Bulletin de la S. M. F.

E. Habich

Sur les rayons de courbure de deux courbes qui rencontrent les tangentes d'une troisième courbe sous des angles liés par une relation donnée

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 201-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__201_0>

Sur les rayons de courbure de deux courbes qui rencontrent les tangentes d'une troisième courbe sous des angles liés par une relation donnée (¹); par E. Habich, Directeur de l'École des Mines de Lima.

(Séance du 6 mai 1885.)

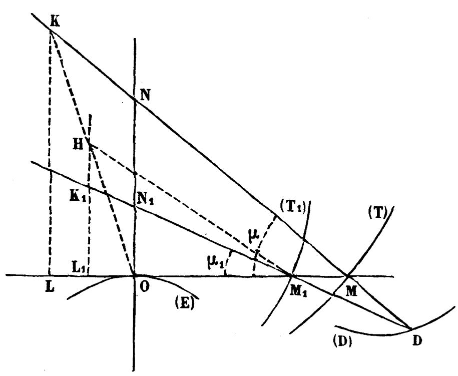
I. Soient (E) une courbe plane donnée et (T) et (T_1) deux autres courbes qui rencontrent les tangentes de la première sous des angles dont les compléments μ et μ_1 sont liés par l'équation

$$f(\mu, \mu_1) = 0; \tag{1}$$

μ et μ_1 sont évidemment les angles formés par les normales aux courbes (T) et (T_1) avec les tangentes de la courbe (E). Nous appelons la ligne (E) *courbe de référence* et les lignes (T) et (T_1) *transformées*, l'une de l'autre, par rapport à la courbe (E) et suivant le procédé défini par l'équation (1).

Si la *courbe de référence* (E) se réduit à un point, on rentre dans les coordonnées polaires.

Appelant ds l'arc élémentaire d'une courbe (T), correspondant



à l'angle $d\theta$ des tangentes, tracées par ses extrémités à la courbe de référence (E); $n = MN$ la longueur de la normale comprise

(¹) Voir *Annali di Matematica*, t. II, p. 138; Milan, 1868, et *Études cinématiques*, p. 40; Paris, 1879.

entre M et le point N où elle rencontre la normale en O à la courbe (E); ρ et $d\varepsilon$ le rayon de courbure et l'angle de contingence de la ligne (T); on a les relations connues

$$ds = n\,d\theta = \rho\,d\varepsilon, \tag{2}$$

$$d\theta = d\mu + d\varepsilon; \tag{3}$$

d'où

$$\frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{d\varepsilon}{d\theta} = 1 - \frac{n}{\rho} = \frac{\rho - n}{\rho}. \tag{4}$$

Différentiant l'équation (1), par rapport à l'angle polaire θ,

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial \mu_1}\frac{d\mu_1}{d\theta} = 0, \tag{5}$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} : \frac{\partial f}{\partial \mu_1} = -\frac{d\mu_1}{d\mu} = -\lambda \tag{6}$$

et, combinant avec (4) et (5),

$$\frac{\rho - n}{\rho} - \lambda\,\frac{\rho - n}{\rho_1} = 0. \tag{7}$$

Projetant en L et L_1 sur la droite MM_1O les centres de courbure K et K_1, on trouve

$$\frac{\rho - n}{\rho} = \frac{NK}{MK} = \frac{OL}{ML} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_1 - n_1}{\rho_1} = \frac{N_1K_1}{M_1K_1} = \frac{OL_1}{M_1L_1},$$

et la relation (7) devient

$$\frac{OL}{ML} = \lambda\,\frac{OL_1}{M_1L_1}.$$

Traçant la droite KO, qui rencontre la perpendiculaire K_1L_1 en H, on trouve

$$\frac{OL}{OL_1} = \frac{KL}{KL_1} = \lambda\,\frac{ML}{M_1L_1},$$

d'où

$$\frac{KL}{ML} = \lambda\,\frac{HL_1}{M_1L_1}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}\mu = \lambda \operatorname{tang}\xi \quad (\xi = HM_1O).$$

Au moyen de cette relation on peut déterminer le centre de la courbure de la transformée (T), lorsqu'on connaît celui de (T) ou *vice versa*.

Cherchons maintenant la forme de la fonction des angles (1), pour le cas où les centres de courbure de deux lignes (T) et (T_1) se trouvent sur une même droite passant par le pôle correspondant de transformation O.

Pour cela, il faut que les angles

$$L_1 M_1 H = K_1 M_1 L_1, \quad \xi = \mu,$$

et

$$\operatorname{tang}\xi = \operatorname{tang}\mu_1;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\mu = \pm\lambda \operatorname{tang}\mu_1.$$

Remplaçant λ par sa valeur (6), on aura

$$\frac{d\mu}{\operatorname{tang}\mu} \mp \frac{d\mu_1}{\operatorname{tang}\mu_1} = 0,$$

et, intégrant,

$$\sin\mu - c\sin\mu_1 = 0 \tag{8}$$

et

$$\sin\mu\sin\mu_1 = c_1. \tag{9}$$

On satisfait à la condition demandée, de la correspondance des centres de courbure, des transformées (T) et (T_1) par les relations (8) et (9) ou par une fonction quelconque (1) du rapport c ou du produit c_1 des sinus des angles μ et μ_1 ($c_1 < \pm 1$).

Les cas de similitude et de l'inversion sont compris dans la relation (8) et correspondent au rapport c égal à $+1$ et à -1.

I. *Application aux caustiques par réfraction.* — Considérons la courbe (D), lieu des intersections des normales aux points correspondants M et M_1 de deux transformées (T) et (T_1); on a

$$MD : M_1 D = \sin\mu_1 : \sin\mu,$$

c'est-à-dire que le rapport des distances d'un point D de la ligne (D) aux deux courbes (T) et (T_1) est égal à celui des sinus des angles que forment ces distances MD et M_1D avec la droite qui réunit les points correspondants M et M_1.

Il s'ensuit que, à une équation homogène entre les distances

MD et M_1D correspond une équation homogène entre les $\sin\mu$ et $\sin\mu_1$ et *vice versa*.

En particulier, si le rapport de deux distances MD et M_1D était constant, la ligne (D) serait la dirimante (la réfringente) des rayons lumineux incidents normaux à la courbe (T) et qui, après la réfraction, seraient normaux à la courbe (T_1); — (T) et (T_1) sont les anticaustiques des rayons incidents et des rayons réfractés et leurs développées les caustiques de ces mêmes rayons [1].

Comme le cas considéré correspond à la fonction des angles (δ), on a ce théorème : *Que la droite qui réunit les points correspondants* M *et* M_1 *de deux anticaustiques* (T) *et* (T_1) *et la droite* KK_1 *qui réunit leurs centres de courbure* (*points correspondants des caustiques*) *se rencontrent au point* O, *où la droite* MM_1 *touche son enveloppe* (E).

---

(1) *Annali di Matematica,* p. 141-145; 1869.