G. HUMBERT

Sur les surfaces homofocales du second ordre (suite et fin)

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 89-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__89_0>

Sur les surfaces homofocales du second ordre;

Par G. Humbert.

(SUITE ET FIN.)

(Séance du 18 février 1885.)

V.

Il nous reste maintenant à traiter la deuxième question que nous nous sommes posée :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe représentée par des équations de la forme (1) *ne soit pas de degré n.*

Dans le cas où cette courbe est de degré n, nous avons montré (§ III) :

1° Que les fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sont linéairement indépendantes.

2° Que les équations (5), déduites des équations fondamentales (4), ne sont pas en nombre supérieur à $n-1$.

Si, au contraire, la courbe n'est pas de degré n, une de ces deux conditions n'est pas remplie.

Pour le faire voir, nous allons examiner successivement les deux cas, signalés au § III, où la courbe S est de degré inférieur à n.

Dans le premier de ces cas, les trois polynômes $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ont k zéros communs : nous montrerons que les équations (5) sont alors en nombre égal à $n+k-1$.

Dans le second cas, à un point de la courbe correspondent p valeurs de l'argument t; nous montrerons que les fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ sont liées par $\frac{n}{p}(p-1)$ relations linéaires et homogènes.

Premier cas. — Supposons d'abord que les polynômes $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ aient k zéros communs, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, que, pour simplifier le raisonnement, nous supposerons différents.

Considérons les équations fondamentales (4)

$$(4)\qquad A_{44}f_4^2+A_{45}f_4f_5+\ldots+A_{n+1,n+1}f_{n+1}^2+\Phi_1f_4+\ldots=\Omega_1$$

et faisons-y $t=\theta_1$: les polynômes $\Phi_1, \ldots, \Omega_1, \ldots,$ homogènes en f_1, f_2, f_3 s'annulent, et il reste

$$A_{44}f_4^2(\theta_1)+A_{45}f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)+\ldots=0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a des équations analogues en faisant $t=\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_k$.

Par conséquent, les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations linéaires et homogènes, à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ inconnues,

$$(15)\qquad \begin{cases} A_{44}x_{44}+A_{45}x_{45}+\ldots+A_{n+1,n+1}x_{n+1,n+1}=0,\\ B_{44}x_{44}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ L_{44}x_{44}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \end{cases}$$

sont vérifiées par les k systèmes de solutions

$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_1)}=\frac{x_{45}}{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)}=\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_k)}=\frac{x_{45}}{f_4(\theta_k)f_5(\theta_k)}=\ldots.$$

Je dis que ces k systèmes de solutions sont différents, ou, en d'autres termes, que les relations

$$\frac{f_4^2(\theta_1)}{f_4^2(\theta_2)}=\frac{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)}{f_4(\theta_2)f_5(\theta_2)}=\ldots$$

sont impossibles.

Ces équations entraînent, en effet, les suivantes :

$$(16)\qquad \frac{f_4(\theta_1)}{f_4(\theta_2)}=\frac{f_5(\theta_1)}{f_5(\theta_2)}=\ldots.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$f_1(\theta_1)=f_2(\theta_1)=f_3(\theta_1)=0,$$
$$f_1(\theta_2)=f_2(\theta_2)=f_3(\theta_2)=0.$$

Tout polynôme de degré n en t est fonction linéaire des polynômes $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_{n+1}$: si les relations (16) étaient vérifiées, on pourrait en conclure que tout polynôme de degré n, s'annulant pour $t=\theta_1$, s'annule pour $t=\theta_2$, ce qui est impossible puisque θ_1 et θ_2 sont différents.

On voit de même que les quantités $f_4(\theta_1), f_5(\theta_1), \ldots, f_{n+1}(\theta_1)$ ne sont pas nulles à la fois.

Les équations (15) sont donc vérifiées par k systèmes différents de valeurs, non nulles simultanément, et par suite :

1° Les déterminants d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ formés avec la matrice

$$(\mathrm{M}) \qquad \begin{Vmatrix} A_{44} & A_{45} & \ldots & A_{n+1,n+1} \\ B_{44} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ L_{44} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{Vmatrix}$$

sont nuls.

2° Il en est de même des déterminants obtenus en supprimant dans l'un quelconque des précédents i lignes et i colonnes quelconques ($i=1, 2, \ldots, k-1$).

Il en résulte qu'en éliminant $f_4^2, f_4, f_5, \ldots, f_{n+1}^2$ entre les équations (4), on trouvera $(n-k+1)$ équations de la forme (5).

