H. POINCARÉ

Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 203-216
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__203_0>

Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie;
par M. H. Poincaré.

(Séance du 2 novembre 1887.)

C'est surtout en logique que rien ne se tire de rien; dans toute démonstration, la conclusion suppose des prémisses. Les sciences mathématiques doivent donc reposer sur un certain nombre de propositions indémontrables. On peut discuter si l'on doit donner à ces propositions le nom d'*axiomes,* d'*hypothèses* ou de *postulat,* si l'on doit les considérer comme des faits expérimentaux, ou comme des jugements analytiques, ou encore comme des jugements synthétiques *a priori;* mais leur existence même n'est pas douteuse.

Nous sommes donc conduits à nous poser le problème suivant, intéressant au point de vue logique : quelles sont les prémisses de la Géométrie, les propositions indémontrables sur lesquelles repose cette science, en excluant, bien entendu, les propositions qui sont déjà nécessaires pour fonder l'Analyse? car nous regardons les résultats de l'Algèbre et de l'Analyse pure comme déjà connus au moment où l'on aborde l'étude de la Géométrie. Bien que ce problème ait depuis longtemps préoccupé les géomètres, la question ne saurait être regardée comme épuisée.

On a établi que le *postulatum* d'Euclide est indémontrable. Mais ce postulat ne peut être la proposition unique sur laquelle repose toute la Géométrie; car bien des résultats peuvent être démontrés sans lui.

On ne saurait se contenter non plus des propositions énoncées, sous le nom d'*axiomes,* au début des Traités de Géométrie. Si on les soumet à un examen sérieux, on reconnaîtra qu'aucun de ces axiomes ne doit prendre rang parmi les prémisses de la Géométrie. Les uns sont des propositions déjà nécessaires pour fonder l'Analyse, et, si ce sont des hypothèses (ce que l'on peut contester), ce ne sont certainement pas des hypothèses propres à la Géométrie; tel est, par exemple, l'axiome suivant : *Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.* D'autres axiomes ne sont que des définitions; d'autres enfin ne peuvent être regardés comme indémontrables, tel est, par exemple, le suivant : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

Mais, en dehors des axiomes explicitement énoncés, il y a un grand nombre d'hypothèses que l'on fait implicitement au début de la démonstration des différents théorèmes.

Mais ces hypothèses échappent généralement au lecteur, à moins qu'il ne soit particulièrement attentif; car, bien qu'elles ne soient pas évidentes, au point de vue de la pure logique, elles nous semblent telles par suite d'habitudes invétérées de nos sens et de notre esprit.

D'ailleurs ces hypothèses explicites ou implicites ne sont pas toutes indépendantes les unes des autres; on pourrait se contenter d'en introduire un moins grand nombre et les autres s'en déduiraient comme des conséquences.

Nous sommes donc amenés à poser le problème en ces termes : énoncer toutes les hypothèses nécessaires et n'énoncer que celles-là. Je crois que ce problème n'est pas encore résolu et je cherche à contribuer à sa solution.

Nous n'envisageons d'abord que la géométrie à deux dimensions, ou géométrie plane.

Géométries quadratiques.

Nous connaissons déjà trois géométries à deux dimensions :

1° La géométrie euclidienne, où la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits;

2° La géométrie de Riemann, où cette somme est plus grande que deux droits;

3° La géométrie de Lobatchevski, où elle est plus petite que deux droits.

Ces trois géométries reposent sur les mêmes hypothèses fondamentales, si l'on excepte le *postulatum* d'Euclide que la première admet et que les deux autres rejettent. De plus, le principe, d'après lequel deux points déterminent complètement une droite, comporte une exception dans la géométrie de Riemann et n'en comporte aucune dans les deux autres.

Quand on se borne à deux dimensions, la géométrie de Riemann est susceptible d'une interprétation très simple ; elle ne diffère pas, comme on le sait, de la géométrie sphérique, pourvu que l'on convienne de donner le nom de *droites* aux grands cercles de la sphère.

Je vais commencer par généraliser cette interprétation de façon à pouvoir l'étendre à la géométrie de Lobatchevski.

Considérons une surface du second ordre quelconque. Nous conviendrons de donner le nom de *droites* aux sections planes diamétrales de cette surface et le nom de *circonférences* aux sections planes non diamétrales.

Il reste à définir ce que l'on doit entendre par l'angle de deux droites qui se coupent ou par la longueur d'un segment de droite.

