BULLETIN DE LA S. M. F.

X. ANTOMARI

Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 118-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__118_1>

Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône; par M. X. Antomari (1).

On sait que les géodésiques d'un cône peuvent être considérées comme les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à une sphère, et réciproquement; de sorte que la propriété dont il va être question est aussi une propriété caractéristique de ces arêtes de rebroussement. C'est même en envisageant les lignes géodésiques d'un cône comme les arêtes de rebroussement de développables circonscrites à une sphère que nous allons établir cette propriété.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une courbe gauche (C), arête de rebroussement d'une dévelop-

(1) J'avais achevé la rédaction de cette Note lorsque j'ai appris que M. Enneper s'était occupé du même sujet. Je n'ai, d'ailleurs, pas pu me procurer le travail du géomètre allemand.

pable circonscrite à la sphère S de rayon r ayant son centre à l'origine. Appelons, suivant l'habitude :

α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en M à la courbe (C);
α_1, β_1, γ_1 ceux de la normale principale;
α_2, β_2, γ_2 ceux de la binormale.

Le plan osculateur en M à la courbe (C) étant tangent à la sphère S, x, y, z satisfont à la relation

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = r. \tag{1}$$

Prenons comme variable indépendante l'arc s de la courbe (C) compté à partir d'une origine arbitraire, et différentions deux fois successivement les deux membres de la relation (1). L'emploi des formules de Serret conduit alors facilement aux expressions suivantes des coordonnées x, y, z du point M

$$\begin{aligned} x &= r(\alpha_2 - \theta\alpha), \\ y &= r(\beta_2 - \theta\beta), \\ z &= r(\gamma_2 - \theta\gamma), \end{aligned}$$

où θ désigne le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ du rayon de courbure au rayon de torsion.

De ces relations on déduit

$$\begin{aligned} dx &= - r\alpha\, d\theta, \\ dy &= - r\beta\, d\theta, \\ dz &= - r\gamma\, d\theta, \end{aligned}$$

et enfin

$$ds^2 = r^2 d\theta^2.$$

Il suit de là que le rapport des deux courbures de la courbe (C) est une fonction linéaire et entière de l'arc s.

Réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une sphère, ou, ce qui revient au même, comme une géodésique d'un cône.

Soit, en effet,

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s + s_0}{r},$$

r désignant une constante. De cette relation et des suivantes,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{\rho}, \qquad \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{\tau},$$

on déduit facilement l'équation

$$r\frac{d\alpha_2}{ds} - (s + s_0)\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Cette équation est identique à

$$\alpha + r\frac{d\alpha_2}{ds} - \alpha - (s + s_0)\frac{d\alpha}{ds} = 0,$$

dont le premier membre est la dérivée exacte de $x + r\alpha_2 - (s + s_0)\alpha$ par rapport à s. On en déduira donc

$$x + r\alpha_2 - \alpha(s + s_0) = a,$$

et les équations analogues

$$y + r\beta_2 - \beta(s + s_0) = b,$$
$$z + r\gamma_2 - \gamma(s + s_0) = c.$$

Ces trois équations, multipliées respectivement par α_2, β_2, γ_2 et ajoutées membre à membre, donnent

$$\alpha_2(x - a) + \beta_2(y - b) + \gamma_2(z - c) + r = 0;$$

ce qui montre que la distance du point (a, b, c) au plan osculateur de la courbe est constante et égale à r et, par conséquent, que ce plan est constamment tangent à la sphère de centre (a, b, c) et de rayon r.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, qui fait l'objet de cette courte Note.

Dans toute géodésique d'un cône, le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire et entière de l'arc de la ligne géodésique, et, réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété est une géodésique d'un cône.

Voici, du reste, la démonstration géométrique de la proposition et de sa réciproque.

Soit M′ le point où le plan osculateur en M touche la sphère. Le lieu du point M′ est une courbe sphérique (C′) orthogonale aux droites MM′, de sorte que (C) est une développée de (C′).

Soient, d'autre part,

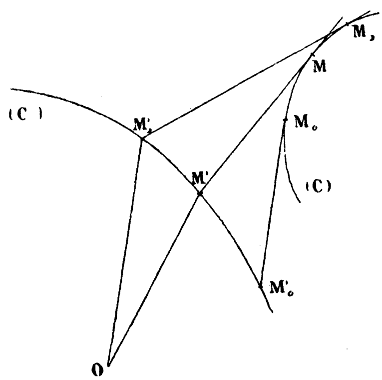
M_0, M'_0 un couple de points correspondants;
s l'arc $M_0 M$;
l la longueur MM';
l_0 la longueur $M_0 M'_0$.

On sait que l'on a

$$s = l - l_0.$$

Ceci posé, déplaçons infiniment peu le point M en M_1, et soit M'_1 le point correspondant sur la sphère O.

Fig. 1.



