BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur une source d'identités

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 133-143
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__133_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur une source d'identités; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Nous avons rencontré et utilisé la formule dont il va être question ici, dans un Mémoire étendu *Sur une classe de nombres remarquables,* qui va paraître prochainement dans un autre Recueil (1). Les nombres que nous avons étudiés dans ce Mémoire, et dont le rôle est important en Analyse, jouissent, entre autres, de certaines propriétés qui dérivent de l'identité générale dont nous allons parler. Nous renverrons donc à ce Mémoire, pour cette ap-

(1) *American Journal of Mathematics.*

plication particulière. Parmi les exemples que nous donnerons ici, quelques-uns se trouvent cités dans ce Mémoire; les autres, plus nombreux, et notamment l'application trigonométrique et l'application à la série de Fibonacci, sont nouveaux.

2. *Identité générale.* — Représentant par $f(n)$ une fonction quelconque de l'entier n, posons

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= f(1) + f(2) + \ldots + f(n),\\
f_2(n) &= f_1(1) + f_1(2) + \ldots + f_1(n),\\
f_3(n) &= f_2(1) + f_2(2) + \ldots + f_2(n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_k(n) &= f_{k-1}(1) + f_{k-1}(2) + \ldots + f_{k-1}(n).
\end{aligned}$$

Il est bien facile de calculer $f_k(n)$ en fonction de $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. On a, en effet,

$$f_2(n) = n f(1) + (n-1) f(2) + \ldots + f(n),$$

$$f_3(n) = \frac{(n+1)n}{2} f(1) + \frac{n(n-1)}{2} f(2) + \ldots + \frac{2.1}{2} f(n).$$

Dès maintenant, la loi des coefficients est évidente. On vérifie d'ailleurs que, si elle est vraie pour l'indice k, elle l'est encore pour l'indice $k+1$. On trouve ainsi

$$(1) \qquad f_{k+1}(n) = C_{n+k-1}^{k} f(1) + C_{n+k-2}^{k} f(2) + \ldots + C_k^k f(n),$$

C_μ^ν étant le nombre des combinaisons de μ objets ν à ν.

Telle est la formule générale, presque intuitive, on le voit, que nous avions en vue. Chaque fois que, pour une fonction $f(n)$, on pourra, par un autre procédé, calculer $f_{k+1}(n)$, la formule (1) donnera une identité; elle est donc bien, selon l'expression élégante de M. Cesaro [1], une *source d'identités*. Donnons-en quelques applications.

3. En premier lieu, faisons

$$f(n) = n = C_n^1.$$

---

[1] *Mathesis*, t. VI, p. 136.

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= C_1^1 + C_2^1 + \ldots + C_n^1 = C_{n+1}^2,\\
f_2(n) &= C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_{k+1}(n) &= C_{k+1}^{k+1} + C_{k+2}^{k+1} + \ldots + C_{n+k}^{k+1} = C_{n+k+1}^{k+2}.
\end{aligned}
$$

La formule (1) donne donc, dans ce cas,

$$
C_{n+k+1}^{k+2} = C_{n+k-1}^{k} + 2\,C_{n+k-2}^{k} + \ldots + n\,C_k^k. \tag{2}
$$

4. Faisons maintenant

$$
f(n) = a^{n-1}.
$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
(a-1)f_1(n) &= a^n - 1,\\
(a-1)f_1(n-1) &= a^{n-1} - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(a-1)f_1(1) &= a - 1,
\end{aligned}
$$

et, en faisant la somme,

$$
(a-1)f_2(n) = a\,\frac{a^n-1}{a-1} - n;
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(a-1)^2 f_2(n) &= a^{n+1} - a - n(a-1),\\
(a-1)^2 f_2(n-1) &= a^n - a - (n-1)(a-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(a-1)^2 f_2(1) &= a^2 - a - (a-1),
\end{aligned}
$$

et, en faisant la somme,

$$
(a-1)^2 f_3(n) = a^2\,\frac{a^n-1}{a-1} - na - \frac{(n+1)n}{1.2}(a-1)
$$

ou

$$
(a-1)^3 f_3(n) = a^{n+2} - a^2 - C_n^1\,a(a-1) - C_{n+1}^2(a-1)^2.
$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on arrive à la formule que voici :

$$
\begin{aligned}
(a-1)^{k+1} f_{k+1}(n) = {}& a^{n+k} - a^k - C_n^1\,a^{k-1}(a-1)\\
& - C_{n+1}^2\,a^{k-2}(a-1)^2 - \ldots - C_{n+k-1}^k(a-1)^k.
\end{aligned}
$$

