BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 171-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__171_1>

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes; par M. M. d'Ocagne.

Je rappelle que j'ai donné le nom d'*isométrique* (¹) d'une courbe K, par rapport à un système de courbes (C), toute courbe telle que son arc compris entre deux quelconques des courbes du

(¹) *Voir* le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 71.

système (C) soit égal à l'arc de la courbe K compris entre les mêmes courbes.

En particulier, une courbe est isométrique d'une droite D par rapport aux droites issues d'un point O, lorsque l'arc de cette courbe compris entre deux quelconques des droites issues de O est égal au segment de la droite D compris entre ces droites.

Ce cas se trouve traité au n° 5 du petit Mémoire que je viens de rappeler. Je vais en donner ici une solution plus simple.

Prenant pour origine le point O, pour axe des x la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D, l'axe Oy étant parallèle à D, et appelant a la distance du point O à la droite D, on a, pour l'ordonnée h du point où la droite D est coupée par la droite qui joint le point O au point (x, y),

$$h = \frac{ay}{x}, \tag{1}$$

et l'on doit avoir

$$h' = \sqrt{1 + y'^2}, \tag{2}$$

h' et y' représentant les dérivées $\frac{dh}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$.

Dans une première solution, j'éliminais h entre ces deux équations, de façon à avoir l'équation différentielle de la courbe cherchée. On va voir qu'on est conduit à des calculs plus simples en éliminant y. En effet, (1) donne

$$y' = \frac{h + h'x}{a}.$$

L'équation (2) devient donc

$$h' = \sqrt{1 + \left(\frac{h + h'x}{a}\right)^2}$$

ou

$$h + h'x = a\sqrt{h'^2 - 1}. \tag{3}$$

Prenant la dérivée par rapport à x, on a

$$2h' + x\frac{dh'}{dx} = \frac{ah'}{\sqrt{h'^2 - 1}}\frac{dh'}{dx}$$

ou

$$\frac{dx}{dh'} + \frac{x}{2h'} = \frac{a}{2\sqrt{h'^2 - 1}}.$$

Intégrant, en prenant x pour fonction de h', on a, C étant une constante arbitraire,

$$x = e^{-\int \frac{dh'}{2h'}} \left[C + \int e^{\int \frac{dh'}{2h'}} \frac{dh'}{2\sqrt{h'^2 - 1}} \right]$$

ou

$$x = \frac{1}{\sqrt{h'}} \left[C + a \int \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3 - 4h'}} \right].$$

Posons

$$u = \int_{\infty}^{h'} \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3 - 4h'}}.$$

Dès lors, suivant la notation de M. Weierstrass,

$$h' = \wp(u) \qquad (\text{avec } g_2 = 4, \quad g_3 = 0)$$

et

(4) $$x = \frac{C + au}{\sqrt{\wp(u)}}.$$

L'équation (3) donne alors

$$h = a\sqrt{\wp(u)^2 - 1} - (C + au)\sqrt{\wp(u)},$$

puis l'équation (1),

(4') $$y = \frac{C + au}{a\sqrt{\wp(u)}} \left[a\sqrt{\wp(u)^2 - 1} - (C + au)\sqrt{\wp(u)} \right].$$

Les équations (4) et (4') résolvent le problème. Remarquant que $\wp(u)^2 - 1$ est ici égal à $\frac{\wp'(u)^2}{4\wp(u)}$, on peut remplacer la formule (4') par la suivante :

