

BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Propriété géométrique des coefficients du binôme

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 4-5

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__4_0

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

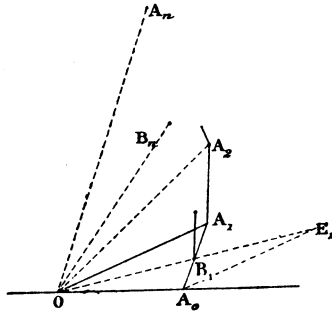
<http://www.numdam.org/>

Propriété géométrique des coefficients du binôme ;

par M. C.-A. LAISANT.

On sait qu'on appelle *myosotis* la figure formée par une série de triangles directement semblables OA_0A_1 , OA_1A_2 , ... accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles OA_0A_1 *base* du myosotis.

Soit un myosotis $OA_0A_1 \dots A_n$ composé de n triangles. Appli-



quons aux sommets A_0, A_1, \dots, A_n des masses proportionnelles aux coefficients $1 = C_0, C_1, \dots, C_n = 1$ du développement de $(x + 1)^n$; et proposons-nous de trouver le barycentre de ce système.

Si nous prenons OA_0 pour unité, et si nous posons $OA_1 = A$, nous avons $OA_2 = A^2, OA_3 = A^3, \dots, OA_n = A^n$, et, par conséquent, le barycentre cherché K est donné par

$$\begin{aligned} OK = \kappa &= \frac{C_0 + C_1 A + C_2 A^2 + \dots + C_n A^n}{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n} \\ &= \frac{(1 + A)^n}{2^n} = \left(\frac{1 + A}{2}\right)^n = B^n = OB_1^n, \end{aligned}$$

en désignant par B_1 le milieu de A_0A_1 .

Si donc nous construisons le myosotis $OA_0B_1B_2 \dots B_n$, de base OA_0B_1 , le sommet B_n sera le barycentre cherché.

Il est évident, d'après cela, que l'angle B_nOA_0 est égal à n fois l'angle B_1OA_0 . Quand le triangle de base OA_0A_1 est isocèle, tous les points A_0, A_1, \dots sont sur une même circonférence; et alors OB_n est la bissectrice de A_nOA_0 .

Quand le triangle OA_0B_1 est isocèle, le barycentre est sur la circonférence de centre O et de rayon OA_0 .

Si l'on prolonge les droites OA_1, OA_2, \dots, OA_n , de telle sorte qu'on ait $OD_1 = C_1 OA_1 = \dots, OD_n = C_n OA_n = OA_n$, il sera aisé de trouver le centre des moyennes distances L des points $A_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, A_n$. En effet, on aura

$$(n+1)L = C_0 A + C_1 A^2 + \dots + C_n A^n = (1+\lambda)^n.$$

Si nous prolongeons OB_1 en $OE_1 = 2OB_1$ et si nous construisons le myosotis de base OA_0E_1 , c'est-à-dire $OA_0E_1E_2 \dots E_n$, on aura, par conséquent, $OL = \frac{OE_n}{n+1}$.

Si, enfin, nous construisons $OF_1 = \frac{OA_1}{C_1}, OF_2 = \frac{OA_2}{C_2}, \dots, OF_n = \frac{OA_n}{C_n} = OA_n$, et, si nous appliquons en $A_0, F_1, F_2, \dots, A_n$, des masses proportionnelles aux carrés des coefficients $C_0^2, C_1^2, \dots, C_n^2$, le barycentre G de ce système sera donné par la relation

$$\frac{(2n)!}{n!n!} OG = (1+\lambda)^n = OE_n, \quad OG = \frac{n!n!}{(2n)!} OP$$

On peut remarquer que $OE_n = 2^n OB_n$.