

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DEMARTRES

## Sur un point de la théorie des surfaces

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 129-133

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1887\\_\\_15\\_\\_129\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__129_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur un point de la théorie des surfaces; par M. DEMARTRES.*

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Dans une Communication précédente (19 janvier 1887), j'ai défini la flexion d'une ligne tracée sur une surface relativement à un plan donné. Je me propose d'établir ici diverses expressions de cet élément, qui, pour un choix particulier du plan de référence, se réduit, comme on le verra, à la torsion géodésique, introduite, par M. Bertrand, dans la théorie générale des surfaces.

Soient

MM' un élément de courbe tracée sur la surface;

Q, Q' les plans tangents correspondants;

$\theta, \theta + d\theta$  les angles qu'ils font avec le plan de référence fixe P;

$dV$  l'angle des deux plans Q et Q';

$d\varphi$  l'angle que font les traces des deux plans tangents sur le plan P;

$h, h + dh$  les distances de M et de M' au plan P.

La flexion de MM', par rapport à P, est, par définition,

$$(1) \quad f = \frac{dh}{d\varphi} \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Or, si nous appelons D la trace sur Q d'un plan parallèle à P et mené par M, on a d'abord

$$(2) \quad dh = MM' \sin \varepsilon \sin \theta,$$

$\varepsilon$  étant l'angle que  $\theta$  fait avec la direction D' de la tangente MM'; d'autre part, si  $\varepsilon_1$  est l'angle que fait avec D la tangente conjuguée de D', les trois plans P, Q, Q' forment un trièdre dans lequel

les deux faces  $d\varphi, \varepsilon_1$  sont opposées aux dièdres  $\widehat{Q, Q'}, \theta + d\theta$ ; on

aura donc

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{\widehat{QQ'}} = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \theta}.$$

Si l'on porte les valeurs (2) et (3) dans l'expression (1), on obtient la première expression de la flexion.

$$(4) \quad f = \frac{MM'}{\widehat{QQ'}} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1}.$$

La première conséquence à en tirer est la suivante :

*La flexion d'un élément MM' n'est pas altérée lorsque le plan de référence tourne d'un angle quelconque autour de sa trace sur le plan tangent en M.*

J'appellerai alors *flexion d'une direction D'*, par rapport à une direction D, celle d'un élément de courbe pris sur O' par rapport à n'importe quel plan parallèle à D, et je le désignerai, pour abrégé, par le symbole (OO').

Le rapport  $\frac{MM'}{\widehat{QQ'}}$  est susceptible de diverses expressions bien connues. M. Bertrand a donné la suivante :

$$\frac{\widehat{QQ'}}{MM'} = \sqrt{\frac{1}{R_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \varphi},$$

où  $\varphi$  est l'inclinaison de MM' sur la direction principale de courbure  $\frac{1}{R_1}$ . Substituons cette valeur dans la formule (4) et désignons par  $\omega$  l'inclinaison de D sur la même direction principale, nous aurons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega - \varphi, & \varepsilon_1 &= \omega - \varphi_1, \\ f &= \frac{\pm \sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - \varphi_1) \sqrt{\frac{1}{R_1^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \varphi}}, \\ \text{tang } \varphi_1 \text{ tang } \varphi &= -\frac{R_2}{R_1}. \end{aligned}$$

Éliminons  $\varphi$ , il vient

$$(5) \quad f = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\frac{\cos \omega \cos \varphi}{R_1} + \frac{\sin \omega \sin \varphi}{R_2}} = (DD'),$$

le signe ayant été déterminé de telle sorte que  $d\varphi$  soit positif lorsque la rotation s'effectue de la première direction principale vers la seconde.