Par suite, la formule (1) donne, dans ce cas,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(a-1)^{k+1}(C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^k\,a + \ldots + C_k^k\,a^{n-1})\\
&\quad = a^{n+k} - [a^k + C_n^1\,a^{k-1}(a-1) + C_{n+1}^2\,a^{k-2}(a-1)^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k(a-1)^k].
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

Pour $a = 2$, cette formule devient

$$(3')\quad \begin{cases} C_{n+k-1}^{k} + C_{n+k-2}^{k}\,2 + \ldots + C_{k}^{k}\,2^{n-1} \\ \quad = 2^{n+k} - (2^{k} + C_{n}^{1}\,2^{k-1} + C_{n+1}^{2}\,2^{k-2} + \ldots + C_{n+k-1}^{k}). \end{cases}$$

Pour $a = -1$,

$$(3'')\quad \begin{cases} 2^{k+1}[C_{n+k-1}^{k} - C_{n+k-2}^{k} + \ldots + (-1)^{n-1}C_{k}^{k}] \\ \quad = (-1)^{n-1} + 1 + C_{n}^{1}\,2 + C_{n+1}^{2}\,2^{2} + \ldots + C_{n+k-1}^{k}\,2^{k}. \end{cases}$$

5. Faisons (1)

$$f(n) = n^2.$$

On a identiquement

$$n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} = C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(n) &= C_n^2 + C_{n+1}^2, \\ f(n-1) &= C_{n-1}^2 + C_n^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(2) &= C_2^2 + C_3^2, \\ f(1) &= \phantom{C_2^2 + {}} C_2^2, \end{aligned}$$

et, en faisant la somme,

$$f_1(n) = C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3.$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on trouve

$$f_{k+1}(n) = C_{n+k+1}^{k+3} + C_{n+k+2}^{k+3};$$

et la formule (1) donne

$$(4)\qquad C_{n+k-1}^{k}\,1^2 + C_{n+k-1}^{k}\,2^2 + \ldots + C_{k}^{k}\,n^2 = C_{n+k+1}^{k+3} + C_{n+k+2}^{k+3}.$$

6. Pour

$$f(n) = 2n - 1,$$

on a

$$f_1(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Donc la fonction f_{k+1}, correspondant à ce cas-ci, n'est autre que la fonction f_k du numéro précédent, et l'application de la for-

(1) C'est le cas général $f(n) = n^m$ que nous avons traité et utilisé dans notre Mémoire *Sur une classe de nombres remarquables*.

mule (1) donne

$$(5)\quad C^k_{n+k-1} + 3\,C^k_{n+k-2} + 5\,C^k_{n+k-3} + \ldots + (2n-1)C^k_k = C^{k+2}_{n+k} + C^{k+2}_{n+k+1}.$$

7. Prenons maintenant

$$f(n) = (-1)^{n-1}(2n-1).$$

Nous ferons ici usage d'une formule qui se trouve démontrée dans une autre de nos Notes [1], et que voici :

$$(\alpha)\quad \sum_{i=0}^{i=n}(a+ir)q^i = a\,\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + rq\,\frac{q^n[n(q-1)-1]+1}{(q-1)^2}.$$

La valeur de $f(n)$ peut s'écrire

$$f(n) = (-1)^{n-1}[1+2(n-1)].$$

On aura donc

$$f_1(n) = \sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i(1+2i)$$

ou, en vertu de la formule (α), toute réduction faite,

$$f_1(n) = (-1)^{n-1}\,n.$$

Maintenant on a

$$f_2(n) = \sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i(1+i)$$

ou, d'après la formule (α),

$$f_2(n) = \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)+1}{4}$$

que nous écrirons

$$4f_2(n) = -(-1)^n(2n+1)+1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 4f_3(n) &= -\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^i(2i+1)+n \\ &= -\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i(2i+1)+n+1 \\ &= -(-1)^n(n+1)+(n+1), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

---

[1] *Sur certaines sommations arithmétiques* (*Jornal de Sc. math.* de M. Gomes Teixeira, t. VII, p. 117). La formule en question se trouve à la page 125.

