

BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Propriété des surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 141-144

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__141_1

© Bulletin de la S. M. F., 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Propriété des surfaces algébriques; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 4 décembre 1889.)

Dans l'une des dernières séances de la Société mathématique, M. Fouret, après avoir donné une démonstration fort simple d'un beau théorème sur l'élimination dû à Liouville, en a déduit, à l'aide de considérations empruntées à la Mécanique, une propriété générale de toutes les courbes algébriques, dont M. Humbert avait fait antérieurement l'objet d'une Communication, et que l'on peut énoncer ainsi :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une courbe algébrique soit constante est une conique.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les coniques obtenues restent concentriques et homothétiques.

et menons par ce point les normales à la surface. On voit que les points d'incidence de ces normales seront donnés par les intersections communes de la surface (1) et des surfaces représentées par les équations

$$(2) \quad \frac{f'_x}{x-\alpha} = \frac{f'_y}{y-\beta}, \quad \frac{f'_x}{x-\alpha} = \frac{f'_z}{z-\gamma}.$$

Si l'on met ces équations (2) sous forme entière, il est visible qu'elles sont du même degré n que la surface (1), soit, en général, par rapport à chacune des lettres x, y, z , soit par rapport à l'ensemble des lettres $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

Si donc, entre ces trois équations (1), (2), nous éliminons y et z , par exemple, l'équation résultante, de degré n^3 en x , sera également de degré n^3 par rapport à l'ensemble des lettres x, α, β, γ , d'après la propriété énoncée ci-dessus. Nous pouvons, en conséquence, l'écrire

$$(3) \quad x^{n^3} + F_1(\alpha, \beta, \gamma)x^{n^3-1} + F_2(\alpha, \beta, \gamma)x^{n^3-2} + \dots = 0,$$

F_1, F_2, \dots représentant des fonctions de α, β, γ dont le degré est égal à l'indice.

De même, l'élimination de z, x , puis de x, y , nous donnerait

$$(4) \quad y^{n^3} + G_1(\alpha, \beta, \gamma)y^{n^3-1} + G_2(\alpha, \beta, \gamma)y^{n^3-2} + \dots = 0,$$

$$(5) \quad z^{n^3} + H_1(\alpha, \beta, \gamma)z^{n^3-1} + H_2(\alpha, \beta, \gamma)z^{n^3-2} + \dots = 0.$$

Ces trois équations résolues donneraient les coordonnées des points d'incidence des n^3 normales issues du point M.

La somme k^2 des carrés des distances de M à ces n^3 points d'incidence est

$$\Sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]$$

ou

$$n^3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2\alpha\Sigma x - 2\beta\Sigma y - 2\gamma\Sigma z + \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2.$$

Or les équations (3), (4), (5) nous montrent qu'on a

$$\begin{aligned} \Sigma x &= -F_1(\alpha, \beta, \gamma), & \Sigma y &= -G_1(\alpha, \beta, \gamma), & \Sigma z &= -H_1(\alpha, \beta, \gamma), \\ \Sigma x^2 &= F_1^2 - 2F_2 = J_2(\alpha, \beta, \gamma), \\ \Sigma y^2 &= L_2(\alpha, \beta, \gamma), \\ \Sigma z^2 &= P_2(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

L'équation du lieu du point M est donc

$$(6) \begin{cases} n^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\alpha F_1(\alpha, \beta, \gamma) + 2\beta G_1(\alpha, \beta, \gamma) \\ + 2\gamma H_1(\alpha, \beta, \gamma) + J_2(\alpha, \beta, \gamma) + L_2(\alpha, \beta, \gamma) + P_2(\alpha, \beta, \gamma) = k^2. \end{cases}$$

Le lieu cherché est donc une surface du second ordre. Lorsqu'on fait varier k^2 , le centre reste invariable, de même que les directions et les rapports mutuels des axes.

Si nous écrivons l'équation de cette surface sous la forme

$$(7) \quad S_2(\alpha, \beta, \gamma) = k^2,$$

et si $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ représentent les coordonnées du centre, il est clair que le minimum de la somme des carrés des normales, qui correspond précisément à ce centre, est

$$S_2(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0).$$

Ainsi se trouve établie, par une analyse bien simple, la proposition suivante, relative aux surfaces algébriques :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une surface algébrique soit constante est une surface du second ordre.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les surfaces du second ordre obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces surfaces jouit de cette propriété, que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la surface algébrique est minimum.

Il serait intéressant d'étudier les particularités diminuant le nombre n^3 des normales qu'on peut mener à la surface d'un point quelconque. J'ai voulu me borner, dans cette Note, à l'examen de la propriété générale.
