BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 39-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__39_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire; par M. Ch. Bioche.

1. M. Picard a remarqué que, si les génératrices d'une surface gauche appartiennent à un complexe linéaire, il existe sur cette surface une courbe C dont les tangentes appartiennent à ce complexe. Cette courbe est ligne asymptotique de la surface; elle rencontre chaque génératrice en deux points, et son degré est égal à la classe des sections planes (*Annales de l'École Normale;* 1877).

2. En particulier, si une surface réglée admet deux directrices rectilignes, les asymptotiques sont les courbes C dont les tangentes appartiennent aux divers complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont des droites conjuguées. M. Halphen a remarqué que ces courbes divisent harmoniquement les segments déterminés sur les génératrices par les directrices (*Bull. de la Soc. math.*, p. 134; 1877). Il est facile de reconnaître ce fait en remarquant que les surfaces considérées sont des transformées par homographie des conoïdes; or, pour le conoïde

$$y = ux, \qquad z = f(u),$$

les lignes asymptotiques sont données par

$$x^2 = Cf'(u), \qquad y^2 = Cu^2 f'(u), \qquad z = f(u);$$

l'axe situé à distance finie passe par le milieu du segment que détermine une asymptotique.

3. M. Halphen, dans la Note citée, dit que la classe des asymptotiques est égale à six fois l'excès de leur degré sur le degré de la surface. Ce nombre est trop élevé. L'ordre et la classe d'une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire s'expriment par le même nombre.

Donc, *pour les surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes, la classe des asymptotiques et leur ordre s'expriment par le même nombre.*

Si p et q sont les degrés de multiplicité des deux directrices, d étant le nombre des génératrices doubles, le degré de la surface est

$$m = p + q;$$

le degré et la classe des asymptotiques sont égaux à

$$2(pq - d).$$

4. Cette détermination se rapporte aux courbes C, dont les tangentes appartiennent à l'un des complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont conjuguées. Ou, autrement dit, elle n'est exacte que si les asymptotiques rencontrent deux fois chaque génératrice : il peut arriver que chaque courbe C se décompose en deux. Ainsi, pour les surfaces

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^{2p-1},$$

les asymptotiques sont

$$x = A t^{p-1}, \qquad y = A t^p, \qquad z = t^{2p-1},$$

A étant une constante. Les courbes C signalées par M. Picard se composent de deux asymptotiques correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de la constante A. La classe d'une section plane est en général $2(2p-1)$; le degré et la classe d'une asymptotique isolée sont égaux à $2p-1$.

5. Si les deux directrices de la surface considérée viennent à se confondre, le degré et la classe des asymptotiques sont toujours égaux; mais leur valeur commune est inférieure au nombre qui donne la classe d'une section plane. Ce fait s'explique, si l'on remarque que, dans ce cas, la droite Δ suivant laquelle les deux directrices sont confondues appartient aux complexes dont font partie les génératrices de la surface. La courbe C correspondant à un de ces complexes se compose donc d'une asymptotique et de la droite Δ. L'abaissement du degré des asymptotiques peut être de plusieurs unités. Je renvoie, pour cette question, à un Mémoire dans lequel M. Cremona, au moyen de la représentation des surfaces sur un plan, a évalué les degrés des asymptotiques des surfaces réglées unicursales qui ont deux directrices distinctes ou coïncidentes. (*Annali di Matematica,* 2e série, t. I, p. 248 à 258; 1867-1868.)

6. Il est d'ailleurs facile d'obtenir l'équation générale des surfaces gauches dont les génératrices font partie d'une congruence linéaire singulière. Les équations d'une droite rencontrant l'axe Oz peuvent s'écrire

$$\frac{X}{\sin\theta\cos\varphi} = \frac{Y}{\sin\theta\sin\varphi} = \frac{Z-\zeta}{\cos\theta}.$$

Si ζ, θ, φ sont fonctions d'une seule variable, la droite engendre une surface. Pour qu'elle rencontre une seconde directrice rectiligne,

$$X = a, \qquad Y = Z\tang\varepsilon,$$

il faut que ζ, θ, φ soient liées par l'équation

$$\zeta = a\tang\varphi\cot\varepsilon - \frac{a}{\cos\varphi}\cot\theta.$$

Si les deux directrices tendent à se confondre, on a

$$\zeta = m \operatorname{tang}\varphi,$$

en posant

$$\lim a \cot \varepsilon = m.$$

Les équations de la génératrice donnent alors

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X}, \qquad \cot\theta = \frac{ZX - mY}{X\sqrt{X^2+Y^2}} = \cos\varphi \frac{ZX - mY}{X^2},$$

de sorte que l'équation générale cherchée peut s'écrire

$$ZX - mY = X^2 F\left(\frac{Y}{X}\right).$$

7. Les coordonnées d'un point de la surface peuvent s'exprimer par

$$X = \lambda, \qquad Y = \lambda u, \qquad Z = mu + \lambda F(u);$$

toute relation entre λ et u définit une courbe sur la surface. Si l'on écrit que le plan osculateur à une courbe contient la génératrice, on trouve

$$2m \frac{d\lambda}{du} - \lambda^2 F''(u) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{2m}{C - F'(u)},$$

C étant une constante. Les asymptotiques sont donc données par

$$X = \frac{2m}{C - F'(u)}, \quad Y = \frac{2mu}{C - F'(u)}, \quad Z = \frac{2m F(u) - mu F'(u) + Cmu}{C - F'(u)}.$$

On a ainsi, d'après une remarque de M. Kœnigs (*Annales de la Faculté de Toulouse;* 1887), les équations générales des courbes qui ont Oz pour axe anharmonique, c'est-à-dire des courbes telles que les points où Oz est rencontré par les points osculateurs menés en quatre points quelconques ont même rapport anharmonique que les plans passant par Oz et par ces points.