BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 22-32
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__22_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles; par M. L. Raffy.

1. L'élément linéaire d'une spirale étant réductible à la forme

$$ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2)\, e^{\beta + \int A(\alpha)\, d\alpha}, \tag{1}$$

il faut d'abord déterminer la fonction A de manière que les lignes d'égale courbure ($R_1 R_2 =$ const.) soient parallèles.

La courbure totale, égalée à une fonction d'un nouveau paramètre u, nous donne

$$(2)\qquad A' e^{-\beta-\int A\,d\alpha} = e^{-U_0(u)},$$

relation qui revient à celle-ci

$$\beta = U_0(u) + \log A' - \int A\,d\alpha.$$

Dès lors l'élément linéaire, exprimé en u et α, prend la forme

$$ds^2 = A' U_0'^2 e^{U_0} du^2 + 2A'\left(\frac{A''}{A'} - A\right) U_0' e^{U_0} du\,d\alpha + A'\left[\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 + 1\right] e^{U_0} d\alpha^2.$$

En vertu de l'identité générale

$$E\,du^2 + 2F\,du\,d\alpha + G\,d\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{G} du^2 + \frac{1}{G}(F\,du + G\,d\alpha)^2,$$

nous pourrons l'écrire comme suit :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{U_0'^2 e^{U_0} du^2}{\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 + 1\right]} \\ & + e^{U_0} A' \frac{\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2}{\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 + 1} \left[U_0' du + \frac{\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 + 1}{\frac{A''}{A'} - A} d\alpha \right]^2; \end{aligned} \right.$$

et la surface sera rapportée aux lignes d'égale courbure $u =$ const. et à leurs trajectoires orthogonales. Ces trajectoires étant, par hypothèse, des géodésiques, la fonction U_0 doit pouvoir être choisie de façon que le coefficient de du^2 se réduise à l'unité. D'où ces deux conditions

$$(4)\qquad U_0'^2 e^{U_0} = \text{const.} = 2m,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{A'}\left[\left(\frac{A''}{A'} - A\right)^2 + 1\right] = \text{const.} = 2m.$$

La première donne immédiatement

$$\frac{U_0'}{2} e^{\frac{U_0}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2}}, \qquad e^{U_0} = \frac{mu^2}{2}, \qquad U_0' = \frac{2}{u}.$$

La seconde peut, comme je l'ai montré antérieurement (*Bull. de la Soc. mathém. de France,* t. XIX, p. 65) s'intégrer par quadrature. Si l'on tient compte de l'une et de l'autre, l'élément linéaire devient

$$(1)' \qquad ds^2 = du^2 + u^2(2mA' - 1)\left(\frac{du}{u} + \frac{mA'd\alpha}{\sqrt{2mA'-1}}\right)^2.$$

Effectuons le changement de variable

$$(6) \qquad \frac{du}{u} + \frac{mA'd\alpha}{\sqrt{2mA'-1}} = V_0(v)dv;$$

quelle que soit la fonction V_0, les courbes $v = \text{const.}$ seront les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure $u = \text{const.}$ Mais si l'on prend $V_0 v = 1$, l'équation précédente donne

$$m\int \frac{A'd\alpha}{\sqrt{2mA'-1}} = \log\frac{v}{u},$$

ce qui montre que α est une fonction du rapport $u : v$. Par suite, l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2} f\left(\frac{u}{v}\right) dv^2;$$

d'où cette conclusion : *quand une spirale à lignes d'égale courbure parallèles est rapportée à ces lignes $u = const.$ et aux géodésiques orthogonales $v = const.$, on peut toujours faire en sorte que son élément linéaire soit une fonction homogène de u et de v.*

2. Cela posé, rappelons que, quand on rapporte une surface à ses lignes d'égale courbure, *supposées parallèles,* et à leurs trajectoires orthogonales, l'élément linéaire prend la forme

$$(e) \qquad ds^2 = du^2 + W\frac{(U-V)^2}{U'} dv^2,$$

en appelant U une fonction de u, U' sa dérivée, V et W deux fonctions de v. Nous allons, en vertu de ce qui précède, pouvoir déterminer ces trois fonctions de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v. Nous aurons ainsi *toutes les formes possibles* de l'élément linéaire des spirales à lignes d'égale courbure parallèles.

