BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Sur les transformations non isogonales

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 103-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__103_1>

Sur les transformations planes non isogonales;
par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 19 janvier 1887.)

D'un point X d'une figure plane, on déduit un point Y par une transformation *quelconque*, c'est-à-dire au moyen d'une construction géométrique bien définie, quelle que soit d'ailleurs cette construction. En général, la transformation ne sera pas isogonale; cela n'aura lieu que lorsque Y pourra s'exprimer sous la forme $\varphi(\mathrm{X})$, la fonction φ pouvant d'ailleurs se décomposer en $\varphi_1 + i\varphi_2$.

Mais, alors même qu'il n'en est pas ainsi, la nature des constructions indiquées permet d'écrire Y sous la forme analytique suivante :

(1) $$\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{cj}\,\mathrm{X}).$$

Considérons un point X quelconque, et posons, pour la valeur X correspondante

(2) $$\frac{d\varphi}{d\mathrm{X}} = p, \qquad \frac{d\varphi}{d\,\mathrm{cj}\,\mathrm{X}} = q.$$

p et q sont alors deux quantités géométriques, constantes pour un même point. Si nous différentions la relation (1) en donnant à X deux accroissements arbitraires $d_1\mathrm{X}$, $d_2\mathrm{X}$, il viendra

(3) $$d_1\mathrm{Y} = p\,d_1\mathrm{X} + q\,\mathrm{cj}\,d_1\mathrm{X},$$

(4) $$d_2\mathrm{Y} = p\,d_2\mathrm{X} + q\,\mathrm{cj}\,d_2\mathrm{X}.$$

La conjuguée de l'équipollence (4) est

(5) $$\mathrm{cj}\,d_2\mathrm{Y} = \mathrm{cj}\,p\,\mathrm{cj}\,d_2\mathrm{X} + \mathrm{cj}\,q\,d_2\mathrm{X}.$$

De (3) et de (5) on tire

$$d_1\mathrm{Y}\,\mathrm{cj}\,d_2\mathrm{Y} - d_2\mathrm{Y}\,\mathrm{cj}\,d_1\mathrm{Y} = (p\,\mathrm{cj}\,p - q\,\mathrm{cj}\,q)(d_1\mathrm{X}\,\mathrm{cj}\,d_2\mathrm{X} - d_2\mathrm{X}\,\mathrm{cj}\,d_1\mathrm{X}),$$

c'est-à-dire

(6) $$(\mathrm{YY_1Y_2}) = (p\,\mathrm{cj}\,p - q\,\mathrm{cj}\,q(\mathrm{XX_1X_2}),$$

en désignant par $\mathrm{XX_1}$, $\mathrm{XX_2}$, $\mathrm{YY_1}$, $\mathrm{YY_2}$ les déplacements infiniment petits $d_1\mathrm{X}$, $d_2\mathrm{X}$, $d_1\mathrm{Y}$, $d_2\mathrm{Y}$, respectivement.

Le rapport des aires infiniment petites correspondantes autour d'un même point et du point correspondant est donc constant pour le point considéré.

Cette propriété est assez curieuse, et elle peut d'ailleurs s'établir par l'analyse ordinaire, sans le secours de la méthode des équipollences. Elle conduit à plusieurs remarques.

Si nous considérons une courbe fermée quelconque dont l'intérieur est parcouru par l'extrémité de la variable X, l'extrémité de y parcourra l'intérieur d'une autre courbe fermée. Appelons $d\sigma$ et $d\zeta$ les aires élémentaires autour de deux points correspondants X et Y, et posons $p \,\text{cj}\, p - q \,\text{cj}\, q = k$, quantité algébrique. La relation (6) donnera

$$d\zeta = k\, d\sigma$$

et, par intégration portant sur toute l'aire des courbes,

$$\zeta = \int k\, d\sigma. \tag{7}$$

Si k exprime, par exemple, le poids spécifique de l'aire (supposée matérialisée) de la courbe (X) en chaque point, ζ exprimera le poids total de cette aire.

Si k exprime une coordonnée normale au plan de la figure, ζ exprimera le volume du cylindre se projetant suivant la courbe (X) et ayant k pour hauteur en chaque point.

Dans ces deux cas, on voit que l'aire de la courbe (Y) exprime, soit le poids, soit le volume dont nous venons de parler. Le fait, au premier abord, pourrait sembler paradoxal, puisque la courbe (Y) ne dépend que du *contour* de la courbe (X), si l'on ne se rappelait pas que le mode de transformation est intimement lié à la valeur de k.

Cette expression des volumes par des aires peut offrir de l'intérêt dans certaines questions particulières.

Dans la relation (3), supprimons l'indice, et posons $d\text{x} = dr.\varepsilon^{\theta}$. Nous aurons

$$d\text{y} = dr(p\varepsilon^{\theta} + q\varepsilon^{-\theta}) = dr\left(\frac{p+q}{2}\cos\theta + i\,\frac{p-q}{2}\sin\theta\right).$$

Soient

$$\text{XA} = \frac{p+q}{2}, \qquad \text{XB} = i\frac{p-q}{2}.$$

Alors

$$d\text{y} = dr(\text{XA}\cos\theta + \text{XB}\sin\theta). \tag{8}$$

De là plusieurs conséquences :

1° *Si l'on décrit autour de* X *comme centre une circonférence infiniment petite, la transformée de cette circonférence sera une ellipse infiniment petite de centre* Y.

2° *A plusieurs circonférences concentriques infiniment pe-*

tites autour de X *comme centre correspondent plusieurs ellipses homothétiques de centre* Y.

3° *A un système de deux rayons rectangulaires dans la circonférence de centre* X *correspond un système de deux demi-diamètres conjugués dans l'ellipse infiniment petite correspondante.*

Par la relation (3) on reconnaît encore facilement que :

Si une ellipse quelconque infiniment petite est décrite autour de X *comme centre, elle a pour correspondante une ellipse infiniment petite de centre* Y.

Nous bornons là ces remarques, en nous contentant d'attirer l'attention du lecteur sur un fait : c'est que, malgré l'arbitraire que présente la transformation, la transformée infiniment petite d'une ellipse autour d'un point est une ellipse, à la condition, constamment sous-entendue, qu'il y ait continuité. Il y a, ce semble, une certaine analogie entre ce fait et la théorie de l'indicatrice dans la courbure des surfaces.

Il y aurait lieu d'étudier les analogies qui doivent se produire lorsqu'on examine des transformations de figures dans l'espace.