BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 106-120
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__106_1>

Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques;
par M. E. Goursat.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Considérons une différentielle de la forme

$$(1) \qquad f(x)\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

où $f(x)$ désigne une fonction rationnelle quelconque et

$$Ax^2+Bx+C$$

un trinôme du second degré, non carré parfait, pouvant, comme cas particulier, se réduire à une expression linéaire. Posons

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'} = \varphi(t); \tag{2}$$

le numérateur et le dénominateur de $\varphi(t)$ sont supposés premiers entre eux, et l'un au moins est du second degré. Par cette substitution, la différentielle (1) devient

$$\mathfrak{F}(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{3}$$

où

$$\mathfrak{F}(t) = f\left(\frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'}\right)\frac{Lt^2 - 2Nt + M}{(a't^2 + b't + c')^2},$$

$$L = ab' - ba', \qquad M = bc' - cb', \qquad N = ca' - ac',$$

$$R(t) = A(at^2 + bt + c)^2 + B(at^2 + bt + c)(a't^2 + b't + c') + C(a't^2 + b't + c')^2.$$

Les deux racines t_1, t_2 de l'équation

$$\varphi(t) = \lambda$$

vérifient, quel que soit λ, la relation d'involution

$$Lt_1t_2 - N(t_1 + t_2) + M = 0,$$

obtenue en éliminant λ entre les deux équations

$$at_1t_2 - c - \lambda[a't_1t_2 - c'] = 0,$$
$$a(t_1 + t_2) + b - \lambda[a'(t_1 + t_2) + b'] = 0.$$

Il suit de là que si, dans $\varphi(t)$, on fait la substitution linéaire

$$Ltz - N(t + z) + M = 0, \tag{4}$$

ou

$$t = \frac{Nz - M}{Lz - N},$$

on aura identiquement

$$\varphi(t) = \varphi(z).$$

On vérifie en effet, sans aucune difficulté, les identités ci-dessous :

$$at^2 + bt + c = (N^2 - LM)\frac{az^2 + bz + c}{(Lz - N)^2},$$

$$a't^2 + b't + c' = (N^2 - LM)\frac{a'z^2 + b'z + c'}{(Lz - N)^2},$$

$$Lt^2 - 2Nt + M = (LM - N^2)\frac{Lz^2 - 2Nz + M}{(Lz - N)^2}.$$

On aura, par conséquent,

$$\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{R}(t)}} = \frac{(\mathrm{LM}-\mathrm{N}^2)\,dz}{\sqrt{(\mathrm{N}^2-\mathrm{LM})^2\mathrm{R}(z)}} = \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}},$$

$$f\left(\frac{at^2+bt+c}{a't^2+b't+c'}\right) = f\left(\frac{az^2+bz+c}{a'z^2+b'z+c'}\right),$$

$$\frac{\mathrm{L}t^2-2\mathrm{N}t+\mathrm{M}}{a't^2+b't+c'} = -\frac{\mathrm{L}z^2-2\mathrm{N}z+\mathrm{M}}{a'z^2+b'z+c'},$$

$$\left(\frac{\mathrm{N}z-\mathrm{M}}{\mathrm{L}z-\mathrm{N}}\right) = -f\left(\frac{az^2+bz+c}{a'z^2+b'z+c'}\right)\frac{\mathrm{L}z^2-2\mathrm{N}z+\mathrm{M}}{a'z^2+b'z+c'} = -\mathfrak{F}(z).$$

La différentielle (3) jouit donc de la propriété suivante :

Il existe une substitution linéaire involutive

$$t = \frac{\mathrm{N}z-\mathrm{M}}{\mathrm{L}z-\mathrm{N}},$$

qui permute deux à deux les racines de l'équation $\mathrm{R}(t)=0$, *telle que l'on ait identiquement*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\mathrm{N}z-\mathrm{M}}{\mathrm{L}z-\mathrm{N}}\right) = -\mathfrak{F}(z).$$