Second cas. — Supposons que, quel que soit t, on puisse trouver une valeur u, différente de t, telle que les équations

$$\frac{f_1(u)}{f_1(t)} = \frac{f_2(u)}{f_2(t)} = \frac{f_3(u)}{f_3(t)}$$

soient satisfaites.

En ce cas, comme on l'a dit, à un point de la courbe S correspondent plusieurs valeurs du paramètre t : soit p le nombre de ces valeurs, que nous désignerons respectivement par t, $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_{p-1}(t)$.

Posons, pour simplifier,

$$\mathrm{X}(t) = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad \mathrm{Y}(t) = \frac{f_3(t)}{f_1(t)}.$$

Par hypothèses les deux équations

$$\mathrm{X}(u) = \mathrm{X}(t), \quad \mathrm{Y}(u) = \mathrm{Y}(t)$$

sont satisfaites, quel que soit t, pour les p valeurs de u :

$$t, \ u_1(t), \ \ldots, \ u_{p-1}(t).$$

Nous allons faire voir que dans ce cas la courbe décrite par le point $[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$ est unicursale et que son degré est $\frac{n}{p}$.

En effet, les zéros communs aux deux équations algébriques en u : $X(u) = X(t)$, $Y(u) = Y(t)$ satisfont à une équation algébrique de degré p, qui, mise sous forme entière, sera

$$(17) \qquad M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots + S(t) = 0.$$

M, N, ... sont des polynômes entiers en t.

On a, par suite, identiquement,

$$(18) \qquad \begin{cases} M(t)(u-t)[u-u_1(t)]\ldots[u-u_{p-1}(t)] \\ \quad = M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots + S(t). \end{cases}$$

Observons maintenant que les équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

ne changent pas si l'on y permute u et t; en d'autres termes, l'équation (17) qui lie u et t aura pour racines, si l'on y considère t comme l'inconnue, les quantités u, $u_1(u)$, $u_2(u)$, ..., $u_{p-1}(u)$.

On a ainsi, k étant un facteur constant,

$$M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \ldots = k[M(u)t^p + N(u)t^{p-1} + \ldots];$$

d'où, en tenant compte de (18), l'identité

$$(19) \qquad M(t)(u-t)[u-u_1(t)]\ldots = kM(u)(t-u)[t-u_1(u)]\ldots.$$

Remarquons en second lieu que la suite des quantités

$$u_i(t),\ u_1[u_i(t)],\ u_2[u_i(t)],\ \ldots,\ u_{p-1}[u_i(t)],$$

où i est un des entiers 1, 2, ..., $p-1$, est, à l'ordre près, identique à la suite

$$t,\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t).$$

On a en effet

$$X[u_i(t)] = X(t),$$
$$Y[u_i(t)] = Y(t),$$

et par suite les quantités qui vérifient les relations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

sont identiques à celles qui vérifient les relations

$$X(u) = X[u_i(t)], \quad Y(u) = Y[u_i(t)],$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Posons maintenant, α et β étant deux constantes,

$$Z(t) = \frac{(t-\alpha)[t-u_1(\alpha)]\ldots[t-u_{p-1}(\alpha)]}{(t-\beta)[t-u_1(\beta)]\ldots[t-u_{p-1}(\beta)]}.$$

On a

$$Z[u_i(t)] = \frac{[u_i(t)-\alpha][u_i(t)-u_1(\alpha)]}{[u_i(t)-\beta][u_i(t)-u_1(\beta)]}\cdots.$$

Or l'équation (19) donne, si l'on y fait $u = u_i(t)$ et $t = \alpha$,

$$\begin{aligned} &M(\alpha)[u_i(t)-\alpha][u_i(t)-u_1(\alpha)]\ldots \\ &\quad = kM_1[u_i(t)][\alpha-u_i(t)]\{\alpha-u_1[u_i(t)\}\ldots. \end{aligned}$$

Le second membre est égal, d'après la remarque précédente, à

$$kM_1[u_i(t)](\alpha-t)[\alpha-u_1(t)]\ldots[\alpha-u_{p-1}(t)].$$

On a une relation analogue en β, et l'on en conclut, par division,

$$Z[u_i(t)] = \frac{M(\beta)}{M(\alpha)}\,\frac{(\alpha-t)[\alpha-u_1(t)][\alpha-u_2(t)]}{(\beta-t)[\beta-u_1(t)]}\cdots.$$