On trouve d'une manière générale

$$4^{2p} f_{4p}(n) = (-1)^{n+2p-1}(2n+4p-1) - \sum_{i=0}^{i=2p-1} (-1)^i 4^i C^{2i}_{n+2p-1+}$$

$$4^{2p} f_{4p+1}(n) = (-1)^{n+2p-1}(\ n+2p) - \sum_{i=0}^{i=2p-1} (-1)^i 4^i C^{2i+1}_{n+2p+i}$$

$$4^{2p+1} f_{4p+2}(n) = (-1)^{n+2p-1}(2n+4p+1 + \sum_{i=0}^{i=2p} (-1)^i 4^i C^{2i}_{n+2p+i}$$

$$4^{2p+1} f_{4p+3}(n) = (-1)^{n+2p-1}(\ n+2p+1) + \sum_{i=0}^{i=2p} (-1)^i 4^i C^{2i+1}_{n+2p+1+i}.$$

Ces quatre formules peuvent être comprises en une seule. Si, en effet, nous représentons par $\mathrm{E}\left(\frac{k}{p}\right)$ le plus grand entier contenu dans $\frac{k}{p}$, et par $\mathrm{R}\left(\frac{k}{p}\right)$ le reste de la division de k par p, de façon que

$$k = p\,\mathrm{E}\left(\frac{k}{p}\right) + \mathrm{R}\left(\frac{k}{p}\right),$$

nous ferons observer que ces quatre formules se résument en celle-ci

$$4^{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)} f_k(n) = \frac{(-1)^{n+2\mathrm{E}\left(\frac{k}{4}\right)-1}}{1+\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)}(2n+k-1)$$
$$+ (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)-1} (-1)^{\mathrm{R}\left(\frac{k}{4}\right)+i} 4^i C^{\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)+2i}_{n+\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)-1+i}$$

On a donc, par application de la formule (1),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & 4^{\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)}\left[C^{k-1}_{n+k-2} - 3C^{k-1}_{n+k-3} + 5C^{k-1}_{n+k-4} - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)C^{k-1}_{k-1}\right] \\ & = \frac{(-1)^{n+2\mathrm{E}\left(\frac{k}{4}\right)-1}}{1+\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)}(2n+k-1) \\ & \quad + (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)-1} (-1)^{\mathrm{R}\left(\frac{k}{4}\right)+i} 4^i C^{\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)+2i}_{n+\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{k}{2}\right)-1+i} \end{aligned}\right.$$

Pour $k = 1$, cette formule donne

$$(6_1)\qquad 1 - 3 + 5 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1) = (-1)^{n-1}n;$$

pour $k = 2$,

$$(6_2)\qquad \left\{\begin{aligned} &4[C_n^1 - 3C_{n-1}^1 + 5C_{n-2}^1 - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1}(2n-1)C_1^1] = (-1)^{n-1}(2n+1) + 1;\end{aligned}\right.$$

pour $k = 3$,

$$(6_3)\qquad \left\{\begin{aligned} &4[C_{n+1}^2 - 3C_n^2 + 5C_{n-1}^2 - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1}(2n-1)C_2^2] = (-1)^{n-1}(n+1) + C_{n+1}^1.\end{aligned}\right.$$

On voit que cette dernière somme est nulle si n est pair. Pour $k = 4$,

$$(6_4)\qquad \left\{\begin{aligned} &16[C_{n+2}^3 - 3C_{n+1}^3 + 5C_n^3 - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1}(2n-1)C_3^3] = (-1)^{n+1}(2n+3) - 1 + 4C_{n+2}^2.\end{aligned}\right.$$

