BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur les courbes unicursales

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 49-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__49_0>

Sur les courbes unicursales; par M. G. Humbert.

(Séance du 4 février 1885.)

En coordonnées homogènes, une courbe unicursale de degré n est représentée par des équations de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n, \\ x_2 = f_2(t) = b_0 t^n + \ldots, \\ x_3 = f_3(t) = c_0 t^n + \ldots, \end{cases}$$

t étant un paramètre variable, $a_0, \ldots, c_0, \ldots$ des constantes.

Réciproquement, toute courbe représentée par des équations de la forme (1) est *en général* de degré n et de genre zéro; mais, dans certains cas, son degré peut être différent de n.

L'étude de ces cas particuliers est liée intimement à celle des courbes *adjointes* de la courbe proposée : on sait qu'on nomme courbe adjointe d'une courbe S toute courbe qui passe par les points doubles de S, ou, plus généralement, toute courbe qui a un point multiple d'ordre $p-1$ en tout point multiple d'ordre p de S.

Cela posé, les questions que nous nous proposons de traiter sont les suivantes :

1° *Étant donnée une courbe,* S, *de degré* n, *représentée par les équations* (1), *former l'équation de cette courbe et celles des courbes adjointes de degrés* $n-2$ *et* $n-1$;

2° *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe représentée par des équations de la forme* (1) *ne soit pas de degré* n, *et exprimer ces conditions en fonction des coefficients qui figurent dans les équations* (1).

I.

L'équation de la courbe S, représentée par les équations (1), s'obtient en éliminant t entre les deux équations

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{f_3(t)}{f_1(t)}.$$

Nous arriverons à cette équation, et en même temps à celles des courbes adjointes de degrés $n-2$ et $n-1$ par le procédé suivant.

Les trois polynômes $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ sont linéairement indépendants, sinon la courbe S serait une droite, cas sans intérêt que nous excluons. On peut alors, d'une infinité de manières, former $(n-2)$ polynômes de degré n en t; $f_4(t), f_5(t), \ldots, f_{n+1}(t)$, tels qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène, identique en t, entre $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), \ldots, f_{n+1}(t)$.

Soient ainsi posés

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n, \\ f_2(t) &= b_0 t^n + \ldots, \\ f_4(t) &= d_0 t^n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n+1}(t) &= l_0 t^n + \ldots. \end{aligned}$$

Résolvons ces équations par rapport aux $(n+1)$ quantités $t^n, t^{n+1}, \ldots, t_1$, 1 que nous désignerons respectivement par t_n, $t_{n-1}, \ldots, t_1, t_0$; nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} t_n &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{n+1} f_{n+1}, \\ t_{n-1} &= \beta_1 f_1 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_1 &= \theta_1 f_1 + \ldots, \\ t_0 &= \lambda_1 f_1 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Remarquons maintenant que les quantités $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0$ sont liées par des relations du *second degré*, de la forme

$$t_i t_j = t_k t_l,$$

où l'on a

$$i + j = k + l,$$

car les deux produits considérés sont égaux à t^{i+j}.

Écrivons toutes ces relations en plaçant sur une même ligne horizontale les produits $t_i\, t_j$ pour lesquels la somme $i + j$ est la même; nous formons ainsi le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
t_n t_{n-2} = t_{n-1}^2, & & & \\
t_n t_{n-3} = t_{n-1} t_{n-2}, & & & \\
t_n t_{n-4} = t_{n-1} t_{n-3} = t_{n-2}^2, & & & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & & & \\
t_n t_0 \;\; = t_{n-1} t_1 & = t_{n-2} t_2 = \dots, & & \\
\qquad\quad t_{n-1} t_0 & = t_{n-2} t_1 = \dots, & & \\
 & & t_3 t_0 = t_2 t_1, & \\
 & & & t_2 t_0 = t_1^2.
\end{array}$$

Le nombre de ces relations se détermine comme il suit.