On a d'autre part, d'après une formule due à M. Bonnet, en appelant  $\frac{1}{R}$  la courbure normale de  $MM'$ ,

$$\frac{MM'}{\widehat{QQ'}} = R' \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon);$$

d'où cette autre expression

$$(6) \quad (D, D') = \frac{R' \sin \varepsilon \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\sin \varepsilon_1}.$$

On peut enfin obtenir une expression où figurent les courbures normales  $\frac{1}{R}$ ,  $\frac{1}{R'}$  relatives aux distances  $D$  et  $D'$ . Si l'on développe l'équation (5) et qu'on y remplace  $\cos \omega$ ,  $\sin \omega$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  par les quantités proportionnelles  $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}}$ , on obtient, après une réduction très simple,

$$(7) \quad (DD') = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R'} \sqrt{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right)} + \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'}\right)}}.$$

2. Les expressions (4), (5), (6), (7) sont également propres à mettre en évidence un certain nombre de propositions immédiates. Nous les déduirons de la formule (5).

On voit d'abord que, si l'on échange  $\omega$  et  $\varphi$ , l'expression trouvée change seulement de signe, en d'autres termes  $(DD') + (D'D) = 0$ .  
Donc :

**THÉORÈME I.** — *La flexion de  $D'$  par rapport à  $D$  est égale et de signe contraire à celle de  $D$  par rapport à  $D'$ .*

Il suit de là que toute propriété des flexions entraîne une propriété corrélatrice.

Si l'on fait  $\varphi = 0$ , on obtient  $f = R_1 \tan \omega$ ; de même, pour  $\omega = 0$ ,  $f = -R_1 \tan \varphi$ ; de là un double théorème que je me dispenserai d'énoncer.

L'équation (5), sous la forme

$$(8) \quad \frac{f}{R_2} \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \omega + \frac{f}{R_1} = 0,$$

donne lieu au théorème suivant :

**THÉORÈME II.** — *A chaque direction (D) en correspond une autre D' bien déterminée, telle que (DD') ait une valeur donnée f; cette flexion restant constante, les droites D et D' engendrent deux faisceaux homographiques ayant pour rayons doubles les asymptotes de l'indicatrice au point M.*

Si l'on désigne par  $f, f_1$  les flexions de D' par rapport à deux directions D, D<sub>1</sub> perpendiculaires entre elles, on obtient immédiatement la relation

$$ff_1 + (f + f_1)(R_1 - R_2) \sin \omega \cos \omega + R_1 R_2 = 0.$$

De même, l'équation

$$ff_1 + (f + f_1)(R_2 - R_1) \sin \varphi \cos \varphi + R_1 R_2 = 0$$

aura lieu entre les deux directions  $\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi$  par rapport à une même direction D.

Supposons  $\operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} \varphi = -1$  : l'équation (8) devient

$$-\frac{f}{R_2} + \frac{f}{R_1} = -\cot \varphi - \operatorname{tang} \varphi = \frac{-1}{\sin \varphi \cos \varphi};$$

$$f = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi;$$

on reconnaît l'expression de la torsion géodésique de la direction MM'; donc :

**THÉORÈME III.** — *Lorsque deux directions sont rectangulaires, la flexion de l'une par rapport à l'autre a pour valeur absolue la torsion géodésique correspondante.*

Notre égalité générale (DD') = -(D'D) se réduit ici à la proposition de M. Bertrand sur les torsions géodésiques de deux éléments rectangulaires; on peut la considérer comme une généralisation de la proposition en question.

Revenons à la formule (5); donnons à  $\varphi$  deux valeurs  $\varphi, \varphi_1$  cor-

respondant à deux diamètres conjugués, c'est-à-dire liés par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi_1 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

On aura, en désignant par  $f, f_1$  les flexions correspondantes, la relation suivante, indépendante de  $\omega$ ,

$$ff_1 + RR_1 = 0.$$

On trouve ainsi, par une voie géométrique, l'égalité qui a fait l'objet de la Note citée plus haut; mais on peut maintenant l'énoncer de deux manières, qui correspondent à des théorèmes parfaitement distincts, et dont chacun donne une expression très générale de la courbure totale, savoir :

**THÉORÈME IV.** — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions de deux déplacements conjugués, le plan de référence étant le même et d'ailleurs quelconque.*

**THÉORÈME V.** — *La courbure totale est égale et de signe contraire au produit des flexions d'un même déplacement par rapport à deux plans quelconques coupant le plan tangent suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice.*

---