Bulletin de la S. M. F.

M. Frolov

Égalités à deux et à trois degrés

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 69-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__69_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Égalités à deux et à trois degrés; par M. Michel FROLOV.

> Le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et, sous ce titre une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.
>
> JACOBI à LEGENDRE.

1. Dans notre Mémoire *Sur les égalités à deux degrés*, en 1889, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France,* nous avons démontré que les égalités à plusieurs degrés, consécutifs et entiers, sont susceptibles de différentes transformations. Ainsi, on peut augmenter ou diminuer de la même quantité tous les termes d'une égalité; les multiplier ou diviser par la même quantité; retrancher tous ces termes d'une même quantité, additionner les égalités les unes aux autres, etc.

Dans ce second Mémoire, nous voulons compléter ces études relativement aux égalités à deux et à trois degrés.

2. Appelons S_1, S_2 et S_3 les sommes des premières, deuxièmes et troisièmes puissances des nombres d'un groupe, et conservons les signes $\perp$ et Δ pour désigner les égalités à deux et à trois degrés, que nous avons adoptés dans le premier Mémoire.

Prenons l'égalité à trois degrés composée des plus petits nombres

$$1,\ 5,\ 8,\ 12 \Delta 2,\ 3,\ 10,\ 11 \quad (S_1 = 26;\quad S_2 = 234;\quad S_3 = 2366).$$

Augmentons tous les termes de 2,

$$3,\ 7,\ 10,\ 14 \Delta 4,\ 5,\ 12,\ 13,$$

et additionnons les deux égalités, en supprimant les nombres communs à deux groupes,

$$1,\ 7,\ 8,\ 14 \Delta 2,\ 4,\ 11,\ 13 \quad (S_1 30;\quad S_2 = 310;\quad S_3 = 3600).$$

Cette égalité se déduit aussi directement de l'identité

$$1,\ 4,\ 2,\ 5 \Delta 2,\ 1,\ 5,\ 4,$$

en ajoutant à ses termes la suite additionnelle 0, 1, 2, 3, jusqu'à ce que tous les termes prennent des valeurs différentes, comme nous l'avons fait dans le n° 9 du premier Mémoire, pour former les égalités à deux degrés. En continuant l'addition de cette suite, on obtient

$$\begin{array}{l}
1,\ 8,\ 10,\ 17 \Delta 2,\ 5,\ 13,\ 16 (36;\ 454;\ 6426),\\
1,\ 9,\ 12,\ 20 \Delta 2,\ 6,\ 15,\ 19 (42;\ 626;\ 10458),\\
1,\ 10,\ 14,\ 23 \Delta 2,\ 7,\ 17,\ 22 (48;\ 826;\ 15912),\\
1,\ 11,\ 16,\ 26 \Delta 2,\ 8,\ 19,\ 25 (54;\ 1054;\ 23004),\\
1,\ 12,\ 18,\ 29 \Delta 2,\ 9,\ 21,\ 28 (68;\ 1310;\ 31950),\\
1,\ 13,\ 20,\ 32 \Delta 2,\ 10,\ 23,\ 31 (66;\ 1594;\ 42966),
\end{array}$$

et ainsi de suite.

On peut déduire de ces égalités une grande quantité d'autres au moyen des transformations indiquées plus haut. Par exemple, en additionnant les termes des deux dernières et en les diminuant de l'unité, on trouve

$$1,\ 24,\ 37,\ 60 \Delta 3,\ 18,\ 43,\ 58 (122;\ 5546;\ 280478).$$

Voici encore quelques égalités de cinq, six et sept termes :

$$
\begin{array}{rl}
1,\ 4,\ 8,\ 12.\ 17 \Delta 2,\ 3,\ 7,\ 14,\ 16, & (42;\ 514;\ 7218). \\
1,\ 6,\ 10,\ 14,\ 17 \Delta 2,\ 4,\ 11,\ 15,\ 16 & (48;\ 622;\ 8874), \\
1,\ 4,\ 6,\ 9,\ 11,\ 14 \Delta 2,\ 3,\ 5,\ 10,\ 12,\ 13 & (45;\ 451;\ 5085), \\
1,\ 5,\ 6,\ 12,\ 13,\ 17 \Delta 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 16 & (54;\ 664;\ 9180), \\
1,\ 10,\ 23,\ 27,\ 31,\ 44,\ 69 \Delta 3,\ 11,\ 20,\ 21,\ 34,\ 49,\ 67 & (205;\ 9017;\ 476335), \\
1,\ 14,\ 24,\ 28,\ 32,\ 45,\ 70 \Delta 4,\ 12,\ 21,\ 25,\ 34,\ 50,\ 68 & (214;\ 9506;\ 505414).
\end{array}
$$

Ces exemples suffisent pour montrer avec quelle facilité se forment les égalités à trois degrés.