2. Inversement, soit $\mathrm{R}(t)$ un polynôme du quatrième degré, ayant quatre racines distinctes a, b, c, d, et soit

$$\mathrm{L}t_1t_2-\mathrm{N}(t_1+t_2)+\mathrm{M}=0$$

une substitution linéaire involutive qui permute deux à deux les racines a, b, c, d. Si une fonction rationnelle $\mathfrak{F}(t)$ est telle que l'on ait identiquement

$$\mathfrak{F}(t_1)+\mathfrak{F}(t_2)=0,$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t)\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{R}(t)}}$$

est une intégrale *pseudo-elliptique*. Désignons en effet par α et β les points doubles de l'involution précédente; la relation entre t_1 et t_2 pourra s'écrire

$$\frac{t_1-\alpha}{t_1-\beta}+\frac{t_2-\alpha}{t_2-\beta}=0.$$

Faisons le changement de variable,

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta}=u;$$

la différentielle $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{du}{\sqrt{R_1(u)}},$$

où le polynôme $R_1(u)$ n'a que des termes de degré pair; car la relation entre les valeurs u_1, u_2 de u, qui correspondent aux valeurs t_1, t_2 de t, est précisément

$$u_1+u_2=0.$$

De même, la fonction rationnelle $\mathfrak{F}(t)$ se change en une certaine fonction rationnelle $F(u)$, et la relation

$$\mathfrak{F}(t_1)+\mathfrak{F}(t_2)=0$$

devient

$$F(u_1)+F(u_2)=0,$$

c'est-à-dire

$$F(u_1)+F(-u_1)=0.$$

Il suit de là que $F(u)$ sera de la forme $u\,F_1(u^2)$, et il suffira de poser

$$u^2=x$$

pour ramener la différentielle

$$\frac{u\,F_1(u^2)\,du}{\sqrt{R_1(u)}}$$

à une différentielle de la forme (1). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit

$$\left[t, \frac{Nt-M}{Lt-N}\right]$$

une substitution de période 2 permutant deux à deux les quatre racines a, b, c, d *de l'équation* $R(t)=0$, *et* $\mathfrak{F}(t)$ *une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement*

$$\mathfrak{F}(t)+\mathfrak{F}\left(\frac{Nt-M}{Lt-N}\right)=0;$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t)\,\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Ce résultat a été obtenu d'une autre façon par M. Raffy (voir *Bulletin,* t. XII, p. 51); le procédé ci-dessus donne en outre le moyen d'effectuer la réduction.

L'énoncé précédent s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des quatre racines a, b, c, d comme infinie.

3. Les quatre racines a, b, c, d étant quelconques, il existe trois substitutions linéaires de période 2, qui permutent deux à deux ces trois racines. Par exemple, la substitution

$$\left\{ t, \frac{(ab-cd)t+(a+b)cd-(c+d)ab}{[(a+b)-(c+d)]t-(ab-cd)} \right\}$$

permute les deux racines a et b et les deux racines c et d. Les deux autres substitutions se déduisent de celle-là, en prenant successivement pour a et b deux quelconques des racines, et pour c et d les deux autres. Désignons par S_1, S_2, S_3 ces trois substitutions; avec la substitution identique $t=t$, elles forment un *groupe* de quatre substitutions, et l'on a les relations

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = 1,$$
$$S_1S_2 = S_2S_1 = S_3, \qquad S_1S_3 = S_3S_1 = S_2, \qquad S_2S_3 = S_3S_2 = S_1.$$

Soient en général S une substitution linéaire

$$S\left[t, \frac{Nt-M}{Lt-N}\right]$$

et $F(t)$ une fonction rationnelle de t; je désignerai, pour abréger, par $F(S)$ la fonction rationnelle

$$F\left(\frac{Nt-M}{Lt-N}\right).$$

Étant donné un polynôme quelconque du quatrième degré $R(t)$, nous connaissons, d'après ce qui précède, trois types d'intégrales *pseudo-elliptiques,* relatives à ce polynôme,

$$\int f(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

$$\int \varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

$$\int \psi(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

les fonctions rationnelles $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vérifiant respectivement les relations

$$f(S_1)+f=0, \qquad \varphi(S_2)+\varphi=0, \qquad \psi(S_3)+\psi=0,$$

équivalentes à celles-ci

$$f(S_2)+f(S_3)=0, \qquad \varphi(S_1)+\varphi(S_3)=0, \qquad \psi(S_1)+\psi(S_2)=0.$$

Il est clair qu'en ajoutant ces trois intégrales, on obtient encore une intégrale *pseudo-elliptique*

$$\int \mathfrak{F}(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$\mathfrak{F}(t)=f(t)+\varphi(t)+\psi(t);$$

les relations précédentes, qui sont vérifiées par les fonctions f, φ, ψ, nous donnent, pour la fonction $\mathfrak{F}(t)$, la relation

$$\mathfrak{F}+\mathfrak{F}(S_1)+\mathfrak{F}(S_2)+\mathfrak{F}(S_3)=0. \tag{5}$$