Proposons-nous donc de satisfaire à l'équation

$$u\frac{\partial}{\partial u}\left[W\frac{(U-V)^2}{U'}\right] + v\frac{\partial}{\partial v}\left[W\frac{(U-V)^2}{U'}\right] = 0,$$

qui, développée et divisée par $W : U'$, peut s'écrire

$$(7)\qquad \left(\frac{W'v}{W} - \frac{U''u}{U'}\right)(U - V) + 2U'u - 2V'v = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre, prise par rapport à u et à v; il vient

$$(8)\qquad U'\left(\frac{W'v}{W}\right)' + V'\left(\frac{U''u}{U'}\right)' = 0.$$

L'hypothèse particulière $V' = 0$ donne des spirales applicables sur des surfaces de révolution. Elle entraîne

$$\frac{W'v}{W} = \text{const.} = -n, \qquad W = \frac{1}{v^n}.$$

Si, dans l'équation (7), nous faisons $V' = 0$, et, ce qui est permis, $V = 0$, en même temps que $W = v^{-n}$, nous obtenons une relation qui revient à

$$\frac{d}{du}\log\frac{U^2}{U'} = \frac{n}{u}.$$

On en déduit par une intégration immédiate l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^n}{v^n}dv^2,$$

qui convient à toutes les spirales applicables sur des surfaces de révolution. En effet, la condition $V = \text{const.}$ est nécessaire pour que l'élément linéaire (e) convienne à des surfaces de révolution, où les trajectoires des lignes d'égale courbure sont les méridiens.

3. Supposons maintenant $V' \neq 0$. L'équation (8) peut s'écrire

$$\frac{1}{V'}\left(\frac{W'v}{W}\right)' = -\frac{1}{U'}\left(\frac{U''u}{U'}\right)' = \text{const.} = -2m;$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(9)\qquad \frac{U''u}{U'} = 2mU - a, \qquad \frac{W'v}{W} = -2mV - b.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent

$$-2m(U^2 - V^2) + (a - b)(U - V) + 2U'u - 2V'v = 0,$$

ce qui exige qu'on aît séparément

$$2mU^2 - (a-b)U - 2U'u = \text{const.} = -2h,$$
$$2mV^2 - (a-b)V - 2V'v = \text{const.} = -2h.$$

Mais la première de ces relations, différentiée et rapprochée de la première des formules (9), entraîne $a+b=2$, ce qui conduit à poser $a = 1-2c$, $b = 1+2c$; alors les trois fonctions inconnues U, V, W sont déterminées par les équations

$$\frac{U'}{mU^2+2cU+h} = \frac{1}{u}, \qquad \frac{V'}{mV^2+2cV+h} = \frac{1}{v},$$
$$\frac{W'}{W} + \frac{2mV+2c+1}{v} = 0.$$

Les deux premières étant les mêmes, il suffit d'intégrer

$$\frac{dy}{my^2+2cy+h} = \frac{dx}{x}.$$

Il convient de distinguer trois cas principaux, suivant que le trinôme dénominateur est du second degré, s'abaisse au premier ou se réduit à une constante.

