BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE PICARD

Remarque sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 153-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__153_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Remarque sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques; par M. Émile Picard.

(Séance du 7 novembre 1884.)

Dans un Mémoire extrêmement intéressant, qui vient de paraître dans le tome IV des *Acta mathematica,* M^me Kowalewsky cite le théorème suivant, qui lui a été communiqué par M. Weierstrass, et dont M. Poincaré vient de donner une démonstration :

Si, d'une fonction $\vartheta(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\rho, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$, *on peut, par une transformation de degré* k, *passer à une autre qui soit le produit d'une fonction* ϑ *de* $(\rho - 1)$ *variables et d'une fonction* ϑ *d'une variable, on peut toujours, par une transformation du premier degré, la transformer en une autre* $\vartheta(\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_\rho, \bar{\tau}_{11}, \ldots, \bar{\tau}_{\rho\rho})$, *dans laquelle*

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \tau_{13} = \tau_{14} = \ldots = \tau_{1\rho} = 0;$$

où μ *représente un des nombres* $1, 2, \ldots, (k-1)$.

Je me suis, il y a quelques années, occupé de la question de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, dans le cas où $\rho = 2$, et j'ai énoncé de la manière suivante une proposition analogue à la précédente (*Comptes rendus,* 1881, et *Bulletin de la Société mathématique,* 1882) :

Dans le cas où, pour une courbe du second genre, il y a une intégrale abélienne de première espèce, ayant seulement deux périodes, on peut toujours, par une transformation du premier degré, *obtenir un système d'intégrales normales dont le Tableau des périodes soit*

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & G & \frac{1}{D} \\ 1 & 0 & \frac{1}{D} & G' \end{matrix}\right. \tag{1}$$

Ce résultat ne coïncide pas entièrement avec celui de M. Weierstrass; d'après le premier théorème, on affirme seulement, en effet, que l'on pourra avoir le Tableau de périodes

$$(2)\qquad \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & G & \frac{\mu}{k} \\ 1 & 0 & \frac{\mu}{k} & G' \end{matrix}\right.$$

k étant un nombre positif et μ un des nombres $1, 2, \ldots (k-1)$.

Je ne sais si, dans le cas général, on pourrait préciser davantage la forme de τ_{12} (¹); mais, pour le cas de $\rho = 2$, on peut certainement arriver à la forme (1) : cela résulte de la démonstration que j'ai donnée dans le Mémoire cité; mais il ne sera pas sans intérêt de montrer directement que l'on peut, *par une transformation du premier degré,* passer d'un Tableau de la forme (2) à un Tableau de la forme (1).

Une transformation du premier degré transforme d'une manière générale un Tableau de périodes

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & G' & H \\ 1 & 0 & H & G \end{matrix}\right|,$$

en un autre

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & G'_1 & H_1 \\ 1 & 0 & H_1 & G_1 \end{matrix}\right|,$$

où l'on a, pour G_1, H_1, G'_1, les valeurs données par M. Hermite. Je me bornerai à écrire la valeur de H_1

$$(3)\qquad H_1 = \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG'')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},$$

où l'on a posé d'une manière générale

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les a, b, c, d sont des entiers vérifiant les relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0. \end{array}\right.$$

(¹) La question vient d'être examinée par M. Poincaré.

Or partons du système (2) où nous supposons μ et k premiers entre eux, et faisons-lui subir la transformation (a, b, c, d), dans laquelle on a

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = \mu, & b_1 = -\mu, & b_2 = 0, & b_3 = k, \\ c_0 = -c_1, & c_1, & c_2 = 0, & c_3, \\ d_0 = 0, & d_1 = 0, & d_2 = 1, & d_3 = 1; \end{array}$$

c_1 et c_3 sont deux entiers uniquement assujettis à satisfaire à la relation

$$\mu c_3 + k c_1 = 1.$$

On voit d'abord que toutes les relations (4) sont vérifiées. Cherchons la valeur de H_1, en partant de la formule (3), où nous faisons $H = \frac{\mu}{k}$.

On trouve de suite

$$H_1 = \frac{1}{k}.$$

Nous aurons donc bien un Tableau de la forme (1), et l'entier D qui y figure est égal à k.