Inversement, soit $\mathfrak{F}(t)$ une fonction rationnelle satisfaisant à la condition (5). Posons

$$f=\frac{\mathfrak{F}-\mathfrak{F}(S_1)}{2}, \qquad \varphi=\frac{\mathfrak{F}+\mathfrak{F}(S_1)}{2};$$

on aura respectivement

$$f(S_1)+f=0, \qquad \varphi(S_2)+\varphi=0,$$

de sorte que les deux intégrales

$$\int f(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

sont des intégrales *pseudo-elliptiques*. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient S_1, S_2, S_3 *les trois substitutions linéaires de période* 2, *qui permutent deux à deux les quatre racines de l'équation* $R(t) = 0$, *et* $\mathfrak{F}(t)$ *une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement*

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}(S_1) + \mathfrak{F}(S_2) + \mathfrak{F}(S_3) = 0;$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Le théorème s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des racines a, b, c, d comme infinie.

La somme

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}(S_1) + \mathfrak{F}(S_2) + \mathfrak{F}(S_3)$$

est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d; on pourra donc reconnaître si elle est nulle sans connaître les racines du polynôme sous le radical.

Exemples. — Soit

$$R(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2);$$

l'intégrale

$$\int f(t) \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

sera pseudo-elliptique, pourvu que l'on ait

$$f(t) + f(-t) + f\left(\frac{1}{kt}\right) + f\left(-\frac{1}{kt}\right) = 0.$$

Il en sera de même de l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

pourvu que l'on ait

$$f(x^2)+f\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right]+f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)+f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right)=0.$$

(*Voir* Hermite, *Journal de Liouville,* 1880; Raffy, *loc. cit.,* p. 71.)

4. L'analyse qui précède nous fait connaître une relation entre certaines intégrales pseudo-elliptiques et les substitutions linéaires qui permutent les racines de l'équation $R(t)=0$. Si les quantités a, b, c, d sont quelconques, il n'existe pas d'autres substitutions linéaires que les trois précédentes permutant ces quatre racines. Mais, pour certaines formes spéciales de $R(t)$, il existera d'autres substitutions de cette espèce. Il est naturel de se demander si l'on peut aussi rattacher à ces nouvelles substitutions des intégrales pseudo-elliptiques. C'est en effet ce qui a lieu.

On peut faire sur ces substitutions plusieurs hypothèses. Soient toujours a, b, c, d les racines de $R(t)=0$; il peut se faire qu'il existe une substitution linéaire ne changeant pas le point a et permutant les trois autres racines b, c, d circulairement. Cette substitution sera forcément de période 3, et on pourra l'écrire

$$S\left[\frac{t-a}{t-a_1};\ \alpha\frac{t-a}{t-a_1}\right],\quad \text{où}\quad \alpha=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Soit maintenant $F(t)$ *une fonction rationnelle de* t *jouissant de la propriété exprimée par l'équation*

$$F(S)=\alpha F;$$

l'intégrale

$$\int F(t)\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra s'exprimer en termes finis au moyen de symboles élémentaires.

Faisons d'abord la transformation

$$\frac{t-a}{t-a_1}=z;$$

la transformée de S par cette substitution est

$$S'[z;\ \alpha z].$$

La différentielle $\dfrac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z(Az^3+B)}},$$

puisque les trois racines différentes de zéro du nouveau polynôme sous le radical doivent se permuter circulairement par la substitution S′. La fonction rationnelle $F(t)$ se change en une fonction rationnelle de z vérifiant la relation

$$F_1(\alpha z) = \alpha F_1(z),$$

qui sera, par conséquent, de la forme

$$F_1(z) = z\,\varphi(z^3),$$

et la différentielle précédente devient

$$\frac{\varphi(z^3)z\,dz}{\sqrt{z(Az^3+B)}}.$$

Il suffit maintenant de poser $z^3 = x$ pour être ramené à une différentielle de la forme (1); d'où résulte le théorème énoncé plus haut.

On peut rattacher à ce cas de réduction une intégrale assez célèbre, étudiée par Legendre et Clausen, et tout récemment par M. S. Günther (*Bulletin*, t. X, p. 89). S'il existe une substitution linéaire de période 3 laissant fixe une des racines a, b, c, d et permutant les autres circulairement, on pourra toujours, par une substitution linéaire, ramener $R(t)$ à la forme

$$R(t) = t^3 - 1;$$

ce qui revient à supposer $a=\infty$, $b=1$, $c=\alpha$, $d=\alpha^2$. Il existe huit substitutions de période 3, qui permutent trois de ces racines et laissent fixe la quatrième; ce sont les quatre suivantes :