Par un point pris sur la surface faisons passer deux sections planes diamétrales (que nous sommes convenus d'appeler *droites*). Envisageons alors les tangentes à ces deux sections planes et les deux génératrices rectilignes de la surface qui passent par le point envisagé. Ces quatre droites (au sens ordinaire du mot) ont un certain rapport anharmonique. L'angle que nous cherchons à définir sera alors le logarithme de ce rapport anharmonique si les deux génératrices sont réelles, c'est-à-dire si la surface est un hyperboloïde à une nappe ; dans le cas contraire, notre angle sera ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$.

Considérons un arc de conique faisant partie d'une section plane diamétrale (c'est ce que nous sommes convenus d'appeler un *segment de droite*). Les deux extrémités de l'arc et les deux points à l'infini de la conique ont un certain rapport anharmonique comme tout système de quatre points situés sur une conique. Nous conviendrons alors d'appeler *longueur du segment* considéré le logarithme de ce rapport si la conique est une hyperbole et ce même logarithme divisé par $\sqrt{-1}$ si la conique est une ellipse.

Il y aura, entre les angles et les longueurs ainsi définis, un certain nombre de relations, qui constitueront un ensemble de théorèmes analogues à ceux de la géométrie plane.

Cet ensemble de théorèmes peut prendre le nom de *géométrie quadratique*, puisque notre point de départ a été la considération d'une quadrique ou surface du second ordre fondamentale.

Il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre.

Si la surface fondamentale est un ellipsoïde, la géométrie quadratique ne diffère pas de la géométrie de Riemann.

Si la surface fondamentale est un hyperboloïde à deux nappes, la géométrie quadratique ne diffère pas de celle de Lobatchevski.

Si cette surface est un paraboloïde elliptique, la géométrie quadratique se réduit à celle d'Euclide; c'est un cas limite des deux cas précédents.

Il est clair que nous n'avons pas épuisé la liste des géométries quadratiques ; car nous n'avons considéré, ni l'hyperboloïde à une nappe, ni ses nombreuses dégénérescences.

Nous pouvons donc dire qu'il y a trois géométries quadratiques principales, qui correspondent aux trois espèces de surfaces du second ordre à centre.

Nous devrons y ajouter d'ailleurs les géométries qui correspondent aux cas limites et parmi lesquelles prendra rang la géométrie d'Euclide.

Comment se fait-il donc que la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe ait jusqu'ici échappé aux théoriciens? C'est qu'elle entraîne les propositions suivantes :

1° La distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle.

2° Il y a deux sortes de droites correspondant, les premières aux sections diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques ; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde.

3° Il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points.

Tous les géomètres ont implicitement supposé que ces trois propositions sont fausses, et vraiment ces trois propositions sont trop contraires aux habitudes de notre esprit pour qu'en les niant les fondateurs de la géométrie aient cru faire une hypothèse et aient songé à l'énoncer.

Applications de la théorie des groupes.

D'après ce qui précède, le problème que j'ai posé au début de ce travail se décompose en deux parties :

1° Quelles sont les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques?

2° Quelles sont les hypothèses qui distinguent la géométrie d'Euclide des autres géométries quadratiques?

La seconde partie du problème peut être regardée comme résolue; nous n'avons donc à nous occuper que de la première partie.

Il y a deux hypothèses que l'on est obligé de faire au début de toute géométrie à deux dimensions et que l'on peut énoncer ainsi :

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Les personnes peu familières avec les travaux récents des géomètres trouveront extraordinaire qu'on puisse tirer de pareilles prémisses des conclusions précises.

Mais ce résultat n'étonnera pas les mathématiciens qui ont lu les remarquables travaux de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes. M. Lie démontre en effet un résultat, très surprenant au premier abord, et qui peut se traduire ainsi dans le langage géométrique :

Si la position d'une figure plane dans son plan dépend d'un nombre fini de conditions, le nombre de ces conditions ne peut surpasser huit.

Nous ferons d'ailleurs dans la suite de fréquents emprunts au Mémoire du savant norwégien.

Nous allons chercher quelles conséquences il est permis de tirer des deux hypothèses A et B.

Le plan ayant deux dimensions, la position d'un point dans son plan est déterminée par deux coordonnées x et y. Nous ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais nous nous réservons de le déterminer plus complètement dans la suite.

Supposons qu'une figure plane se déplace; soient x, y les coordonnées primitives d'un point de cette figure; et x_1, y_1 les coordonnées de ce même point après le déplacement. On aura

$$x_1 = \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),$$
$$y_1 = \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma),$$

où φ et ψ sont deux fonctions de x et de y, et de trois paramètres α, β, γ, il y aura trois paramètres, puisque la position de la figure dépend de trois conditions.