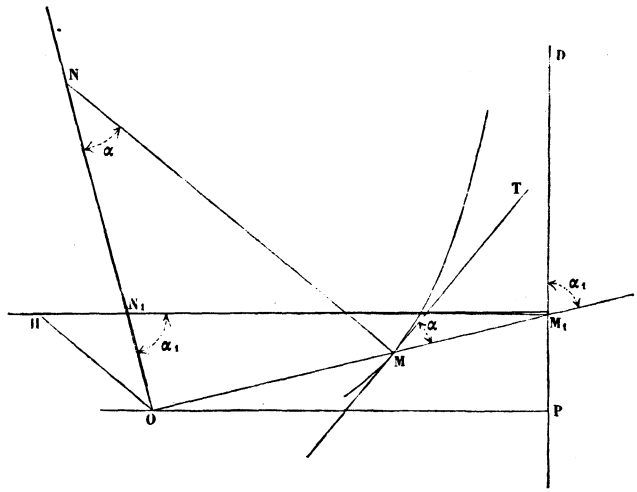
(4 *bis*) $$y = \frac{(C + au)[a\wp'(u) - 2(C + au)\wp(u)]}{2a\wp(u)} \text{ [1]}.$$

[1] Une légère faute d'impression, qui d'ailleurs saute aux yeux, s'est glissée dans la seconde des formules de mon Mémoire sur les isométriques (*Bulletin*, t. XIII, p. 79). Cette formule doit être rétablie ainsi

$$y = \frac{a\wp'(u) - 2(C + au)\wp(u)}{2\sqrt{\wp(u)}}.$$

Ici d'ailleurs les invariants de la fonction $\wp$ ne sont pas les mêmes que ci-dessus, mais $g_2 = -4$, $g_3 = 0$.

Voici maintenant comment peut se déterminer le centre de courbure des courbes qui nous occupent.



Prenons sur la courbe un point M dont le vecteur OM coupe la droite D en M_1. MN et M_1N_1 étant les normales polaires en M et en M_1, limitées à la perpendiculaire élevée en O à OM, on a, en appelant ds la différentielle de l'arc de courbe en M, égale à la différentielle du segment de la droite D en M_1, et ω l'angle de OM avec OP,

$$ds = MN\,d\omega = M_1N_1\,d\omega.$$

Donc,

$$MN = M_1N_1.$$

La normale en M se trouve ainsi déterminée.

Soient maintenant α l'angle de la tangente en M avec OM, α_1 l'angle de D avec le même vecteur, $OM = \rho$, $OM_1 = \rho_1$. L'égalité précédente donne

$$\rho \sin\alpha_1 = \rho_1 \sin\alpha.$$

Par suite,

$$\sin\alpha_1\,d\rho + \rho\cos\alpha_1\,d\alpha_1 = \sin\alpha\,d\rho_1 + \rho_1\cos\alpha\,d\alpha.$$

Mais

$$d\rho = \rho \cot\alpha \, d\omega, \qquad d\rho_1 = \rho_1 \cot\alpha_1 \, d\omega,$$
$$d\alpha = \left(\frac{n}{r} - 1\right) d\omega\,(^1), \qquad d\alpha_1 = -\, d\omega,$$

n étant la normale polaire MN, r le rayon de courbure en M. La relation précédente devient donc

$$\rho \cot\alpha \sin\alpha_1 - \rho \cos\alpha_1 = \rho_1 \cot\alpha_1 \sin\alpha + \rho_1 \cos\alpha \left(\frac{n}{r} - 1\right)$$

ou, après des réductions faciles,

$$\rho_1 \cos\alpha \frac{n}{r} = \sin(\alpha_1 - \alpha)\left(\frac{\rho}{\sin\alpha} + \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1}\right).$$

Or

$$\frac{\rho}{\sin\alpha} = \frac{\rho_1}{\sin\alpha_1} = n.$$

Il vient donc finalement

$$2r = \frac{\rho_1 \cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Par le point O, menons la parallèle OH à MN. Nous avons $\widehat{HOM_1} = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\widehat{OHM_1} = \alpha - \alpha_1$. Donc, le triangle OHM_1 donne

$$\frac{M_1H}{OM_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}$$

ou

$$M_1H = \frac{\rho_1 \cos\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = 2r.$$

Par suite, M_1H *est égal au diamètre du cercle osculateur au point* M.

([1]) Formule (6) de ma Note *Sur les transformations centrales des courbes planes* (*Mathesis*, 1884).