Le Tableau précédent renferme $2n - 3$ lignes horizontales; il contient une et une seule fois les produits $t_i t_j$ (i et j étant différents), sauf les produits $t_n t_{n-1}$ et $t_1\, t_0$ qui n'y figurent pas; il contient de même tous les carrés t_i^2, sauf t_0^2 et t_n^2. Il contient donc un nombre de termes égal à

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - 4.$$

Le nombre des relations du second degré qui tient $t_n, \dots, t_0$ et qui sont toutes écrites dans le Tableau est évidemment égal au nombre précédent diminué du nombre des lignes horizontales, puisque le nombre d'équations que contient une ligne est égal au nombre des produits $t_i t_j$ qu'elle renferme, diminué de un.

Les relations du second degré entre $t_n, t_{n-1}, \dots, t_1, t_0$ sont donc égales en nombre à

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) - 4 - (2n - 3),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Observons de plus que les $\frac{n(n-1)}{2}$ premiers membres de ces relations, mises sous la forme

$$(3)\quad\begin{cases} t_n t_{n-2} - t_{n-1}^2 = 0, \\ t_n t_{n-3} - t_{n-1} t_{n-2} = 0, \\ t_n t_{n-4} - t_{n-1} t_{n-3} = 0, \\ t_n t_{n-4} - t_{n-2}^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ t_2 t_0 - t_1^2 = 0, \end{cases}$$

sont linéairement indépendants par rapport aux quantités t_n, t_{n-1}, ..., t_1, t_0 : en d'autres termes, en combinant linéairement ces équations, on n'obtiendra jamais une identité en t_n, t_{n-1}, ..., t_0.

Cela posé, remplaçons dans les équations (3) t_n, t_{n-1}, ... par leurs valeurs en fonction linéaire et homogène de $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, tirées des relations (2), nous obtiendrons ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ relations du second degré en $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, que nous appellerons, à cause de leur importance dans la théorie qui va suivre, les *équations fondamentales.*

Ces équations sont de la forme

$$(4)\quad\begin{cases} A_{44} f_4^2 + A_{45} f_4 f_5 + \dots + A_{n+1,n+1} f_{n+1}^2 + \Phi_1 f_4 + \Psi_1 f_5 + \dots + X_1 f_{n+1} = \Omega_1, \\ B_{44} f_4^2 + \dots\dots\dots\dots + \Phi_2 f_4 + \dots\dots\dots\dots = \Omega_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_{44} f_4^2 + L_{45} f_4 f_5 + \dots\dots\dots + \Phi_{\frac{n(n-1)}{2}} f_4 + \dots\dots\dots = \Omega_{\frac{n(n-1)}{2}}, \end{cases}$$

A_{44}, ..., $A_{n+1,n+1}$, B_{44}, L_{44}, ... sont des constantes;

Φ_1, Ψ_1, X_1, Φ_2, ..., $\Phi_{\frac{n(n-1)}{2}}$, ... des polynômes homogènes de degré un en f_1, f_2, f_3;

Ω_1, Ω_2, ..., $\Omega_{\frac{n(n-1)}{2}}$ des polynômes homogènes de degré deux en f_1, f_2, f_3.

Quelles que soient les équations primitives (1) d'où l'on est parti (pourvu toutefois qu'elles ne représentent pas une droite), on arrivera par la méthode qu'on vient d'indiquer à $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de la forme (4), dont la considération va nous permettre de reconnaître si la courbe S est ou n'est pas de degré n. Mais, quel que soit le degré de cette courbe, c'est-à-dire quels que soient les coefficients $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, c_0, \dots$ des équations (1), les fonctions de f_1, f_2, f_3 qui figurent dans les relations (4) jouissent de propriétés *générales* que nous allons d'abord exposer.

Remarque. — Il résulte de ce qui a été dit à propos des relations (3) que les équations (4) sont linéairement indépendantes par rapport aux quantités $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$, c'est-à-dire qu'en les combinant linéairement on n'arrivera jamais à une relation identique en $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

II.