Ces expressions particulières sont séparément susceptibles de simplification. Prenons, par exemple, la dernière; on vérifie bien aisément que, quel que soit n, pair ou impair, on a

$$(-1)^{n+1}(2n+3) - 1 - 4C_{n+2}^2 = 8E\left(\frac{n}{2}\right)\left[E\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right].$$

Dès lors la formule (6_4) pourra s'écrire

$$(6_5)\qquad \left\{\begin{aligned} &C_{n+2}^3 - 3C_{n+1}^3 + 5C_n^3 - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1}(2n-1)C_3^3 = \frac{E\left(\frac{n}{2}\right)\left[E\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right]}{2} = C^2_{E\left(\frac{n}{2}\right)+1}\end{aligned}\right.$$

Ne quittons pas la fonction $f(n) = (-1)^{n-1}(2n-1)$ sans faire à son égard une autre remarque. L'expression ci-dessus calculée pour $f_2(n)$ montre que

$$4f_2(n) \qquad + f(n+1) = 1;$$

de même

$$\begin{aligned} 4f_2(n-1) + f(n) \qquad &= 1, \\ 4f_2(n-2) + f(n-1) &= 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ 4f_2(1) \qquad + f(2) \qquad &= 1, \\ f(1) \qquad &= 1, \end{aligned}$$

Additionnant ces $n+1$ égalités, on a

$$4f_3(n) + f_1(n+1) = C_{n+1}^1.$$

Le même calcul, continué de proche en proche, conduit à ce résultat

$$4 f_{k+1}(n) + f_{k-1}(n+1) = C_{n+k-1}^{k-1},$$

et, par application de la formule (1),

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} 4[C_{n+k-1}^{k} - 3C_{n+k-2}^{k} + \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)C_{k}^{k}] \\ +[C_{n+k-2}^{k-2} - 3C_{n+k-3}^{k-2} + \ldots + (-1)^{n}(2n+1)C_{k-2}^{k-2}] \end{array} \right\} = C_{n+k-1}^{k-1}.$$

8. Faisons maintenant

$$f(n) = \sin n\omega.$$

En vertu d'une formule bien connue, on a

$$f_1(n) = \sin\omega + \sin 2\omega + \ldots + \sin n\omega = \frac{\cos\frac{\omega}{2} - \cos\left(\frac{\omega}{2} + n\omega\right)}{2\sin\frac{\omega}{2}}$$

ou

$$2\sin\frac{\omega}{2} f_1(n) - \cos\frac{\omega}{2} = -\cos\left(\frac{\omega}{2} + n\omega\right).$$

Remplaçant dans cette formule n par 1, 2, 3, ..., n et faisant la somme, en appliquant, pour avoir la valeur du second membre, la formule de la somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique, on a

$$2\sin\frac{\omega}{2} f_2(n) - C_n^1 \cos\frac{\omega}{2} = -\frac{\sin(n+1)\omega - \sin\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}}$$

ou

$$\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 f_2(n) - C_n^1 \cos\frac{\omega}{2}\, 2\sin\frac{\omega}{2} - \sin\omega = -\sin\left(2\frac{\omega}{2} + n\omega\right).$$

On obtient de même, de proche en proche,

$$\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^3 f_3(n) - C_{n+1}^2 \cos\frac{\omega}{2}\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^2$$
$$- C_n^1 \sin\omega\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right) + \cos\frac{3\omega}{2} = \cos\left(3\frac{\omega}{2} + n\omega\right)$$

....,

$$\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{k+1} f_{k+1}(n)$$
$$-\sum_{i=0}^{i=k} (-1)^i C_{n+k-1-i}^{k-i} \cos\left[\frac{i\pi}{2} + \frac{(i+1)\omega}{2}\right]\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{k-i}$$
$$= \cos\left[(k+2)\frac{\pi}{2} - (k+1)\frac{\omega}{2} - n\omega\right].$$

La formule (1) donne alors

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{k+1}\sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^{k}\sin\omega\\
&-\sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i C_{n+k-1-i}^{k-i}\cos\left[\frac{i\pi}{2}+\frac{(i-1)\omega}{2}\right]\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{k-i}\\
&=\cos\left[(k+2)\frac{\pi}{2}-(k+1)\frac{\omega}{2}-n\omega\right].
\end{aligned}
\right.
$$