$$[t;\ \alpha t],\quad \left[\frac{t-1}{t+2};\ \alpha\frac{t-1}{t+2}\right],\quad \left[\frac{t-\alpha}{t+2\alpha};\ \alpha\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right],\quad \left[\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2};\ \alpha\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right],$$

et leurs répétitions. A ces quatre substitutions correspondent les quatre types d'intégrales pseudo-elliptiques

$$\int \varphi(t^3)\,\frac{dt}{t\sqrt{t^3-1}}, \qquad \int \varphi\left[\left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3\right]\frac{t-1}{t+2}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3\right]\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \qquad \int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3\right]\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

les substitutions propres à réduire ces intégrales sont respectivement

$$t^3 = x, \qquad \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3 = x, \qquad \left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3 = x, \qquad \left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3 = x.$$

La première s'offre immédiatement. Quant à la seconde, un calcul facile permet de vérifier qu'en posant

$$x = \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3$$

on a

$$\frac{1}{3}\,\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{t-1}{t+2}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

ce qui donne en même temps un résultat connu (Realis, *Mathesis*, t. II)

$$\int \frac{t-1}{t+2}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3}\,\text{arc tang}\,\frac{(t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

On trouve tout pareillement

$$\int \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha}\,\text{arc tang}\,\frac{(\alpha t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha^2}\,\text{arc tang}\,\frac{(\alpha^2 t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

Désignons par A, B, C trois constantes arbitraires; l'intégrale

$$\int \left(A\,\frac{t-1}{t+2} + B\,\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} + C\,\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

s'exprimera en termes finis au moyen de symboles élémentaires. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{\lambda(t^3-4) + \mu t^2 + \nu t}{t^3+8}\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

où

$$\lambda = A + B + C, \qquad \mu = -3(A + B\alpha^2 + C\alpha), \qquad \nu = 6(A + B\alpha + C\alpha^2);$$

λ, μ, ν sont, comme A, B, C, des coefficients arbitraires. Par conséquent les deux intégrales

$$\int \frac{t^3 - 4}{t^3 + 8} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}, \qquad \int \frac{t\,dt}{(t^3 + 8)\sqrt{t^3 - 1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques; la dernière est précisément l'intégrale de Legendre et de Clausen.

5. Les substitutions linéaires qui permutent les quatre quantités ∞, 1, α, α^2 forment un *groupe* de douze substitutions isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un tétraèdre régulier (*voir* Klein, *Mathematische Annalen,* Bd. XII). Ces substitutions sont les suivantes, abstraction faite de la substitution identique :

$$\left[t; \frac{t+2}{t-1}\right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t - 1}\right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha t - 1}\right],$$

$$[t; \alpha t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{t-\alpha^2}\right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha^2 t - \alpha^2}\right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha^2}\right],$$

$$[t; \alpha^2 t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha}\right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha^2 t - \alpha}\right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha t - \alpha}\right].$$

Les trois premières sont de période 2 et de multiplicateur -1 ; les quatre de la seconde ligne sont de période 3 et de multiplicateur α^2 ; les quatre dernières sont de période 3 et de multiplicateur α. Pour évaluer le multiplicateur d'une substitution de période 3, je la mets sous la forme normale

$$\left[\frac{t-a}{t-a_1}; \mu\frac{t-a}{t-a_1}\right],$$

a étant celui des points doubles de cette substitution, qui fait partie des quantités ∞, 1, α, α^2, et j'appelle μ le multiplicateur correspondant.

Soient S_i une des douze substitutions précédentes et μ_i le multiplicateur correspondant. Prenons *une fonction rationnelle* $F(t)$

satisfaisant aux deux relations.

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=12} \mathrm{F}(\mathrm{S}_i) = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=12} \frac{1}{\mu_i^2}\,\mathrm{F}(\mathrm{S}_i) = 0; \end{cases}$$

l'intégrale

$$\int \mathrm{F}(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Pour le démontrer, je pose

$$\mathrm{F}(t) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) = 4\varphi(t),$$

$$\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) = 4\varphi_1(t),$$

$$\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) = 4\varphi_2(t),$$

$$\mathrm{F}(t) + \mathrm{F}\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) = 4\varphi_3(t);$$

on en déduit

$$\mathrm{F}(t) = \varphi(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t).$$

Mais les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 vérifient respectivement les relations

$$\varphi_1\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + \varphi_1(t) = 0,$$

$$\varphi_2\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + \varphi_2(t) = 0,$$

$$\varphi_3\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) + \varphi_3(t) = 0,$$

de sorte que, d'après la proposition du n° 2, les trois intégrales

$$\int \varphi_1(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},\quad \int \varphi_2(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},\quad \int \varphi_3(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques. Nous avons encore à considérer l'intégrale

$$\int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

mais, en tenant compte des relations (6), on aura

$$\varphi(t)+\varphi(\alpha t)+\varphi(\alpha^2 t)=0,$$
$$\varphi(t)+\alpha^2\varphi(\alpha t)+\alpha\varphi(\alpha^2 t)=0,$$

de sorte que $\varphi(t)$ sera de la forme

$$\varphi(t)=t^2\psi(t^3),$$

et la différentielle considérée prend la forme

$$t^2\psi(t^3)\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

que l'on ramène immédiatement à la forme (1), en posant $t^3=x$.