Si l'on élimine entre les équations (4) les quantités $f_4^2, f_4 f_5, \ldots, f_{n+1}^2$, qui sont au nombre de $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2$, on obtient en général $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n-2)$, c'est-à-dire $n-1$ équations de la forme

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 f_4 + \psi_1 f_5 + \ldots + \chi_2 f_{n+1} = \omega_1, \\ \varphi_2 f_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-1} f_4 + \ldots\ldots\ldots + \chi_{n-1} f_{n+1} = \omega_{n-1}, \end{array}\right.$$

où $\varphi, \psi, \ldots, \chi$ sont des polynômes homogènes de degré un, en f_1, f_2, f_3, et ω des polynômes homogènes de degré deux en f_1, f_2, f_3.

Remarquons d'ailleurs que les équations (5) peuvent être en nombre supérieur à $n-1$ (cela arrivera par exemple si f_4^2 ne figure pas dans les relations fondamentales); mais elles ne peuvent être en nombre inférieur, car pour cela il faudrait que les équations (4) ne fussent pas linéairement indépendantes par rapport aux quantités $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n+1}$.

En résolvant $(n-2)$ des équations (5) par rapport aux $(n-2)$ quantités $f_4, f_5, \ldots, f_{n+1}$ qui y entrent au premier degré, on obtient des relations telles que

$$(6)\qquad \Delta f_4 = F_4;\quad \Delta f_5 = F_5;\quad \ldots,\quad \Delta f_{n+1} = F_{n+1},$$

où Δ est un polynôme de degré $n-2$ en f_1, f_2, f_3; $F_4, \ldots, F_{n+1}$ des polynômes de degré $n-1$ en f_1, f_2, f_3.

On a par exemple, si les équations résolues sont les $(n-2)$

premières des équations (5),

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \dots & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-2} & \dots & \dots & \chi_{n-2} \end{vmatrix}, \quad F_4 = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & \dots & \chi_1 \\ \omega_2 & \psi_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-2} & \psi_{n-2} & \dots & \chi_{n-2} \end{vmatrix} \dots$$

Remplaçons dans les polynômes Δ et F, f_1, f_2, f_3 par x_1, x_2, x_3, et considérons les courbes représentées par les équations

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Elles jouissent d'une propriété importante.

Théorème. — *Les courbes représentées par les équations* $\Delta = 0$, $F = 0$ *sont des courbes adjointes de la courbe* S, *représentée par les équations* (1).

Soit, en effet, A un point multiple de S, un point triple par exemple. Désignons par α, β, γ les trois valeurs correspondantes du paramètre t; on aura, en les supposant différentes,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_1(\beta) = \lambda f_1(\alpha), & f_1(\gamma) = \mu f_1(\alpha), \\ f_2(\beta) = \lambda f_2(\alpha), & f_2(\gamma) = \mu f_2(\alpha), \\ f_3(\beta) = \lambda f_3(\alpha), & f_3(\gamma) = \mu f_3(\alpha), \end{cases}$$

λ et μ étant deux constantes. Il s'agit de prouver que les courbes $\Delta = 0$, $F = 0$ passent par A et y ont un point double.

Considérons à cet effet les $(n-2)$ équations (5) que nous avons résolues pour obtenir les équations (6)

$$(5) \qquad \varphi_i f_4 + \psi_i f_5 + \dots + \chi_i f_{n+1} = \omega_i \quad [i = 1, 2, \dots, (n-2)],$$

et posons

$$\mathfrak{F}_i(t) = \varphi_i(\alpha) f_4(t) + \psi_i(\alpha) f_5(t) + \dots + \chi_i(\alpha) f_{n+1}(t).$$

$\varphi_i(\alpha) \dots$ désigne ce que devient la fonction $\varphi_i[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ pour $t = \alpha$.

On a évidemment

$$\mathfrak{F}_i(\alpha) = \varphi_i(\alpha) f_4(\alpha) + \dots + \chi_i(\alpha) f_{n+1}(\alpha) = \omega_i(\alpha)$$

en vertu de (5).

On a également

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \varphi_i(\alpha) f_4(\beta) + \dots$$

Or φ_i est un polynôme du premier degré en $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$; ω_i un polynôme du deuxième degré en $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$.

