BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRYSTAL

Sur le problème de la construction du cercle minimum renfermant *n* points donnés d'un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 198-200

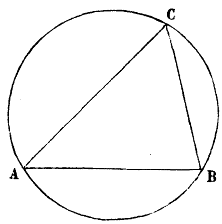
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__198_0>

Sur le problème de la construction du cercle minimum renfermant n points donnés d'un plan; par M. CHRYSTAL (¹).

(Traduit de l'anglais par M. l'abbé Pautonnier.)

(Séance du 20 juin 1884.)

Si nous considérons le cercle circonscrit à un triangle ABC et si nous diminuons son rayon en faisant cependant passer encore le cercle par A et B, alors si ACB est un angle aigu, C sera en dehors du cercle; mais, si ACB est obtus, C reste à l'intérieur du



cercle. Si C est un angle droit du cercle, le rayon du cercle étant égal à $\frac{1}{2}$AB ne peut être diminué.

Ce résultat, qui sera utilisé dans ce qui suit, conduit d'abord à la conséquence, d'ailleurs évidente, que le cercle minimum renfermant trois points donnés est le cercle qui passe par ces points s'ils déterminent un triangle acutangle ou rectangle, que c'est le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint les deux points les plus éloignés dans le cas où le triangle des trois points est obtusangle.

Soient maintenant n points. Nous pouvons toujours en choisir m formant les sommets d'un polygone convexe renfermant tous les autres. Le problème se ramène donc à trouver le cercle minimum renfermant un polygone convexe.

De ce que le polygone est tout entier du même côté de l'un quelconque de ses côtés prolongé indéfiniment, on peut regarder cette

(¹) *Voir* le Mémoire de M. d'Ocagne, sur le même sujet, dans le *Bulletin*, t. XII, p. 168.

ligne comme un cercle de rayon infini renfermant le polygone. Faisons diminuer son rayon d'une manière continue en supposant qu'il passe toujours par les deux sommets considérés. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le rayon diminuera jusqu'à sa plus petite valeur (la moitié du côté du polygone) avant que le cercle laisse en dehors aucun sommet du polygone; dans ce cas le cercle ayant pour diamètre le côté choisi contient les n points, et ne peut être diminué, puisqu'il n'y a pas de cercle plus petit qui contienne les deux sommets considérés; ou bien le cercle, avant d'arriver à son minimum, passera par un troisième sommet du polygone; dans ce cas, si les trois sommets forment un triangle acutangle, le cercle minimum est obtenu, puisque le cercle considéré contient tous les points du polygone, et qu'aucun cercle moindre ne pourra contenir les trois points en question. Si le triangle est obtusangle, nous observons d'abord que *le côté obtus ne peut être opposé au côté choisi,* car nous n'avons pas atteint d'après l'hypothèse le rayon minimum qui correspond à un angle droit. L'angle obtus a donc pour sommet l'un ou l'autre des sommets situés sur le côté choisi. Laissant de côté le sommet de l'angle obtus, faisons diminuer le rayon du cercle qui passe encore par les deux sommets conservés. De cette manière le sommet négligé se trouve à l'intérieur du cercle diminué et n'est plus à considérer. Continuant ainsi, nous arriverons comme précédemment à un cercle minimum ayant pour diamètre la droite qui joint les deux sommets conservés, où nous arriverons à un cercle passant par trois sommets du polygone qui sera le cercle minimum si les trois sommets forment un triangle acutangle, ou qu'on peut encore diminuer si ce triangle est obtusangle, en remarquant comme plus haut que le sommet de l'angle obtus ne peut être le dernier sommet atteint, et ainsi de suite.

De ce que le rayon du cercle va constamment en diminuant, l'opération doit se terminer et cela de l'une ou des deux manières, c'est-à-dire ou bien le cercle minimum se présentera comme le cercle décrit sur un côté ou sur une diagonale du polygone comme diamètre (côté ou diagonale qui seront la plus grande distance entre deux des n points), ou bien le cercle minimum se présentera comme le cercle circonscrit à un triangle acutangle déterminé par trois sommets du polygone. Dans certains cas limites, le cercle peut passer par d'autres points que les deux ou les trois qui le déterminent, mais cela n'affecte en rien les conclusions au point de vue topographique ; il est intéressant de remarquer que ces systèmes de points se divisent en deux classes distinctes chacune contenant des cas limites, suivant que le cercle minimum est déterminé par deux ou trois d'entre eux.

La discussion précédente suggère la méthode pratique suivante pour déterminer le cercle minimum d'un système de points.

Il faut construire un polygone convexe enfermant tous les points en prenant m points pour sommets. On prend un côté quelconque de ce polygone et l'on trouve le sommet pour lequel il sous-tend le plus petit angle. Si ce plus petit angle est droit ou obtus, le cercle minimum est celui qui a pour diamètre le côté choisi. Si le triangle formé est acutangle, le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle minimum, sinon on prend le côté opposé à l'angle obtus et l'on trouve le sommet pour lequel il sous-tend le plus petit angle et l'on continue comme précédemment.

Le nombre d'opérations dépend naturellement du premier côté choisi; il est clair cependant qu'aucun côté ou polygone ne peut être choisi plus d'une fois; par suite $\frac{1}{2}m(m-1)$ est une limite supérieure du nombre des opérations.

Dans certains cas particuliers, il pourra être plus expéditif d'essayer d'abord si le cercle décrit sur le plus grand côté ou la plus grande diagonale comme diamètre contient tous les points; s'il n'en est pas ainsi, alors le cercle minimum sera obtenu en trouvant le triangle formé par trois sommets du polygone qui a le plus grand cercle circonscrit.

Le problème du cercle minimum renfermant n points a naturellement son importance dans la théorie du potentiel de points situés dans un plan ; il peut aussi avoir quelque intérêt dans les sujets connexes de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Une discussion semblable peut s'appliquer au problème de construire la sphère minimum renfermant n points de l'espace. Il y a trois cas suivant que la sphère minimum est déterminée par deux, par trois ou par quatre des points. Il n'y a qu'à substituer au triangle acutangle un tétraèdre acutangle, c'est-à-dire tel que chaque face sépare la sphère circonscrite en deux segments dont le plus grand supérieur à un hémisphère soit celui qui contient le sommet opposé.