L'opération

$$[x, y; \varphi(x, y, \alpha, \beta, \gamma), \psi(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]$$

définira l'un des mouvements possibles d'une figure plane et l'ensemble de ces opérations ou mouvements devra former un *groupe*. Ce groupe, d'après le langage de M. Lie, sera continu et d'ordre 3, puisque les opérations dépendent de trois paramètres.

Parmi les opérations du groupe, on devra trouver l'opération identique. Par conséquent, pour certaines valeurs des paramètres α, β, γ, on devra avoir

$$\varphi = x, \qquad \psi = y.$$

Nous pouvons toujours supposer que cela ait lieu pour

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Nous appellerons alors opération infinitésimale (ou mouvement infinitésimal) une opération par laquelle α, β, γ ont des valeurs infiniment petites et que nous pourrons écrire

$$\left(x, y;\ x + \alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma};\ y + \alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma}\right):$$

Dans cette expression on suppose, bien entendu, que, dans les dérivées $\frac{d\varphi}{d\alpha}, \frac{d\varphi}{d\beta}, \dots$, on a fait $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

M. Lie représente une pareille opération par la notation suivante

$$S = p\left(\alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} + \beta \frac{d\varphi}{d\beta} + \gamma \frac{d\varphi}{d\gamma}\right) + q\left(\alpha \frac{d\psi}{d\alpha} + \beta \frac{d\psi}{d\beta} + \gamma \frac{d\psi}{d\gamma}\right),$$

de telle façon que, si l'on pose

$$A = p \frac{d\varphi}{d\alpha} + q \frac{d\psi}{d\alpha}, \qquad B = p \frac{d\varphi}{d\beta} + q \frac{d\psi}{d\gamma}, \qquad C = p \frac{d\varphi}{d\gamma} + q \frac{d\psi}{d\gamma},$$

on ait, pour une opération infinitésimale quelconque,

$$S = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

A, B, C et S sont donc des fonctions de x, de y, de p et de q.

Les opérations A, B, C peuvent s'appeler les *substitutions fondamentales* et toute opération infinitésimale n'en est qu'une combinaison linéaire; le choix des substitutions fondamentales reste d'ailleurs arbitraire dans une certaine mesure; car on peut remplacer ces trois opérations A, B, C par trois quelconques de leurs combinaisons linéaires.

M. Lie a fait voir que, si l'on pose

$$[A, B] = \frac{dA}{dp}\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dp} + \frac{dA}{dq}\frac{dB}{dy} - \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dq}$$

et si α et β sont deux quantités infiniment petites quelconques, l'opération

$$(\alpha A)(\beta B)(\alpha A)^{-1}(\beta B)^{-1},$$

qui fait forcément partie du groupe, est une substitution infinitésimale du second ordre, qui peut s'écrire

$$\alpha\beta[A, B].$$

Il résulte de là que $[A, B]$, $[A, C]$ et $[B, C]$ sont des combinaisons linéaires de A, B et C, et que l'on a

$$(1)\qquad \begin{cases} [A, B] = \lambda\ A + \mu\ B + \nu\ C, \\ [A, C] = \lambda'\ A + \mu' B + \nu' C, \\ [B, C] = \lambda'' A + \mu'' B + \nu'' C. \end{cases}$$

Les coefficients λ, μ, ν sont des constantes; mais ils ne sont pas quelconques; car on doit avoir identiquement

$$(2)\qquad [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Ce qui précède contient le point de départ de toute la discussion, mais cette discussion peut être considérablement simplifiée :

1° Par un choix convenable du système des coordonnées x et y;

2° Par un choix convenable des trois substitutions fondamentales A, B et C.

On peut d'abord choisir les substitutions fondamentales de telle façon que

$$\lambda = \nu = 0$$

ou que

$$[A, B] = \mu B.$$

On peut ensuite choisir le système de coordonnées, de telle sorte que A se réduise à p, et par conséquent que l'on ait

$$[A, B] = \frac{dB}{dx} = \mu B.$$

Nous en déduirons pour B la forme suivante

$$B = e^{\mu x}[h\theta_1(y) + q\theta_2(y)].$$

Nous avons fait tout à l'heure une hypothèse sur le choix du système des coordonnées; mais cette hypothèse ne détermine pas complètement ce système.

Nous pouvons encore, sans que A cesse de se réduire à p, remplacer y par une fonction arbitraire de y et ajouter à x une fonction arbitraire de y.