On a donc, en vertu de (7),

$$\varphi_i(\beta) = \lambda\varphi_i(\alpha), \quad \omega_i(\beta) = \lambda^2\omega_i(\alpha).$$

Par suite

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \frac{1}{\lambda}[\varphi_i(\beta)f_4(\beta) + \ldots] = \frac{1}{\lambda}\omega_i(\beta) = \lambda\omega_i(\alpha).$$

Donc enfin il vient

$$\mathfrak{F}_i(\beta) = \lambda\,\mathfrak{F}_i(\alpha), \tag{8}$$

et de même

$$\mathfrak{F}_i(\gamma) = \mu\,\mathfrak{F}_i(\alpha).$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned}
P_i(t) &= \mathfrak{F}_i(t)f_1(\alpha) - \mathfrak{F}_1(\alpha)f_1(t), \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-2)];\\
P_{n-1}(t) &= f_2(t)f_1(\alpha) - f_2(\alpha)f_1(t),\\
P_n(t) &= f_3(t)f_1(\alpha) - f_3(\alpha)f_1(t),
\end{aligned}$$

les n polynômes $P_1, \ldots, P_n$ de degré n en t s'annulent pour $t=\alpha$, $t=\beta$, $t=\gamma$ en vertu des relations (7) et (8); ils s'expriment par suite en fonction linéaire et homogène de $(n-2)$ polynômes de degré n en t; en d'autres termes, ils sont liés par deux relations linéaires et homogènes de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&m_1P_1 + m_2P_2 + \ldots + m_{n-1}P_{n-1} + m_nP_n = 0,\\
&p_1P_1 + p_2P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

où $m_1, \ldots, p_1 \ldots$ sont des constantes.

Ces deux relations sont identiques en t, c'est-à-dire identiques par rapport aux quantités $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0$ ou, ce qui revient au même, par rapport à $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$.

Or f_2 ne figure que dans P_{n-1}; f_3 que dans P_n. On a donc

$$m_{n-1} = m_n = p_{n-1} = p_n = 0.$$

Écrivons maintenant que $f_1, f_4, \ldots, f_{n+1}$ disparaissent dans la première relation (9); il vient, en remarquant que $\mathfrak{F}_1(\alpha) = \omega_1(\alpha)$,

$$\left\{\begin{aligned}
&m_1\omega_1(\alpha) + m_2\omega_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\omega_{n-2}(\alpha) = 0,\\
&m_1\varphi_1(\alpha) + m_2\varphi_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\varphi_{n-2}(\alpha) = 0,\\
&m_1\psi_1(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&m_1\chi_1(\alpha) + m_2\chi_2(\alpha) + \ldots + m_{n-2}\chi_{n-2}(\alpha) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

On a des équations analogues, en remplaçant $m_1, \ldots$ par $p_1, \ldots$. On en conclut aisément que le déterminant d'ordre $n-2$

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha, & \psi_1(\alpha) & \ldots & \chi_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_{n-2}(\alpha) & \ldots\ldots & \ldots & \chi_{n-2}(\alpha) \end{vmatrix}$$

est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordre $(n-3)$, qu'il en est de même des déterminants obtenus en remplaçant une colonne du précédent par la colonne

$$\begin{array}{l} \omega_1(\alpha), \\ \omega_2(\alpha), \\ \ldots\ldots, \\ \omega_{n-2}(\alpha), \end{array}$$

et que les mineurs d'ordre $n-3$ des précédents sont également nuls.

Ces résultats suffisent pour démontrer le théorème que nous voulons établir.

En effet, la relation $\Delta(\alpha) = 0$ montre que la courbe $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ passe par le point triple A de la courbe S. Je dis qu'elle y a un point double. En effet, les constantes $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$, qui figurent dans les relations (9) et (10), ne sont pas toutes nulles à la fois, d'après l'hypothèse même qui a permis d'écrire les équations (9). Supposons que m_1 ne soit pas nul. On peut écrire

$$m_1\Delta = \begin{vmatrix} m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_{n-2}\varphi_{n-2} & m_1\psi_1 + m_2\psi_2 + \ldots & \ldots & m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots \\ \varphi_2 & \psi_2 & \ldots & \chi_2 \\ \varphi_3 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-2} & \psi_{n-2} & \ldots & \chi_{n-2} \end{vmatrix}.$$

ou, en ordonnant par rapport aux éléments de la première ligne,

$$m_1\Delta(x_1, x_2, x_3) = \Sigma\,\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3)[m_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + m_2\varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \ldots].$$