Puisque OM' est normal à l'arc $M'M'_1$, on a, dans le triangle $OM'M'_1$,

$$M'M'_1 = OM' \times \text{angle}\, M'OM'_1. \tag{2}$$

On peut maintenant considérer les deux tangentes MM' et $M_1 M'_1$ comme se coupant en M, et alors le triangle $M'M'_1 M$ donne

$$M'M'_1 = MM' \times \text{angle}\, M'MM'_1. \tag{3}$$

Mais l'angle $M'OM'_1$ est évidemment l'angle de deux binormales consécutives à la courbe (C); et de même $M'MM'_1$ est l'angle de deux tangentes consécutives à cette même courbe. On a donc

$$\widehat{M'OM'_1} = \frac{ds}{\tau},$$

$$M'MM'_1 = \frac{ds}{\rho}.$$

D'ailleurs $OM' = r$, et, en divisant membre à membre les relations (2) et (3), on obtient facilement

$$\frac{MM'}{r} = \frac{\rho}{\tau}$$

ou bien

$$\frac{l}{r} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{s + l_0}{r}.$$

Ainsi le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire et entière de l'arc.

Réciproquement, si une courbe (C) jouit de cette propriété, elle est la développée d'une courbe sphérique et, par suite, l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à leur sphère.

Portons, en effet, sur la tangente en M à la courbe (C) la longueur $MM' = l = s + l_0$. Supposons, d'ailleurs, que, pour chaque point M de la courbe (C), on ait

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s + l_0}{r},$$

l_0 et x désignant des constantes. Le lieu du point M' est une trajectoire orthogonale (C') des génératrices de la développable engendrée par les tangentes à la courbe (C); celle-ci est dès lors une développée de (C'). Tout revient à prouver que (C') est une courbe sphérique. Considérons, en effet, deux génératrices voisines MM', $M_1M'_1$ et menons les normales en M' et M'_1 à la développable dont (C) est l'arête de rebroussement. Comme (C') est ligne de courbure de cette développable, les normales se coupent en un point O.

Appelons λ la distance OM'. On a alors, comme plus haut,

$$\frac{MM'}{OM'} = \frac{\text{angle } M'OM'_1}{\text{angle } M'MM'_1}$$

ou

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\rho}{\tau}.$$

Or on a aussi

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{l}{r};$$

donc

$$\lambda = r = \text{const}.$$

La normalie développable, lieu de la droite M'O, est donc un cône ayant son sommet en O, et la sphère de centre O et de rayon r touche tout le long de (C′) la développable lieu de MM′. La réciproque est donc démontrée.

On peut enfin rattacher la proposition précédente à un ordre d'idées plus général se rapportant aux lignes géodésiques d'une surface développable.

Prenons, en effet, comme variable indépendante l'arc σ de l'indicatrice sphérique de la développable, et appelons s l'arc de l'arête de rebroussement compté à partir d'une origine arbitraire. L'élément linéaire de la surface est de la forme

$$dS^2 = du^2 + (u - s)^2 d\sigma^2.$$

On considère, bien entendu, s comme une fonction de σ. Au reste, si l'on appelle λ la distance d'un point M de la surface au point de contact avec l'arête de rebroussement de la génératrice qui passe par M, on a

$$u = \lambda + s,$$

ce qui complète la définition des variables coordonnées.

Ceci posé, les lignes géodésiques de la surface s'obtiennent, comme l'on sait, en intégrant l'équation

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right)^2 + (u - s)^2 \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = (u - s)^2.$$

On obtient, φ désignant une constante,

$$\theta = u \cos(\sigma - \varphi) + \int s \sin(\sigma - \varphi) d\sigma,$$

et l'équation d'une ligne géodésique quelconque est alors

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} = \text{const.},$$

ou bien

$$u = \frac{\int s \cos(\sigma - \varphi)\, d\sigma + C}{\sin(\sigma - \varphi)}.$$

Si maintenant on désigne par S l'arc d'une géodésique, on trouve facilement

$$\frac{dS^2}{d\sigma^2} = \frac{(u - s)^2}{\sin^2(\sigma - \varphi)},$$

ou, au signe près,

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{C}{\sin^2(\sigma - \varphi)} - \frac{\int \rho \sin(\sigma - \varphi) d\sigma}{\sin^2(\sigma - \varphi)}, \tag{4}$$

ρ désignant le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la développable.

Remarquons à présent que la ligne géodésique considérée fait avec la génératrice qui passe par un de ses points un angle ω, tel que

$$\operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}(\sigma - \varphi).$$

D'autre part, M. Paul Serret a démontré, dans sa thèse (p. 139), qu'en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ des deux courbures est égal à la tangente de son inclinaison sur la génératrice correspondante de la surface. On aura donc

$$\frac{R_1}{R_2} = -\cot(\sigma - \varphi).$$

Or, dans la formule (4), le premier terme du second membre est justement la dérivée de $-\cot(\sigma - \varphi)$. Posant alors

$$\frac{\int h \sin(\sigma - \varphi)\, d\sigma}{\sin^2(\sigma - \varphi)} = f(\sigma)$$

et intégrant, il vient

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2} - \int f(\sigma)\, d\sigma.$$

De cette formule on peut déduire plusieurs conséquences.

En voici deux très simples :

1° Si la surface développable est un cône, $\rho = 0$, et l'on obtient la formule

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2},$$

démontrée plus haut de deux manières.

2° Si l'arête de rebroussement de la développable est une courbe dont la première courbure est constante, on a encore, en intégrant,

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2} + \frac{a\cos(\sigma - \varphi)}{\sin^2(\sigma - \varphi)}.$$

ou bien

$$S - S_0 = C\frac{R_1}{R_2} + a\frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{R_2}.$$