4. Premier cas : $m \neq 0$. — Nous pouvons remplacer c par mc, h par mh, et prendre

$$\frac{dy}{y^2+2cy+h} = m\frac{dx}{x}, \qquad \frac{W'}{W} + \frac{2m(V+c)+1}{v} = 0.$$

1° Si les racines du trinôme en y sont distinctes, nous aurons

$$\frac{dy}{(y+\alpha)(y+\beta)} = m\frac{dx}{x}, \qquad \frac{W'}{W} + \frac{m(2V+\alpha+\beta)+1}{v} = 0;$$

intégrant et désignant par A, B, C trois constantes arbitraires, il vient

$$U = -\alpha + \frac{\alpha-\beta}{1-Au^{m(\alpha-\beta)}}, \qquad V = -\alpha + \frac{\alpha-\beta}{1-Bv^{m(\alpha-\beta)}};$$

$$\frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{m(\alpha-\beta)}{v}\,\frac{1+Bv^{m(\alpha-\beta)}}{1-Bv^{m(\alpha-\beta)}} = 0, \qquad Wv = Cv^{-m(\alpha-\beta)}\left[1-Bv^{m(\alpha-\beta)}\right]^2;$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{C}{Am}\,\frac{u}{v}\left[A\left(\frac{u}{v}\right)^{m\frac{\alpha-\beta}{2}} - B\left(\frac{v}{u}\right)^{m\frac{\alpha-\beta}{2}}\right]^2 dv^2;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(10)\qquad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left[A_1\left(\frac{u}{v}\right)^n + B_1\left(\frac{v}{u}\right)^n\right]^2 dv^2,$$

avec trois nouvelles arbitraires A_1, B_1 et n.

2° Si les racines du trinôme en y sont égales, on a

$$U = -c + \frac{1}{\log A u^m}, \qquad V = -c + \frac{1}{\log B v^m};$$

$$\frac{W'}{W} + \frac{1}{v} + \frac{2m}{v \log B v^m} = 0, \qquad W v = C(\log B v^{m^2});$$

$$ds^2 = du^2 + Cm\,\frac{u}{v}\left(\log\frac{A u^m}{B v^m}\right)^2 dv^2;$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11)\qquad ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left(A_1 \log\frac{u}{v} + B_1\right)^2 dv^2.$$

Second cas : $m = 0$, $c \neq 0$. — Remplaçons h par $2ch$; il viendra

$$\frac{dy}{y+h} = 2c\,\frac{dx}{x}, \qquad \frac{W'}{W} + \frac{2c+1}{v} = 0;$$

d'où, en intégrant et désignant par A, B, C trois arbitraires,

$$U = -h + A u^{2c}, \qquad V = -h + B v^{2c}, \qquad W = C v^{-2c-1};$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{C}{2Ac}\,\frac{u}{v}\left[A\left(\frac{u}{v}\right)^c - B\left(\frac{v}{u}\right)^c\right]^2 dv^2.$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (10).

Troisième cas : $m = 0$, $c = 0$. — On a simplement

$$dy = h\,\frac{dx}{x}, \qquad \frac{W'}{W} + \frac{1}{v} = 0.$$

L'intégration donne, avec trois constantes arbitraires,

$$U = \log A u^h, \qquad V = \log B v^h, \qquad W v = C;$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{C}{h}\,\frac{u}{v}\left(\log\frac{A u^h}{B v^h}\right)^2 dv^2.$$

Cet élément linéaire rentre dans le type (11).

5. En conséquence, *tout élément linéaire de spirale à lignes*

d'égale courbure parallèles, quand on rapporte la surface à ces lignes et aux géodésiques orthogonales, prend l'une des deux formes

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left[A\left(\frac{u}{v}\right)^n + B\left(\frac{v}{u}\right)^n\right]^2 dv^2,$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left(A \log \frac{u}{v} + B\right)^2 dv^2.$$

Ces deux types, dont le second peut être considéré comme une dégénérescence du premier, contiennent la solution complète du problème que nous nous étions proposé. Il suffit de supposer dans le premier $AB = 0$ pour retrouver l'élément linéaire primitivement obtenu, qui convient à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

6. On peut arriver aux résultats qui précèdent en continuant les transformations commencées au n° **1**. A cet effet, reprenons l'élément linéaire (1)′, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 (2mA' - 1) dv^2,$$

moyennant le changement de variable

$$\frac{mA'\,d\alpha}{\sqrt{2mA' - 1}} = V_0(v)\,dv - \frac{du}{u}, \tag{6}$$

où A désigne la fonction de α définie par la relation (5).

