BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

# Des rayons de courbure dans les transformations isogonales

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 39-41

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__39_0>

*Des rayons de courbure dans les transformations isogonales* (¹),
par M. A.-C. LAISANT.

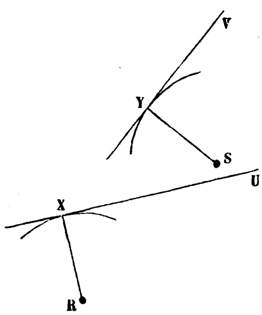
(Séance du 19 janvier 1887.)

Si une variable $OY = \text{y}$ est liée à une variable $OX = \text{x}$ par une relation de la forme $\text{y} = \varphi(\text{x})$ ou, plus généralement,

$$\text{y} = f(\text{x}) + i f_1(\text{x}),$$

les fonctions $f$, $f_1$ étant des fonctions analytiques dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire ayant pour chaque valeur de x une dérivée bien déterminée, la transformation qu'exprime cette relation est *isogonale*, c'est-à-dire que, dans toute transformation de ce genre, les angles se conservent.

En effet, si l'on donne à X un déplacement $d\text{x}$ quelconque, il vient $d\text{y} = \varphi'(\text{x})\, d\text{x}$, $\dfrac{d\text{y}}{d\text{x}} = \varphi'(\text{x})$, en sorte que le rapport des déplacements $d\text{y}$, $d\text{x}$ est constant pour un même point, et que




l'angle formé par ces déplacements, c'est-à-dire par les tangentes XU, YV de deux courbes transformées, est constant lui aussi, et égal à l'inclinaison de $\varphi'(\text{x})$.

(¹) Il est fait usage, dans cette Note, de la méthode des équipollences. Le signe $=$ veut dire *équipollent à*. La lettre $i$ tient lieu du signe $\surd$ (ramun), c'est-à-dire du simbole $\sqrt{-1}$. La lettre x désigne la quantité géométrique représentée par la droite OX. Les notations $\mathfrak{D}\text{x}$, $\mathfrak{D}^2\text{x}$ représentent respectivement les dérivées géométriques, du premier et du second ordre, de la variable x.

L'objet de cette Note est la recherche des relations entre les rayons de courbure XR, YS des deux courbes en question.

Si l'on pose

$$\frac{\mathfrak{D}^2 X}{\mathfrak{D} X} = l + i\lambda, \qquad \frac{\mathfrak{D}^2 Y}{\mathfrak{D} Y} = l' + i\lambda',$$

on sait que les rayons de courbure XR, YS sont respectivement donnés par les équipollences

$$\text{(1)} \qquad XR = \frac{i}{\lambda}\,\mathfrak{D}X, \qquad YS = \frac{i}{\lambda'} = \mathfrak{D}Y.$$

Or nous avons

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{D}Y = \varphi'(X)\,\mathfrak{D}X;$$

d'où

$$\mathfrak{D}^2 Y = \varphi'(X)\,\mathfrak{D}^2 X + \varphi''(X)(\mathfrak{D}X)^2,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathfrak{D}^2 Y}{\mathfrak{D} Y} = \frac{\mathfrak{D}^2 X}{\mathfrak{D} X} + \frac{\varphi''(X)}{\varphi'(X)}\,\mathfrak{D}X.$$

Posons

$$\text{(4)} \qquad \varphi'(X) = a\varepsilon^{\alpha}, \qquad \frac{\varphi''(X)}{\varphi'(X)} = b\,\varepsilon^{\beta},$$

valeurs constantes pour la position considérée du point X.

La relation précédente pourra s'écrire

$$\text{(5)} \qquad l' + i\lambda' = l + i\lambda + b\varepsilon^{\beta}\,\mathfrak{D}X.$$

Prenons pour variable indépendante l'arc même de la courbe (X) et désignons par $\theta$ l'inclinaison de la tangente à cette courbe. Alors $\mathfrak{D}X = \varepsilon^{\theta}$, $\mathfrak{D}Y = a\varepsilon^{\alpha+\theta}$, et, en égalant les parties imaginaires des deux membres de l'équipollence (5),

$$\text{(6)} \qquad \lambda' = \lambda + b\sin(\beta + \theta),$$

c'est-à-dire, en vertu des relations (1), et si l'on appelle $\rho$, $\rho'$ les longueurs des deux rayons de courbure,

$$\text{(7)} \qquad \frac{a}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + b\sin(\beta + \theta).$$

relation remarquable entre les deux rayons de courbure. Ceux-ci ont d'ailleurs pour inclinaisons $\theta$ et $\theta + \alpha$ si l'on prend pour origine des inclinaisons une droite perpendiculaire à l'origine primitive.

Parmi les conséquences de la formule (7), il y a lieu de signaler un théorème qui semble nouveau. L'équation générale d'une conique en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{\rho} = p\cos\theta + q\sin\theta \pm \sqrt{f\cos^2\theta + g\cos\theta\sin\theta + h\sin^2\theta}.$$

Si dans cette équation on opère la substitution résultant de la formule (7), l'angle $\theta$ étant toujours l'angle polaire par rapport à un certain axe polaire convenablement choisi, on voit que l'équation en $\rho'$ et $\theta$ représentera aussi une conique. Nous avons donc la proposition suivante, applicable à toute transformation isogonale :

*Si les centres de courbure* R *d'une série de courbes passant par un point* X *sont distribués sur une conique, les centres de courbure* S *des courbes transformées, passant par le point* Y, *seront aussi distribués sur une conique.*

En particulier, nous avons les conséquences ci-après, pour ainsi dire évidentes en vertu de ce qui précède :

1° *Toutes les transformées de droites passant par un même point ont leurs centres de courbure situés sur une même droite;*
2° *Si les rayons de courbure des courbes passant par* X *sont tous égaux, les centres de courbure des transformées seront distribués sur une conique de foyer* Y;
3° *Si les centres de courbure des courbes* (X) *sont distribués sur une conique de foyer* X, *les centres de courbure des courbes transformées* (Y) *seront distribués sur une conique de foyer* Y.

Transon (*Nouvelles Annales*, 1869, p. 114) a établi les propriétés 1° et 2° dans un article fort remarquable sur l'algèbre directive. Mais il ne paraît pas avoir rencontré la proposition 3°, ni surtout le théorème général que nous venons de signaler.