Or la courbe

$$m_1\varphi_2 + m_3\varphi_2 + \ldots = 0$$

est une droite qui passe par le point A, puisque, d'après les équations (10), on a

$$m_1\varphi_1(\alpha) + m_2\varphi_2(\alpha) + \ldots = 0;$$

la courbe $R = 0$, de degré $n-3$, passe également par ce point, puisque la quantité $R[f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)]$ est un des déterminants mineurs d'ordre $(n-3)$ du déterminant $\Delta(\alpha)$, et est nulle, d'après ce qui précède.

Il en résulte que la courbe $\Delta = 0$ passe par A et y a un point double.

La démonstration est la même pour les courbes F. C. Q. F. D.

Si, au point A, deux branches de S avaient même tangente, deux des quantités α, β, γ, les deux premières, par exemple, seraient égales. On aurait en ce cas, en désignant par $f'(t)$ la dérivée de $f(t)$,

$$f'_1(\alpha) = \lambda f_1(\alpha),$$
$$f'_2(\alpha) = \lambda f_2(\alpha),$$
$$f'_3(\alpha) = \lambda f_3(\alpha).$$

On donnerait du théorème proposé une démonstration analogue à la précédente, en montrant que les fonctions $P_1, \ldots, P_n$ s'annulent pour $t = \gamma$, et ont la racine double α.

III.

Avant d'entrer dans des explications plus détaillées au sujet des courbes adjointes et d'appliquer les considérations précédentes à la courbe S, représentée par les équations (1) et supposée de degré n, nous chercherons dans quels cas cette courbe peut être de degré inférieur à n.

La courbe S

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t)$$

est coupée par la droite $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ en des points dont les arguments vérifient l'équation

$$(11) \qquad a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t) = 0.$$

Cette équation a n racines; la courbe coupe donc S en n points, et cette dernière courbe est, en général, de degré n. Il n'y a que deux cas d'exception :

1° A une ou à plusieurs des racines de l'équation (1) ne correspond aucun point de S; en d'autres termes, les fonctions f_1, f_2, f_3 s'annulent pour la valeur de t considérée. En ce cas, $f_1(t)$,

$f_2(t)$, $f_3(t)$ ont k zéros communs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, et en divisant ces trois polynômes par le produit $(t-\theta_1)(t-\theta_2)\ldots(t-\theta_k)$, on obtient des quotients entiers f'_1, f'_2, f'_3 de degré $n-k$. La courbe

$$x_1 = f'_1(t), \quad x_2 = f'_2(t), \quad x_3 = f'_3(t)$$

est évidemment identique à la courbe S, et son degré est $n-k$, en général.

2° A plusieurs des racines de l'équation (11) correspond le même point de S; en d'autres termes, t et u étant deux de ces racines, on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f_1(u)}{f_1(t)} = \dfrac{f_2(u)}{f_2(t)} = \dfrac{f_3(u)}{f_3(t)} \\ \text{avec} \\ a_1 f_1(u) + a_2 f_2(u) + a_3 f_3(u) = 0, \\ a_1 f_1(t) \; + a_2 f_2(t) \; + a_3 f_3(t) \; = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (12) doivent avoir lieu, quels que soient a_1, a_2, a_3; par suite, quel que soit t, on doit pouvoir trouver une valeur u, différente de t, telle que les équations

$$\frac{f_1(u)}{f_1(t)} = \frac{f_2(u)}{f_2(t)} = \frac{f_3(u)}{f_3(t)}$$

soient satisfaites.

En ce cas, à un point de S correspondent plusieurs valeurs du paramètre t, et la courbe est une courbe de degré inférieur à n, comptée plusieurs fois.

Supposons qu'on ne se trouve dans aucun de ces deux cas d'exception : la courbe S sera de degré n.