Nous pouvons faire ce nouveau changement de coordonnées de façon à simplifier l'expression de B. Si θ_2 n'est pas nul, nous pouvons le faire de façon que $\theta_2 = 1$, $\theta_1 = 0$. Si θ_2 est nul, il restera nul après le changement de coordonnées, mais on pourra réduire θ_1 soit à y, soit à 1. Nous sommes donc amenés à l'une des trois hypothèses suivantes :

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 1; \qquad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = 0; \qquad \theta_1 = y, \quad \theta_2 = 0.$$

Nous pouvons distinguer deux cas :

1° Ou bien μ est nul, ce qui signifie que les deux substitutions A et B sont permutables. (Remarquons en passant que l'hypothèse qu'il existe deux mouvements permutables peut être regardée comme un des énoncés du *postulatum* d'Euclide.)

On a alors, soit

$$A = p, \qquad B = q;$$

soit

$$A = p, \qquad B = yp.$$

2° Ou bien μ n'est pas nul. On a alors, soit

$$A = p, \qquad B = qe^{\mu x},$$

soit

$$A = p, \qquad B = pe^{\mu x},$$

soit

$$A = p, \qquad B = pye^{\mu x}.$$

Examinons successivement ces cinq cas :

Premier cas :

$$A = p, \qquad B = q.$$

Les équations (1) se réduisent alors à

$$\frac{dC}{dx} = \lambda' p + \mu' q + \nu' C,$$

$$\frac{dC}{dy} = \lambda'' p + \mu'' q + \nu'' C.$$

Si ν' et ν'' ne sont pas nuls à la fois, les équations ne seront compatibles que si l'on a

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{\mu'}{\mu''} = \frac{\nu'}{\nu''}.$$

Il est permis alors de supposer que

$$\lambda' = \mu' = \lambda'' = \mu'' = 0,$$

d'où

$$C = e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq),$$

a et b étant deux constantes.

Le groupe

$$A = p, \qquad B = q, \qquad C = e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq)$$

définit une géométrie entièrement nouvelle. Pourquoi Euclide ne l'a-t-il pas rencontrée? ou plutôt quelle est l'hypothèse qu'il a faite implicitement et qui l'a empêché de rencontrer cette géométrie?

Une substitution infinitésimale quelconque a pour expression

$$\alpha p + \beta q + \gamma e^{\nu' x + \nu'' y}(ap + bq).$$

Quels sont les points que cette substitution laisse immobiles? Ces points sont donnés par les équations

$$e^{\nu' x + \nu'' y} = -\frac{\alpha}{\gamma a} = -\frac{\beta}{\gamma b},$$

d'où cette conclusion : si l'on n'a pas $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, aucun point ne reste immobile. Si l'on a $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$, une infinité de points demeurent immobiles.

Or il est bien aisé de se rendre compte qu'Euclide fait à chaque instant, sans l'énoncer, l'hypothèse suivante :

Si une figure plane ne quitte pas son plan et si deux de ses points restent immobiles, elle reste tout entière immobile.

C'est cette hypothèse qui nous forcera à rejeter la géométrie particulière qui est fondée sur la considération du groupe dont je viens de parler.

Si $\nu' = \nu'' = 0$, on trouve

$$C = p(\lambda' x + \lambda'' y) + q(\mu' x + \mu'' y),$$

et le groupe dérivé de A, B et C nous conduit à la géométrie d'Euclide.

Deuxième cas :

$$A = p, \qquad B = yp.$$

On trouve alors, dans le cas le plus général,

$$C = [ax + f(y)]p + bq,$$

a et b étant des constantes et $f(y)$ une fonction arbitraire de y que l'on peut d'ailleurs supposer nulle si l'on choisit convenablement le système des coordonnées.

Une substitution infinitésimale quelconque s'écrit

$$(\alpha + \beta y + a\gamma x)p + (\gamma b)q.$$

Ce groupe doit encore être rejeté en vertu de l'hypothèse faite plus haut.

En effet, si γb n'est pas nul, aucun point ne reste immobile; si au contraire γb est nul, tous les points qui satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta y + a\gamma x = 0$$

restent immobiles.

Troisième cas :

$$A = p, \qquad B = pye^{\mu x}.$$

On trouve

$$C = -\frac{p}{\gamma} + q.$$

Les substitutions A et C sont permutables ; on est donc ramené à l'un des deux cas précédents.