Si nous représentons par dr le second membre de l'équation (6), A sera une fonction de r et nous pourrons poser

$$\frac{A''}{A'} - A = R(r). \tag{12}$$

Mais, en vertu de l'équation (5), il vient

$$R^2 = 2mA' - 1, \qquad A' = \frac{R^2 + 1}{2m},$$

d'où, substituant dans la relation (6),

$$\frac{R^2 + 1}{2R}\,d\alpha = dr. \tag{6)'$$

Or, en prenant la différentielle logarithmique de A′, nous trouvons

$$\frac{A''}{A'}\,d\alpha = \frac{2R}{R^2 + 1} R'\,dr.$$

ce qui, en tenant compte de $(6)'$, revient à

(13) $$\frac{A''}{A'} = R';$$

d'où, par comparaison avec (12),

(14) $$A = R' - R.$$

Différentions encore, en ayant égard à l'équation $(6)'$; nous arrivons facilement à la relation

(15) $$m(R'' - R') - R = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'intégration donne R. Une fois cette fonction connue, l'élément linéaire, qui peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + u^2 V_0^2 R^2 dv^2,$$

ne dépend plus que de la fonction V_0. Nous allons déterminer cette fonction de manière que le coefficient de dv^2 soit une fonction homogène et de degré zéro de u et de v.

Ce coefficient étant égal à $u^2 V_0^2(2mA' - 1)$, nous devons satisfaire à l'identité

$$u \frac{\partial}{\partial u}[u^2 V_0^2(2mA' - 1)] + v \frac{\partial}{\partial v}[u^2 V_0^2(2mA' - 1)] = 0.$$

Mais de l'équation (6), qui définit α comme fonction de u et de v, nous tirons

$$\frac{mA'}{\sqrt{2mA' - 1}} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\frac{1}{u}, \qquad \frac{mA'}{\sqrt{2mA' - 1}} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = V_0.$$

Si l'on substitue ces expressions des dérivées de α dans l'identité proposée, il vient, tous calculs faits,

$$\sqrt{2mA' - 1}\,(V_0 v)' + \frac{A''}{A'} V_0(V_0 v - 1) = 0.$$

7. Cette équation admet, quelle que soit la fonction A, la solution évidente $V_0 v = 1$, que nous avons déjà rencontrée. Elle n'en peut d'ailleurs admettre d'autres que celles-ci

$$\frac{-(V_0 v)'}{V_0(V_0 v - 1)} = \frac{A''}{A'\sqrt{2mA' - 1}} = \text{const.} = n + 1.$$

Cherchons avant tout à déterminer la fonction V_0 ; nous avons

$$\frac{(V_0 v)'}{V_0 v(V_0 v - 1)} + \frac{n+1}{v} = 0,$$

d'où, intégrant et résolvant,

$$V_0 = \frac{v^n}{v^{n+1} - h}, \qquad (h = \text{const.}). \tag{16}$$

L'équation (6) donne alors

$$r = \int V_0 dv - \log u = \log \frac{k}{u} (v^{n+1} - h)^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (k = \text{const.}). \tag{17}$$

Quant à la fonction R, nous l'obtiendrons en rapprochant les deux équations que doit vérifier la fonction A, savoir l'équation (5) et celle qui vient d'être obtenue

$$\sqrt{2mA' - 1} = \frac{A''}{A'} - A, \qquad \frac{A''}{A'\sqrt{2mA' - 1}} = n + 1.$$

