BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

Propositions et questions diverses

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 128-129

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__128_1>

Propositions et questions diverses; par M. E. CATALAN.

(Séance du 18 avril 1888.)

1. *Sur les fonctions* X_n. — Dans mon premier Mémoire sur cette théorie, j'ai démontré la formule

$$(1)\quad X_n = \text{partie réelle de } \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\,(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n\,d\varphi.$$

Tout récemment, je me suis aperçu qu'on peut la remplacer par celle-ci :

$$X_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \sin^n\varphi\,(x\sin\varphi+\sqrt{-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi, \tag{2}$$

laquelle n'est soumise à aucune restriction.

Cette formule (2), beaucoup plus simple que la célèbre formule de Jacobi

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x-\sqrt{x^2-1}\sin\omega)^n\,d\omega, \tag{3}$$

est-elle *nouvelle?* Je m'adresse pour le savoir à mes confrères de la *Société mathématique*.

2. De la formule (2), on déduit, presque sans calcul, divers résultats, plus ou moins importants, que l'on trouvera dans mon *sixième* (et dernier) *Mémoire sur les fonctions* X_n, imprimé parmi ceux de l'Académie de Belgique.

3. *Quelques théorèmes empiriques.* — Le journal *Mathesis* a publié, en décembre dernier, une Question proposée par M. *Oltramare*. Cette question m'a fait songer au *théorème empirique* suivant :

n étant un nombre entier, soit n_1 la somme des diviseurs de n, inférieurs à n, soit n_2 la somme des diviseurs de n_1, inférieurs à n_1; etc. Cela posé : les nombres $n, n_1, n_2, \ldots$ tendent vers une limite λ, laquelle est 1 *ou un nombre parfait.*

Si cette proposition (vérifiée sur divers exemples) est vraie, elle doit être fort difficile à démontrer.

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, j'ai énoncé divers théorèmes empiriques; celui-ci, par exemple :

n étant un nombre entier, la quantité

$$6n^2+6n-3$$

est la somme de trois carrés, entiers et positifs (1).

(1) Dans le Mémoire intitulé : *Recherche sur quelques produits indéfinis*, j'ai donné, au moyen des séries elliptiques, ce théorème remarquable :

Tout multiple de 8 *est la somme de huit carrés impairs.*

Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver une démonstration élémentaire.