BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Théorème sur les formes quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 188-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__188_1>

Théorème sur les formes quadratiques;
par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 1er juin 1887.)

1. Nous considérons, dans le présent travail, une forme quadratique à n variables; nous snpposons que cette forme soit la somme des carrés de p formes linéaires, indépendantes, des mêmes variables; et nous nous proposons de démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on considère, d'une part, le système des n équations linéaires et homogènes à n inconnues qu'on obtient en égalant à zéro les n dérivées partielles de la forme quadra-*

tique considérée, de l'autre le système des p équations linéaires et homogènes à n inconnues qu'on obtient en égalant à zéro les p formes linéaires indépendantes considérées, ces deux systèmes d'équations sont équivalents, c'est-à-dire admettent exactement les mêmes solutions.

2. Pour faciliter la démonstration de ce théorème, supposons, par exemple, n égal à 5, et p à 3. Si nous désignons par F la forme quadratique, par u, v, x, y, z les cinq variables, et par A, B, C les trois formes linéaires indépendantes considérées, nous avons identiquement

$$F = A^2 + B^2 + C^2,$$

et nos deux systèmes d'équations linéaires et homogènes, à cinq inconnues chacun, sont

$$(1)\qquad \begin{cases} F'_u = 0, \\ F'_v = 0, \\ F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F'_z = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

De plus, si nous posons

$$\begin{aligned} A &= a_1 u + a_2 v + a_3 x + a_4 y + a_5 z, \\ B &= b_1 u + b_2 v + b_3 x + b_4 y + b_5 z, \\ C &= c_1 u + c_2 v + c_3 x + c_4 y + c_5 z, \end{aligned}$$

nous avons immédiatement les cinq identités

$$(\lambda)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}F'_u = a_1 A + b_1 B + c_1 C, \\ \frac{1}{2}F'_v = a_2 A + b_2 B + c_2 C, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{2}F'_z = a_5 A + b_5 B + c_5 C. \end{cases}$$

3. Cela posé, nous démontrerons l'équivalence des systèmes (1) et (2), en prouvant que toute solution du système (2) satisfait au système (1), et réciproquement.

En premier lieu, toute solution du système (2) satisfait au système (1), car les valeurs des inconnues qui constituent cette solution, annulant par hypothèse A, B, C, annulent aussi les seconds membres, et par conséquent les premiers, des cinq identités (λ).

Réciproquement, toute solution du système (1) est une solution du système (2).

En effet, les valeurs des inconnues qui constituent cette solution du système (1), annulant les premiers membres des cinq identités (λ), annulent aussi les seconds, de telle sorte que, si l'on désigne par A_0, B_0, C_0 les valeurs que prennent A, B, C pour ces valeurs des cinq inconnues, ces trois valeurs A_0, B_0, C_0 constituent une solution du système des cinq équations linéaires et homogènes à trois inconnues

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 A + b_1 B + c_1 C = 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 B = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_5 A + b_5 B + c_5 C = 0. \end{array}\right.$$

Or, les trois formes linéaires A, B, C étant indépendantes, dans le tableau

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5, \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5, \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array}$$

des coefficients de leurs variables, le déterminant principal du troisième ordre; et, dans le tableau

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1, \\ a_2 & b_2 & c_2, \\ a_3 & b_3 & c_3, \\ a_4 & b_4 & c_4, \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{array}$$

des coefficients des inconnues du système (3), le déterminant principal est aussi du troisième ordre, puisque ce nouveau tableau ne diffère du précédent que par l'orientation.

Donc, dans le système (3), le déterminant principal des coefficients des inconnues est d'un ordre juste égal au nombre de ces inconnues; donc ce système d'équations linéaires et homogènes n'admet qu'une solution unique, composée d'éléments tous nuls; donc on a

$$A_0 = 0,$$
$$B_0 = 0,$$
$$C_0 = 0,$$

ce qui nous prouve bien que toute solution du système (1) est une solution du système (2).

Ainsi, les systèmes (1) et (2) ont exactement les mêmes solutions, c'est-à-dire sont équivalents.

4. On peut, de ce théorème, tirer de nombreux corollaires. Nous en citerons seulement deux : les deux qui nous paraissent les plus importants.

5. Corollaire I. — *Le déterminant principal des dérivées d'une forme quadratique est d'un ordre égal au nombre des carrés indépendants à la somme desquels on peut réduire cette forme.*

En effet, les systèmes (1) et (2) étant équivalents, leur degré d'indétermination est le même. Nous savons, de plus, que ce degré est égal, pour chaque système, à l'excès du nombre des inconnues sur l'ordre du déterminant principal. Comme le nombre des inconnues est le même dans les deux systèmes, l'ordre est le même aussi ; et comme, finalement, dans le système (2), l'ordre du déterminant principal est égal au nombre des carrés indépendants, notre premier corollaire se trouve démontré.

6. Corollaire II. — *Pour qu'une forme quadratique* F *se réduise à la somme des carrés de p formes linéaires indépendantes, il faut et il suffit que, dans les dérivées partielles de* F, *le déterminant principal soit d'un ordre égal à p.*

D'abord, cette condition est nécessaire, car, si la forme F est la somme de p carrés indépendants, d'après le corollaire précédent le déterminant principal est d'un ordre égal à p.

Cette condition, d'ailleurs, est suffisante. Supposons, en effet, que le déterminant principal des dérivées soit d'un ordre égal à p.

Si la forme quadratique considérée peut se réduire à une somme de carrés indépendants, le nombre de ces carrés, d'après le corollaire précédent, ne peut être que p. Or cette réduction, on le sait, est toujours possible. Donc la condition énoncée est suffisante, et notre second corollaire se trouve démontré.

7. Le théorème et les corollaires qui précèdent ont été présentés, pour la première fois, à la Société philomathique de Paris, dans sa séance du 12 mars 1887. Nous ne prétendons point qu'ils ajoutent rien d'essentiel à la théorie des formes quadratiques; mais nous nous estimerions très heureux si l'on jugeait qu'ils peuvent être introduits dans l'exposition de cette théorie, et y apporter quelque abréviation ou simplification.