En multipliant membre à membre, on trouve

$$n\left(\frac{A''}{A'} - A\right) = A = nR, \tag{18}$$

à cause de l'équation (12). Mais en vertu de l'équation (13), ceci peut encore s'écrire

$$R' - nR = R, \qquad \frac{R'}{R} = n + 1;$$

d'où, en intégrant et désignant par g une constante arbitraire,

$$R = g e^{(n+1)r}.$$

D'après l'expression (17), trouvée pour r, nous aurons

$$R = g^{n+1} \frac{v^{n+1} - h}{u^{n+1}};$$

d'où, substituant R et V_0 dans l'élément linéaire et désignant par C une constante arbitraire,

$$ds^2 = du^2 + C\left(\frac{v}{u}\right)^{2n} dv^2. \tag{e)'$$

On voit que cet élément linéaire convient à des surfaces de révolution en même temps qu'à des spirales. La fonction A doit satisfaire aux deux équations

$$(18) \qquad n\mathrm{A}'' - (n+1)\mathrm{A}\mathrm{A}' = 0,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{A}'} - \mathrm{A}\right)^2 = 2m\mathrm{A}' - 1,$$

dont la combinaison donne successivement

$$n^2(2m\mathrm{A}' - 1) - \mathrm{A}^2 = 0, \qquad mn^2\mathrm{A}'' - \mathrm{A}\mathrm{A}' = 0,$$

en sorte que m doit être égal à l'inverse de $n(n+1)$. Dès lors les deux équations (5) et (18) se réduisent à une seule

$$n\mathrm{A}'' - (n+1)\mathrm{A}\mathrm{A}' = 0,$$

qui, par deux intégrations successives, donne facilement

$$\mathrm{A} = n \operatorname{tang} \frac{n+1}{2}(\alpha - \alpha_0).$$

C'est, aux notations près, le résultat que nous avions trouvé précédemment (*loc. cit.*).

8. Revenons maintenant à l'hypothèse $\mathrm{V}_0 v = 1$, qui laisse à la fonction A toute sa généralité. On en déduit

$$r = \int \mathrm{V}_0\, dv - \log u = \int \frac{dv}{v} - \log u = \log \frac{u}{v}.$$

L'élément linéaire devient

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^2}{v^2}\mathrm{R}^2 dv^2.$$

Il suffit donc, pour le connaître entièrement, de déterminer la fonction R de r que définit l'équation (15). Pour simplifier les notations dans ce qui suivra, nous écrirons

$$(15)' \qquad \mathrm{R}'' - \mathrm{R}' - n(n-1)\mathrm{R} = 0, \qquad m = \frac{1}{n(n-1)}.$$

De la sorte, l'équation caractéristique sera

$$t(t-1) = n(n-1),$$

et admettra pour racines n et $1-n$. Nous avons donc à distinguer deux cas, suivant que ces racines sont inégales ou égales.

Premier cas : $2n - 1 \neq 0$. — Les racines de l'équation caractéristique étant inégales, l'équation $(15)'$ a pour intégrale générale

$$R = Ce^{nr} + De^{(1-n)r},$$

C et D étant deux constantes arbitraires; d'où, en remplaçant r par son expression,

$$R = C\left(\frac{v}{u}\right)^n + D\left(\frac{v}{u}\right)^{1-n}.$$

L'élément linéaire devient alors

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left[C\left(\frac{v}{u}\right)^{n-\frac{1}{2}} + D\left(\frac{u}{v}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]^2 dv^2;$$

c'est, aux notations près, la formule (10). L'hypothèse $CD = 0$ donne l'élément linéaire $(e)'$ trouvé d'abord.

Second cas : $2n - 1 = 0$. — L'équation $(15)'$ a pour intégrale

$$R = (Cr + D)e^{\frac{r}{2}};$$

d'où, en ayant égard à l'expression de r,

$$R = \sqrt{\frac{v}{u}}\left(C \log \frac{v}{u} + D\right).$$

L'élément linéaire se réduit alors à

$$ds^2 = du^2 + \frac{u}{v}\left(C \log \frac{v}{u} + D\right)^2 dv^2.$$

C'est, aux notations près, la formule (11). Nous retrouvons ainsi les conclusions du n° 3.