3. S'il y a égalité des sommes des premières et des troisièmes puissances des termes de deux ou de plusieurs groupes, il n'en résulte pas qu'il existe aussi l'égalité des sommes de leurs deuxièmes puissances, comme le font voir les exemples suivants :

On a

$$
(1) \quad \begin{cases} 1+8+13+14=2+7+12+15= \quad 36, \\ 1^3+8^3+13^3+14^3=2^3+7^3+12^3+15^3=5454. \end{cases}
$$

Mais

$$1^2+8^2+13^2+14^2=430,$$

et

$$2^2+7^2+12^2+15^2=422.$$

On a

$$
(2) \quad \begin{cases} 1+5+10+14+19=2+4+9+16+18= \quad 49, \\ 1^3+5^3+10^3+14^3+19^3=2^3+4^3+9^3+16^3+18^3=10729. \end{cases}
$$

Mais

$$1^2+5^2+10^2+14^2+19^2=683,$$

et

$$2^2+4^2+9^2+16^2+18^2=681.$$

On peut aussi avoir égalité des sommes des troisièmes puissances, sans égalité des sommes ni des premières, ni des deuxièmes puissances. Par exemple, on a

$$1^3+3^3+5^3+11^3+13^3=2^3+6^3+9^3+10^3+12^3=3681,$$

tandis que

$$
\begin{array}{lcl}
1^2+3^2+5^2+11^2+13^2=325 & \text{et} & 2^2+6^2+9^2+10^2+12^2=365, \\
1+3+5+11+14= \quad 33 & \text{et} & 2+6+9+10+12= \quad 39.
\end{array}
$$

Remarquons encore que l'égalité des sommes des puissances de degrés entiers n'est jamais suivie de celle des sommes des puissances de degrés fractionnaires, ce qui est évident, car les radicaux aux indices fractionnaires sont des nombres irrationnels.

Voici un exemple qui fera voir comment balancent les sommes pour les degrés fractionnaires en devenant plus grandes, tantôt pour l'un, tantôt pour l'autre groupe :

$$1^0+14^0+22^0+35^0=2^0+11^0+25^0+34^0= \quad 4,$$

$$1^{\frac{1}{2}}+14^{\frac{1}{2}}+22^{\frac{1}{2}}+35^{\frac{1}{2}}= \quad 15,25, \qquad 2^{\frac{1}{2}}+11^{\frac{1}{2}}+25^{\frac{1}{2}}+34^{\frac{1}{2}}= \quad 15,56,$$

$$1^1+14^1+22^1+35^1=2^1+11^1+25^1+34^1= \quad 72,$$

$$1^{\frac{3}{2}}+14^{\frac{3}{2}}+22^{\frac{3}{2}}+35^{\frac{3}{2}}= \quad 363,63, \qquad 2^{\frac{3}{2}}+11^{\frac{3}{2}}+25^{\frac{3}{2}}+34^{\frac{3}{2}}= \quad 362,56,$$

$$1^2+14^2+22^2+35^2=2^2+11^2+25^2+34^2= \quad 1906,$$

$$1^{\frac{5}{2}}+14^{\frac{5}{2}}+22^{\frac{5}{2}}+35^{\frac{5}{2}}=10251,00, \qquad 2^{\frac{5}{2}}+11^{\frac{5}{2}}+25^{\frac{5}{2}}+34^{\frac{5}{2}}=10273,00,$$

$$1^3+14^3+22^3+35^3=2^3+11^3+25^3+34^3=56268.$$

4. La méthode employée dans le premier Mémoire pour la répartition en plusieurs groupes égaux à deux degrés d'une progression arithmétique peut aussi être appliquée à la répartition des nombres en groupes égaux à trois et à plus de degrés.

Soit une progression des nombres naturels,

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (m-2),\quad (m-1),\quad m,\quad (m+1),\quad (m+2),\quad (m+3)\ \ldots\ 2m.$$

Nommons R la somme des cubes de deux nombres du milieu m et $(m+1)$ et u la quantité $(12m+6)$. Alors les sommes des cubes

$$(m-1)^3+(m+2)^3,\quad (m-2)^3+(m+3)^3,\quad (m-3)^3+(m+4)^3,\quad \ldots$$

seront respectivement égales à

$$\mathrm{R}+u,\quad \mathrm{R}+3u,\quad \mathrm{R}+6u,\quad \mathrm{R}+10u,\quad \ldots,$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier la quantité u par les nombres figurés du premier ordre ou nombres triangulaires

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ \ldots,\ \frac{m(m+1)}{2}.$$

Il s'ensuit que pour répartir $2m$ nombres consécutifs en m groupes égaux à trois degrés, il suffit de répartir en m groupes égaux à un degré les $(m-1)$ premiers nombres triangulaires, en y ajoutant 0, dont la somme est égale au nombre figuré du second ordre ou nombre pyramidal $\frac{(m-1)m(m+1)}{6}$.