9. Faisons enfin

$$f(n) = u_n,$$

u_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série de Fibonacci,

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

En vertu d'une formule démontrée de différentes façons par M. Ed. Lucas (1) et par nous-même (2), on a

$$f_1(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= u_{n+2} - 1,\\
f_1(n+1) &= u_{n+1} - 1,\\
\ldots&\ldots\ldots,\\
f_1(1) &= u_3 - 1,
\end{aligned}
$$

et, en faisant la somme,

$$
\begin{aligned}
f_2(n) &= f_1(n+2) - f_1(2) - n\\
&= u_{n+4} - 1 - u_4 + 1 - n\\
&= u_{n+4} - u_4 - nu_2.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
f_2(n) &= u_{n+4} - u_4 - nu_2,\\
f_2(n-1) &= n_{n+3} - u_4 - (n-1)u_2,\\
\ldots&\ldots\ldots,\\
f_2(1) &= u_5 - u_4 - u_2,
\end{aligned}
$$

---

(1) *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, p. 20 (Extrait des t. III et IV de la *Nouvelle Correspondance mathématique*).

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIV, p. 24, formule (4) du Mémoire *Sur une suite récurrente*.

et, en additionnant,

$$\begin{aligned} f_3(n) &= f(n+4) - f(4) - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2 \\ &= u_{n+6} - 1 - u_6 + 1 - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2 \\ &= u_{n+6} - u_6 - C_n^1 u_4 - C_{n+1}^2 u_2. \end{aligned}$$

Continuant ainsi, de proche en proche, on arrive à cette formule

$$f_{k+1}(n) = u_{n+2(k+1)} - u_{2(k+1)} - C_n^1 u_{2k} - C_{n+1}^2 u_{2(k-1)} - \ldots - C_{n+k-1}^k u_2.$$

La formule (1) donne donc alors

$$\begin{aligned} & u_{n+2(k+1)} - u_{2(k+1)} - C_n^1 u_{2k} - C_{n+1}^2 u_{2(k-1)} - \ldots - C_{n+k-1}^k u_2 \\ &= C_{n+k-1}^k u_1 + C_{n+k-2}^k u_2 + \ldots + C_k^k u_n \end{aligned}$$

ou

$$(9) \qquad u_{n+2(k+1)} = \sum_{i=0}^{i=k} C_{n+i-1}^i u_{2(k+1-i)} + \sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^k u_i.$$

La formule qui donne $f_2(n)$, obtenue plus haut, peut s'écrire

$$f_2(n) = f_1(n+1) + u_{n+2} - (n+2),$$

donc

$$\begin{aligned} f_2(n-1) &= f_1(n) + u_{n+1} - (n+1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_2(1) &= f_1(2) + u_3 - 3, \end{aligned}$$

en outre

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(1) + u_2 - 2, \\ 0 &= u_1 - 1. \end{aligned}$$

Faisant la somme,

$$f_3(n) = f_2(n+1) + f_1(n+2) - C_{n+3}^2.$$

Continuant, de proche en proche, on arrive à

$$C_{n+k-1}^k = f_{k-1}(n+2) + f_k(n+1) - f_{k+1}(n);$$

et la formule (1) donne

$$C_{n+k+1}^k = \sum_{i=1}^{i=n+2} C_{n+k-i}^{k-2} u_i + \sum_{i=1}^{i=n+1} C_{n+k-i}^{k-1} u_i - \sum_{i=1}^{i=n} C_{n+k-i}^k u_i$$

ou, en remarquant que

$$C^{k-2}_{n+k-i} + C^{k-1}_{n+k-i} = C^{k-1}_{n+k+1-i}; \qquad \text{et que } C^{\nu}_{\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu > \mu,$$

$$(10) \qquad C^{k}_{n+k+1} = \sum_{i=1}^{i=n+2} (C^{k-1}_{n+k+1-i} - C^{k}_{n+k-i})\, u_i.$$

Les quelques exemples qui précèdent, joints à ceux que contient notre Mémoire cité en commençant, suffiront sans doute à faire ressortir la fécondité de la source d'identités (1) qui conduit, on le voit, à d'intéressants exercices de calcul algébrique.