6. On peut encore faire deux hypothèses sur les substitutions linéaires qui permutent les quatre racines a, b, c, d : 1° il peut se faire qu'une substitution, ayant pour points doubles deux de ces racines, permute les deux autres; 2° il peut arriver qu'il existe une substitution linéaire, permutant circulairement les quatre racines. Dans le premier cas, la différentielle

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra se ramener, par une substitution linéaire, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t(t^2+1)}},$$

et, dans le second cas, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

d'ailleurs on passe de la première à la seconde en changeant t en $\frac{1-t}{1+t}$. Il suffit donc de considérer la seconde forme. Il existe huit substitutions permutant les quatre quantités $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$,

$-\sqrt{-1}$; ce sont les suivantes :

$$[t;\, t],\quad [t;\, it],\quad [t;\, -t],\quad [t;\, -it],$$

$$\left[t;\, \frac{1}{t}\right],\quad \left[t;\, -\frac{1}{t}\right],\quad \left[t;\, \frac{i}{t}\right],\quad \left[t;\, -\frac{i}{t}\right];$$

elles forment un groupe isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un système de deux diamètres rectangulaires de la sphère. On peut faire correspondre à ces substitutions les types suivants d'intégrales réductibles :

$$\int t\,\varphi(t^2)\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}},\quad \int \left(t \mp \frac{i}{t}\right)\varphi\left(t \pm \frac{i}{t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

mais il est à remarquer que les substitutions de période 4 ne fournissent pas d'intégrales pseudo-elliptiques nouvelles.

7. Étant donné un polynôme $R(t)$ de degré supérieur au quatrième, n'ayant que des facteurs linéaires simples, il n'existe pas en général de substitution linéaire permutant les racines de l'équation $R(t) = 0$. S'il existe de pareilles substitutions, on peut leur faire correspondre des intégrales ultra-elliptiques de la forme

$$\int f\left[t, \sqrt{R(t)}\right] dt,$$

qu'il est possible de ramener, par une substitution algébrique, à des intégrales de genre inférieur. Sans entrer ici dans tous les détails, je rappellerai les deux exemples suivants, qui, du reste, sont bien connus. Si l'on a affaire à un polynôme du sixième degré dont les racines sont en involution, on sait qu'on peut, par une substitution linéaire, le ramener à la forme

$$R(u) = au^6 + bu^4 + cu^2 + d,$$

et les deux intégrales de première espèce et de second genre

$$\int \frac{du}{\sqrt{R(u)}},\quad \int \frac{u\,du}{\sqrt{R(u)}}$$

se ramènent par la substitution $u^2 = x$ à des intégrales elliptiques. C'est au fond le cas de réduction trouvé par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 8).

Comme autre exemple, prenons

$$R(t) = t(t^4 - 1);$$

les six quantités $0, \infty, \pm 1, \pm i$ sont permutées par un groupe de vingt-quatre substitutions linéaires, dérivé des deux substitutions

$$[t;\, it], \quad \left[t;\, \frac{1-t}{1+t}\right];$$

ce groupe est isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un octaèdre régulier. Les substitutions de période 2, qui permutent les racines deux à deux, sont au nombre de quatre :

$$\left[t;\, \frac{1-t}{1+t}\right], \quad \left[t;\, \frac{1+t}{1-t}\right], \quad \left[t:\, \frac{i}{t}\right], \quad \left[t;\, \frac{-i}{t}\right].$$

A chacune d'elles correspondent deux intégrales de première espèce, n'ayant que deux périodes distinctes,

$$\int \frac{(t \pm 1 \pm \sqrt{2})\,dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}, \quad \int \frac{\left(t \pm e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\right)dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}.$$

D'après un théorème dû à M. Poincaré, on en conclut qu'il y aura une infinité d'intégrales de la forme

$$\int \frac{(\alpha t + \beta)\,dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}},$$

n'ayant que deux périodes distinctes.