5. Il est possible de répartir en deux groupes les huit premiers nombres triangulaires

$$0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,$$

dont la somme est égale à 84, car on a

$$0+6+15+21=1+3+10+28=42.$$

Dans ce cas $m=8$. En remplaçant les nombres triangulaires par des couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16 \,\Delta\, 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 14,\ 15,$$

donnant les sommes

$$S_1=68, \qquad S_2=748, \qquad S_3=9248.$$

La somme des premiers dix-huit nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 969, on peut les répartir en trois groupes de 323, des deux manières suivantes :

1.

$$\begin{aligned} 0+15+28+55+105+120 &= 1+10+36+45+78+153 \\ &= 3+6+21+66+91+136. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0+15+36+45+91+136 &= 1+10+21+66+105+120 \\ &= 3+6+28+55+78+153, \end{aligned}$$

qui donnent deux systèmes de répartition des trente-six nombres

1.

$$1,\ 6,\ 9,\ 10,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 27,\ 28,\ 31,\ 36 \,\Delta,$$
$$2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 25,\ 30,\ 32,\ 35 \,\Delta,$$
$$3,\ 4,\ 8,\ 11,\ 13,\ 18,\ 19,\ 24,\ 26,\ 29,\ 33,\ 34.$$

2.

$$1,\ 6,\ 8,\ 11,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ 26,\ 29,\ 31,\ 36 \,\Delta,$$
$$2,\ 5,\ 9,\ 10,\ 13,\ 18,\ 19,\ 24,\ 27,\ 28,\ 32,\ 35 \,\Delta,$$
$$3,\ 4,\ 7,\ 12,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 25,\ 30,\ 33,\ 34,$$

pour lesquels

$$S_1=222, \qquad S_2=5402, \qquad S_3=147852.$$

La somme des vingt-cinq premiers nombres triangulaires, y compris 0, étant égale à 2600, on peut répartir ces nombres en cinq groupes de 520 :

$$\begin{aligned}
0 + 45 + 55 + 120 + 300,\\
1 + 28 + 91 + 190 + 210,\\
3 + 15 + 78 + 171 + 253,\\
6 + 36 + 66 + 136 + 276,\\
10 + 21 + 105 + 153 + 231.
\end{aligned}$$

En remplaçant les nombres triangulaires par les couples de nombres correspondants, on aura l'égalité à trois degrés :

$$\begin{array}{llllllllll}
1, & 10, & 15, & 16, & 25, & 26, & 35, & 36, & 41, & 50\Delta,\\
2, & 9, & 14, & 17, & 22, & 29, & 34, & 37, & 42, & 49\Delta,\\
3, & 7, & 13, & 20, & 23, & 28, & 31, & 38, & 44, & 48\Delta,\\
4, & 8, & 11, & 19, & 21, & 30, & 32, & 40, & 43, & 47\Delta,\\
5, & 6, & 12, & 18, & 24, & 27, & 33, & 39, & 45, & 46,
\end{array}$$

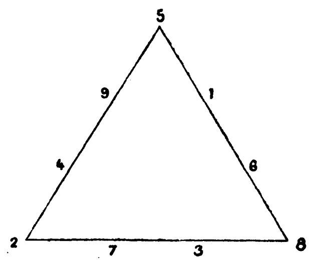
qui donne

$$S_1 = 255, \qquad S_2 = 8585, \qquad S_3 = 325125.$$

6. Dans notre premier Mémoire, nous n'avons donné qu'une méthode pour la répartition de $2n^2$ nombres en n groupes égaux à deux degrés. Mais, comme ces égalités furent dernièrement appliquées à des figures plus ou moins intéressantes, il ne sera pas de trop de revenir à ces égalités pour en dire quelques mots.

On commença par disposer des nombres appartenant à des

Fig. 1.



groupes égaux à deux degrés sur les périmètres des triangles et des carrés, comme le montrent les *fig.* 1, 2, 3.