Formons les équations (4) et les équations (5); ces dernières sont de la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 f_4 \; + \psi_1 f_5 + \ldots + \chi_1 f_{n+1} \; = \omega_1, \\ \varphi_2 f_4 \; + \ldots\ldots\ldots + \chi_2 f_{n+1} \; = \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-1} f_4 + \ldots\ldots\ldots + \chi_{n-1} f_{n+1} = \omega_{n-1}. \end{array} \right.$$

Elles sont au nombre de $(n-1)$ au moins, comme nous l'avons vu plus haut.

Posons

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \psi_2 & \dots & \chi_2 \\ \varphi_3 & \cdot\cdot & \dots & \chi_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-1} & \cdot\cdot & \dots & \chi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \dots & \varphi_1 \\ \varphi_3 & \cdot\cdot & \dots & \chi_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-1} & \cdot\cdot & \dots & \chi_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \dots & \chi_1 \\ \varphi_2 & \cdot\cdot & \dots & \chi_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \\ \varphi_{n-2} & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Les courbes $\Delta_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \dots, \Delta_{n-1}(x_1, x_2, x_3) = 0$, de degré $n - 2$, sont, comme nous l'avons vu, des courbes adjointes de S. Nous allons démontrer qu'aucune des fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ n'est identiquement nulle.

Remarquons d'abord que, si la fonction Δ_1, par exemple, était identiquement nulle, elle le resterait si l'on y remplaçait f_1, f_2, f_3 par des fonctions linéaires et homogènes de f'_1, f'_2, f'_3, telles que

$$(13) \qquad \begin{cases} f_1 = a_1 f'_1 + a_2 f'_2 + a_3 f'_3, \\ f_2 = b_1 f'_1 + \dots, \\ f_3 = c_1 f'_1 + \dots. \end{cases}$$

Le déterminant de cette substitution étant supposé différent de zéro, on aura

$$f'_1 = a'_1 f_1 + a'_2 f_2 + a'_3 f_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

f'_1, f'_2, f'_3 sont des polynômes de degré n en t; si $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ n'ont aucun zéro commun, ce que nous supposerons puisque S est de degré n, on pourra choisir les constantes $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$, de façon que les fonctions $f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)$, prises deux à deux, n'aient aucun zéro commun.

Supposons maintenant que Δ_1 soit nul identiquement, et remplaçons, dans les équations (5), f_1, f_2 et f_3 par leurs valeurs en fonction de f'_1, f'_2, f'_3. Ces fonctions donnent

$$\Delta'_1 f_4 = F'_4,$$

en désignant par Δ'_1 et F'_4 ce que deviennent, après la substitution (13), les déterminants Δ_1 et F_4, étant posé

$$F_4 = \begin{vmatrix} \omega_2 & \psi_2 & \dots & \chi_2 \\ \omega_3 & \psi_3 & \dots & \chi_3 \\ .. & .. & \dots & .. \\ \omega_{n-1} & .. & \dots & \chi_{n-1} \end{vmatrix}.$$

La relation précédente, où Δ'_1 est nul identiquement, entraîne la relation

$$F'_4 = 0 \quad \text{ou} \quad F_4 = 0.$$

Cette dernière équation, de degré $n - 1$ en f_1, f_2, f_3, doit être une identité par rapport à f_1, f_2, f_3, sinon l'équation $F_4 = 0$ serait l'équation de la courbe S, ce qui est impossible, puisque cette courbe est de degré n.

De même les déterminants obtenus en remplaçant une colonne de Δ_1 par la colonne

$$\begin{matrix} \omega_2, \\ \omega_3, \\ .., \\ \omega_{n-2} \end{matrix}$$

seront identiquement nuls.