Quatrième cas :

$$A = p, \qquad B = pe^{\mu x}.$$

On trouve encore une substitution C permutable à A et l'on est ramené par conséquent aux deux premiers cas.

Cinquième cas :

$$A = p, \qquad B = qe^{\mu x},$$

On trouve ici pour C quatre formes différentes :

1° $C = e^{\nu' x}[ap + \mu(ay + b)q]$, $\quad$ (a, b et c étant des constantes).

2° $C = [ap + (by + c)q]$,

3° $C = e^{\mu x}[ap + (bx - a\mu y + c)q]$,

4° $C = e^{-\mu x}\left[(ay + b)p + \mu q\left(\frac{a}{2}y^2 + by + c\right)\right]$,

La première forme doit être rejetée parce que B et C sont permutables ; la deuxième parce que A et C sont permutables, la troisième parce que B et C sont permutables. Si l'on adoptait l'une de ces trois formes, on serait donc toujours ramené à l'un des deux premiers cas.

Il reste la quatrième forme, qui nous conduit aux géométries quadratiques.

Le même résultat pourrait être obtenu en discutant les trois relations qui lient les neuf coefficients λ, μ, ν et que l'on peut déduire de l'identité (2).

Conclusions.

Nous pouvons donc énoncer ainsi les hypothèses qui sont nécessaires et suffisantes pour servir de prémisses à la Géométrie plane.

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

Ces deux premières hypothèses nous laissent le choix entre les diverses géométries quadratiques et les deux géométries caractérisées par les deux groupes suivants :

$$[p, q, e^{\nu' x + \nu'' q}(ap + bq)]$$

et

$$(p, yp, axp + bq).$$

Ces deux géométries sont exclues si l'on fait encore l'hypothèse suivante :

C. Quand une figure plane ne quitte pas son plan et que deux de ses points restent immobiles, la figure tout entière reste immobile.

Nous n'avons plus alors que le choix entre les diverses géométries quadratiques.

Faisons encore les deux hypothèses suivantes :

D. La distance de deux points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident;

E. Lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.

Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre et d'exclure la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe.

Introduisons encore l'hypothèse suivante :

F. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un point,

et la Géométrie sphérique se trouvera exclue à son tour.

Il ne reste plus qu'à introduire le *postulatum* d'Euclide :

G. La somme des angles d'un triangle est une constante.

Nous pouvons remarquer que ce *postulatum* nous dispense des hypothèses D, E et F qui en sont des conséquences nécessaires.

Remarques diverses.

Le lecteur qui aura bien voulu me suivre jusqu'ici ne manquera pas de se reporter au célèbre Mémoire de Riemann (*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*) et de remarquer certaines différences entre les méthodes et les résultats. Riemann caractérise une géométrie par l'expression de l'élément d'arc en fonction des coordonnées. Il est ainsi conduit à un très grand nombre de géométries logiquement possibles et dont je n'ai pas même parlé. Cela tient à ce que j'ai pris pour point de départ la possibilité du mouvement ou plutôt l'existence d'un groupe de mouvements qui n'altèrent pas les distances.

On peut se demander maintenant ce que sont ces hypothèses.

Sont-ce des faits expérimentaux, des jugements analytiques ou synthétiques *a priori?* Nous devons répondre négativement à ces trois questions. Si ces hypothèses étaient des faits expérimentaux, la Géométrie serait soumise à une incessante revision, ce ne serait pas une science exacte; si elles étaient des jugements synthétiques *a priori,* ou à plus forte raison des jugements analytiques, il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation.

On peut montrer que l'Analyse repose sur un certain nombre de jugements synthétiques *a priori;* mais il n'en est pas de même de la Géométrie.

Que devons-nous donc penser des prémisses de la Géométrie? En quel sens peut-on, par exemple, dire que le *postulatum* d'Euclide soit vrai?

D'après ce que nous venons de voir, la Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et, en ce sens, on pourrait dire que la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe.

Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées pour y rapporter une figure géométrique.

Maintenant qu'est-ce qui a déterminé ce choix : c'est d'abord la simplicité du groupe choisi; mais il y a une autre raison : il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les *solides* et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe choisi.

Ainsi les hypothèses fondamentales de la Géométrie ne sont pas des faits expérimentaux; c'est cependant l'observation de certains phénomènes physiques qui les fait choisir parmi toutes les hypothèses possibles.

D'autre part, le groupe choisi est seulement plus commode que les autres et l'on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de Lobatchevski fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses.

Je n'insiste pas davantage; car le but de ce travail n'est pas le développement de ces vérités qui commencent à devenir banales.