qu'il existe toujours, pour une courbe plane d'un degré supérieur au second, un certain nombre de points singuliers et de droites singulières : points doubles, points d'inflexion, points de rebroussement, tangentes doubles. Toute substitution linéaire qui reproduit la courbe devant changer un point singulier en un point singulier de même nature, il s'ensuit que le nombre des substitutions possibles est forcément limité. Le résultat auquel on se trouve conduit est précisément le résultat qui a été obtenu par M. Fuchs.

Il faut pourtant remarquer que, si l'on a une courbe ayant des singularités élevées, il peut en être autrement. Considérons, par exemple, une cubique ayant un point de rebroussement. Prenons pour côtés du triangle de référence les tangentes au point de rebroussement et au point d'inflexion la droite qui joint ces deux points; l'équation de la cubique sera de la forme

$$x^3 - y^2 z = 0.$$

Il y a une infinité de substitutions linéaires qui reproduisent cette courbe et qui sont de la forme

$$x = \lambda X, \quad y = \mu Y, \quad z = \nu Z,$$

avec la condition $\lambda^3 = \mu^2 \nu$. On en conclut, comme au n° 10, que toute équation du troisième ordre à coefficients uniformes, dont les intégrales vérifient la relation

$$U_1^3 = U_2^2 U_3,$$

admet un système fondamental d'intégrales

$$U_1 = e^{\int f_1(x)dx}, \quad U_2 = e^{\int f_2(x)dx}, \quad U_3 = e^{\int f_3(x)dx},$$

où $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sont des fonctions uniformes vérifiant la relation

$$3f_1(x) = 2f_2(x) + f_3(x).$$

Ce cas est analogue, comme on voit, au cas d'une biquadratique gauche ayant un point de rebroussement.

Tout pareillement, si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène d'ordre n

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

et une seule, le groupe de l'équation ne contiendra que des substitutions linéaires reproduisant la surface représentée par l'équation $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$. Si cette relation est du second degré, on a vu que ces substitutions étaient en nombre infini. Dans le cas où l'équation est de degré supérieur au second, on déduit de considérations géométriques analogues aux précédentes que ces substitutions seront en nombre limité, sauf dans certains cas que l'on peut regarder comme exceptionnels.