Écrivons les équations (5) en remplaçant f_1, f_2, f_3 par leurs valeurs f'_1, f'_2, f'_3 :

$$(5\ bis) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_1 f'_4 \ + \psi'_1 f_5 + \dots + \ \chi'_1 f_{n+1} \ = \omega'_2, \\ \varphi'_2 f_4 \ + \psi'_2 f_5 + \dots + \ \chi'_2 f_{n+1} \ = \omega'_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi'_{n-1} f_4 + \dots\dots\dots\dots + \chi'_{n-1} f_{n+1} = \omega'_{n-1}. \end{array} \right.$$

Les déterminants $\Delta'_1, F'_4, \dots$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \varphi'_2 & \psi'_2 & \dots & \chi'_2 \\ \varphi'_3 & .. & \dots & \chi'_3 \\ .. & .. & \dots & .. \\ \varphi'_{n-1} & .. & \dots & .. \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \omega'_2 & \psi'_2 & \dots & \chi'_2 \\ .. & .. & \dots & .. \\ \omega'_{n-1} & .. & \dots & \chi'_{n-1} \end{vmatrix}, \dots,$$

étant identiquement nuls, les coefficients de la plus haute puissance de f'_1, dans chacun d'eux, seront nuls. Il en résulte aisément qu'on pourra, en combinant linéairement les $(n-2)$ dernières des équations (5 *bis*), faire disparaître f'_1 des coefficients de $f_4, f_5, \ldots, f_{n+1}$ et f'^2_1 du second membre de la relation obtenue. Cette relation sera donc de la forme

$$\begin{aligned} & f_4(\alpha_4 f'_2 + \beta_4 f'_2) + f_5(\alpha_5 f'_2 + \beta_5 f'_3) + \ldots \\ & \quad = f'_2(\lambda_2 f'_1 + \mu_2 f'_2 + \nu_2 f'_3) + f'_3(\lambda_3 f'_1 + \mu_3 f'_2 + \nu_3 f'_3) \end{aligned}$$

ou

$$(14) \quad f'_2(A_1 f'_1 + A_2 f'_2 + A_3 f'_3 + A_4 f_4 + \ldots) = f'_3(B_1 f'_1 + \ldots + B_4 f_4 + \ldots).$$

Or, par hypothèse, les polynômes, de degré n en t, f'_2 et f'_3, n'ont aucun zéro commun; il en résulte que f'_2 divise le polynôme $B_1 f'_1 + \ldots$, et, comme ce dernier est de degré n, il est, à un facteur près, identique à f'_2. De même, $A_1 f'_1 + \ldots$ est, à un facteur près, identique à f'_3. Il en résulte que l'équation (14) se réduit à

$$M f'_2 f'_3 = 0,$$

M étant une constante, qui est nulle nécessairement; par conséquent, on obtient une identité en combinant linéairement les équations (5 *bis*), ce qui est impossible, d'après ce qui a été dit plus haut. On en conclut que l'hypothèse faite est inadmissible, c'est-à-dire que Δ_1 n'est jamais identiquement nul.

On démontre de même :

1° Qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \Delta_{n-1} = 0;$$

2° Que les équations (5) ne sont pas en nombre supérieur à $(n-1)$.

Remarquons enfin que les équations (5) renferment linéairement les $(n-2)$ quantités $f_4, \ldots, f_{n+1}$; pour qu'elles soient compatibles, il faut qu'on ait

$$S = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \ldots & \chi_1 & \omega_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \ldots & \ldots & \omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \omega_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est de degré n en f_1, f_2, f_3; on démontre, comme plus haut, que le déterminant S n'est pas identiquement nul en f_1, f_2, f_3; et, par suite, $S = 0$ est l'équation de la courbe considérée.

IV.

Les résultats des deux paragraphes précédents nous permettent de résoudre la première question posée au commencement de ce travail :

Étant donnée une courbe S, *de degré* n, *représentée par des équations de la forme* (1), *trouver son équation et celles des courbes adjointes de degrés* $n-2$ *et* $n-1$.

Remarquons d'abord que la courbe S est nécessairement unicursale.

