BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE.

Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 98-100

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__98_0>

Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes [1]; par M. de Presle.

(Séance du 21 avril 1886.)

La théorie de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés indépendants peut se déduire du théorème suivant, dont nous allons proposer une démonstration :

Si une forme quadratique est décomposée en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, le déterminant principal du discriminant de la forme quadratique est en valeur absolue égal au carré du déterminant principal du système des coefficients des variables dans les formes linéaires composantes.

Soit U une forme quadratique à m variables $x_1, \ldots, x_h, \ldots, x_m$; soient $P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_n$, n formes linéaires indépendantes de ces variables, en lesquelles la forme U est décomposée, a_{kh} le coefficient de la variable x_k dans P_k; l'expression de P_k est la suivante :

$$P_k = \Sigma_{k=1}^{h=m} a_{kh} x_h.$$

Les formes linéaires étant indépendantes, le déterminant principal du système des coefficients des variables est d'ordre n, et nous pouvons, sans nuire à la généralité de la proposition, supposer que ce déterminant principal δ soit

$$\delta = | a_{kh} |_{h=1,2,-n}^{h=1,2,-n}.$$

Désignons par ε la quantité ± 1; nous aurons

$$U = \Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k P_k^2.$$

Soit l un indice de x; nous aurons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x_l} = \Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} P_k$$

---

(1) Le présent travail suppose connue la remarquable théorie de la résolution des équations linéaires de M. E. Rouché, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique* en 1882.

ou, en remplaçant P_k par sa valeur,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_l} = \Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} \Sigma_{h=1}^{h=m} a_{kh} x_h;$$

dans cette expression, le coefficient de x_h est

$$\Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh},$$

le discriminant Δ est donc

$$\Delta = \left| \Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh} \right|_{l=1,\, 2-m}^{h=1,\, 2-m}.$$

1° Considérons un mineur quelconque du discriminant, nous pouvons le décomposer en déterminants partiels obtenus en combinant entre elles les colonnes partielles correspondant aux différentes valeurs de k. Cette décomposition faite, les déterminants partiels dans la composition desquels entrent deux colonnes partielles de même rang, c'est-à-dire correspondant à une même valeur de k, sont nuls.

En effet, les éléments de l'une étant

$$a_{kl_1} a_{h'}, \quad a_{kkl_2} a_{kh'}, \quad a_{kl_3} a_{kh'}, \quad \ldots,$$

les éléments de l'autre seront

$$a_{kl_1} a_{kh''}, \quad a_{kl_2} a_{kh''}, \quad a_{kl_3} a_{kh''}, \quad \ldots,$$

et, par suite, seront proportionnels aux premiers.

2° Les mineurs du discriminant d'ordre supérieur à n sont nuls. En opérant la décomposition précédente, il faudra associer $n+i$ colonnes partielles prises chacune parmi les $n+i$ colonnes du discriminant, lesquelles n'ont chacune que n colonnes partielles; donc au moins deux colonnes partielles auront le même rang, et les mineurs seront nuls.

3° Parmi les mineurs du discriminant d'ordre n, il y en a un égal en valeur absolue au carré du déterminant principal du système des coefficients des variables dans les formes linéaires.

Considérons le mineur δ' du discriminant

$$\delta' = \left| \Sigma_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k a_{kl} a_{kh} \right|_{k=1,\, 2-n}^{h=1,\, 2-n}.$$

Décomposons-le en déterminants partiels; parmi ceux-ci les déterminants partiels provenant de l'association de colonnes partielles de même rang seront nuls; les déterminants partiels provenant de l'association de colonnes partielles de rang différent (ce qui est possible, car ces colonnes partielles doivent être prises dans les n colonnes de δ', qui ont chacune n colonnes partielles) ne seront pas nuls, et contiendront le facteur $\Pi_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k$.

On peut conserver dans la somme provenant de la décomposition précédente les déterminants partiels nuls, en supposant que, dans les facteurs ε_k, k ait toutes les valeurs de 1 à n; et le produit $\Pi_{k=1}^{k=1}$ étant égal à ± 1, on aura

$$\delta' = \pm \mid \Sigma_{k=1}^{k=n} a_{kl} a_{kh} \mid_{l=1,\, 2-n}^{h=1,\, 2-n},$$

la quantité placée entre traits verticaux représentant l'élément appartenant à la $l^{\text{ième}}$ ligne et à la $h^{\text{ième}}$ colonne. On l'obtiendra en considérant les sommes

$$\Sigma_{k=1}^{k=n} a_{kl}, \quad \Sigma_{k=1}^{k=n} a_{kh}$$

et faisant la somme des produits des termes de même rang. On a donc le carré du déterminant principal δ et, par suite,

$$\delta' = \pm d^2,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.