Si maintenant on fait, dans l'identité (19), $u = \alpha$, on a

$$M(t)(\alpha-t)[\alpha-u_1(t)\ldots = kM(\alpha)(t-\alpha)[t-u_1(\alpha)]\ldots;$$

de même

$$M(t)(\beta-t)[\beta-u_1(t)]\ldots = kM(\beta)(t-\beta)[t-u_1(\beta)]\ldots$$

et, par suite,

$$Z[u_i(t)] = Z(t).$$

Il en résulte que les quantités t, $u_1(t)$, $\ldots$, $u_{p-1}(t)$ sont les racines d'une équation algébrique en u, de degré p, de la forme

$$Z(u) = Z(t). \tag{20}$$

Cela posé, remarquons que les fonctions rationnelles de t, $X(t)$ et $Z(t)$ sont liées par une relation algébrique; si l'on se donne $Z(t)$, on a, pour t, p valeurs correspondantes, satisfaisant à une relation de la forme

$$Z(t) = \lambda \quad \text{ou} \quad Z(t) = Z(\theta).$$

Ces p valeurs sont donc θ, $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$, $\ldots$, $u_{p-1}(\theta)$ et, en vertu des relations

$$X[u_i(\theta)] = X(\theta),$$

il ne correspond à ces p valeurs qu'une valeur de X. En d'autres termes, $X(t)$ est fonction rationnelle de $Z(t)$. On verrait aisément que le degré de cette fonction est $\frac{n}{p}$.

On a des conclusions identiques pour $Y(t)$. Il en résulte que le point (f_1, f_2, f_3) décrit une courbe unicursale de degré $\frac{n}{p}$. Ce nombre est évidemment un entier; posons $\frac{n}{p} = m$.

Cherchons maintenant ce que représentent les courbes $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\ldots$, $\Delta_{p-1} = 0$, dont nous avons appris à former l'équation au § II.

D'après ce qui a été démontré dans ce paragraphe, ces courbes ont un point multiple d'ordre $p - 1$ en tout point multiple d'ordre p de S, ou plutôt, ainsi que cela résulte de la démonstration même, en tout point de S auquel correspondent p arguments.

Or ici, à tous les points de S correspondent p arguments de la forme

$$t,\ u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t);$$

les courbes Δ ont donc un point multiple d'ordre $p - 1$ en chacun de ces points.

On aura donc, en désignant par $\sigma = 0$ l'équation de la courbe de degré m décrite par le point (f_1, f_2, f_3),

$$\Delta_i = \sigma^{p-1}\delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{21}$$

δ_i désignant un polynôme d'ordre $n - 2 - m(p - 1)$, c'est-à-dire d'ordre $m - 2$, en x_1, x_2, x_3.

La courbe unicursale σ a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, à chacun desquels correspondent $2p$ valeurs de l'argument de la forme

$$\begin{aligned} &t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_{p-1}(t),\\ &t',\ u_1(t'),\ \ldots,\ u_{p-1}(t'). \end{aligned}$$

Les courbes Δ doivent avoir en ces points un point multiple d'ordre $2p - 1$, et par suite ces points, en vertu des identités (21), sont des points simples des courbes représentées par les équations $\delta_i = 0$.

Les courbes δ_i sont donc des courbes de degré $m - 2$, adjointes à la courbe unicursale σ, de degré m; or, pour une telle courbe, l'équation générale des courbes adjointes de degré $m - 2$ est de la forme

$$0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \rho_{m-1},$$

$\alpha_1, \ldots$ étant des constantes et les courbes $\rho_i = 0$ des courbes adjointes de degré $m - 2$. On en conclut que les polynômes δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ sont liés par $n - 1 - (m - 1)$, c'est-à-dire $n - m$ relations linéaires et homogènes, et, en vertu des identités (21), les mêmes relations subsistent entre les polynômes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$.

C'est là précisément le résultat que nous avions énoncé, et qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi :

Pour que la courbe représentée par les équations (1) *soit de degré n, il faut et il suffit :*

1° *Que les équations* (5), *obtenues en éliminant entre les équations* (4) *les quantités* $f_4^2, f_4 f_5, \ldots, f_{n+1}^2$, *ne soient pas en nombre supérieur à* $n - 1$.

Cette condition s'exprime en écrivant que les déterminants d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ formés avec la matrice (M) ne sont pas nuls à la fois.

2° *Que les fonctions* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, *formées comme on l'a dit au* § II, *à l'aide des équations* (5), *soient linéairement indépendantes.*