En effet, les équations (5) permettent d'exprimer $f_4(t), f_5(t), \ldots, f_{n+1}(t)$ en fonction rationnelle de $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, c'est-à-dire des coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point de S. Par suite, tout polynôme entier de degré n en t est fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3. En particulier, on a

$$t = \text{fonction rationnelle de } x_1, x_2, x_3.$$

Posons, $A_1, B_1, \ldots$ étant des constantes,

$$\begin{aligned} x'_1 &= A_1 t + B_1, \\ x'_2 &= A_2 t + B_2, \\ x'_3 &= A_3 t + B_3. \end{aligned}$$

Le point (x'_1, x'_2, x'_3) décrit une droite quand t varie. D'après ce qui précède, on voit que x'_1, x'_2, x'_3 seront des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3. Inversement, x_1, x_2, x_3, étant des fonctions rationnelles de t, seront fonctions rationnelles de x'_1, x'_2, x'_3. Les courbes décrites par les points (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) se correspondent donc par une transformation unidéterminative et, par conséquent, sont du même genre.

La courbe S est donc du genre zéro.

Son équation est $S = 0$, S désignant le déterminant du paragraphe précédent.

Cela posé, supposons, pour simplifier le langage, que la courbe S n'ait comme points multiples que des points doubles ; elle en aura $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Les courbes adjointes de degré $(n-2)$ passent par ces points, et, par suite, leur équation générale sera de la forme

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_{n-1} C_{n-1} = 0,$$

$C_1 = 0, \ldots, C_2 = 0, C_{n-1} = 0$ étant des courbes adjointes, telles que les fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ soient linéairement indépendantes.

Or nous connaissons $(n-1)$ courbes adjointes

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1} = 0,$$

telles que les fonctions $\Delta_1, \ldots$ soient linéairement indépendantes; il en résulte que l'équation générale des courbes adjointes de degré $(n-2)$ sera

$$\alpha_1 \Delta_2 + \alpha_3 \Delta_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \Delta_{p-1} = 0,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ étant des polynômes que nous avons appris à former plus haut.

On formerait de même l'équation d'une courbe adjointe de degré $n-1$, à l'aide des polynômes que nous avons appelés F au § II.

Nous ferons une observation relative aux courbes représentées par les équations $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous avons trouvé plus haut les relations

$$(6) \qquad \Delta f_4 = F_4, \quad \Delta f_5 = F_5, \quad \ldots, \quad \Delta f_{n+1} = F_{n+1},$$

où Δ est un polynôme de degré $n-2$, tel que la courbe

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

est une courbe adjointe de S, que l'on peut supposer quelconque.

Les courbes S et Δ ont $(n-1)(n-2)$ intersections aux points multiples de S, et, par suite, elles ont encore $n-2$ points communs, différents des points multiples. Ces $(n-2)$ points sont d'ailleurs arbitraires, puisque, par $(n-2)$ points et par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles de S, on peut toujours faire passer une courbe Δ, de degré $n-2$.

Cela posé, les équations (6) montrent immédiatement que les courbes adjointes $F_4 = 0, \ldots, F_{n+1} = 0$ passent par les $(n-2)$ points communs à Δ et à S.

On déduit de là une conséquence relative à la transformation unidéterminative qui lie deux courbes unicursales de degré n, S et S′.

Les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 des points de S′, étant égales à des polynômes d'ordre n en t, sont des fonctions linéaires et homogènes de $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_{n+1}(t)$; on a ainsi

$$x'_i = a_i f_1 + b_i f_2 + c_i f_3 + d_i f_4 + \ldots + l_i f_{n+1}$$

ou, en vertu de (6),

$$\Delta x'_i = (a_i f_1 + b_i f_2 + c_i f_3)\Delta + d_i F_4 + \ldots + l_i F_{n+1}.$$

Or $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ sont les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point de S; on a ainsi, en supprimant dans le premier membre de la relation précédente le facteur Δ,

$$x'_i = (a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3)\Delta(x_1, x_2, x_3) + d_i F_4(x_1, x_2, x_3) + \ldots.$$

En d'autres termes, S et S′ étant deux courbes unicursales de degré n, les coordonnées d'un point de S′ sont liées aux coordonnées d'un point de S par les relations

$$x'_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3),$$

ψ_i étant un polynôme de degré $n-1$, et les courbes $\psi_i = 0$ des courbes adjointes de S, passant par $(n-2)$ points pris arbitrairement sur S.

(*A suivre.*)