L'égalité représentée par la *fig.* 1 s'obtient de la manière suivante :

On prend deux égalités données dans le premier Mémoire

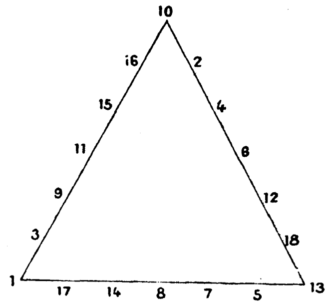
$$1,\ 5,\ 6 \perp 2,\ 3,\ 7, \qquad 1,\ 6,\ 8 \perp 2,\ 4,\ 9.$$

En remarquant que les premiers groupes de ces égalités ne diffèrent entre eux que par les nombres 5 et 8, on ajoute à la première le 4^e terme 8 et à la seconde 5, et l'on obtient trois groupes égaux

$$1,\ 5,\ 6,\ 8 \perp 2,\ 3,\ 7,\ 8 \perp 2,\ 4,\ 5,\ 9 \qquad (S_1 = 20,\ S_2 = 126).$$

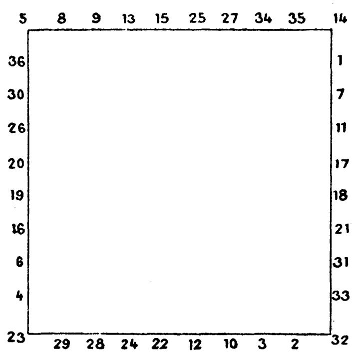
Voici les égalités de ces figures :

Fig. 2.



$$1,\ 3,\ 9,\ 10,\ 11,\ 15,\ 16 \perp 1,\ 5,\ 7,\ 8,\ 13,\ 14,\ 17 \perp 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 13,\ 18$$
$$(S_1 = 65,\ S_2 = 793).$$

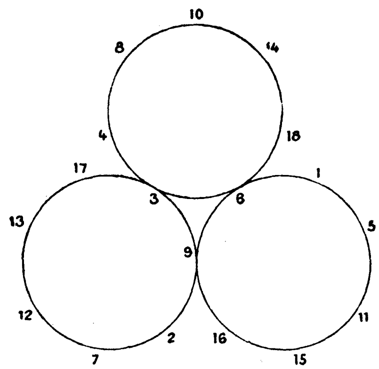
Fig. 3.



$$\begin{array}{l}
1,\ 7,\ 11,\ 14,\ 17,\ 18,\ 21,\ 31,\ 32,\ 33 \perp \\
2,\ 3,\ 10,\ 12,\ 22,\ 23,\ 24,\ 28,\ 29,\ 32 \perp \\
4,\ 5,\ 6,\ 16,\ 19,\ 20,\ 23,\ 26,\ 30,\ 36 \perp \\
5,\ 8,\ 9,\ 13,\ 14,\ 15,\ 25,\ 27,\ 34,\ 35
\end{array}$$
$$(S_1 = 185,\ S_2 = 4495).$$

On pourrait aussi disposer ces groupes sur les circonférences des cercles tangents entre eux, en plaçant les nombres qui se ré-

Fig. 4.



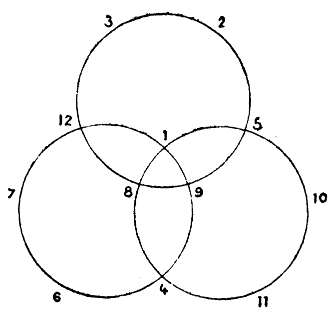
pètent dans deux groupes et se trouvent aux angles, aux points de contact, comme le montre la *fig.* 4, qui représente l'égalité

$$1,\ 5,\ 6,\ 9,\ 11,\ 15,\ 16 \perp 2,\ 3,\ 7,\ 9,\ 12,\ 13,\ 17 \perp 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 14,\ 18$$
$$(S_1 = 63,\quad S_2 = 745).$$

Si les groupes ont deux nombres communs entre eux, ils peuvent être représentés par des cercles qui se coupent, comme le montrent les *fig.* 5, 6 et 7.

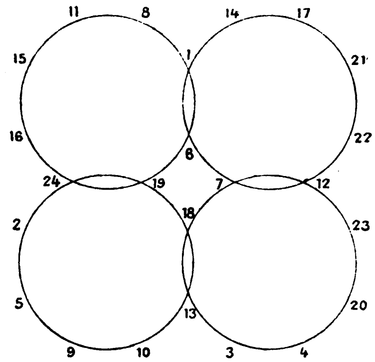
Voici leurs égalités :

Fig. 5.



$$1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11 \perp 1\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12 \perp 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12$$
$$(S_1 = 39,\quad S_2 = 323).$$

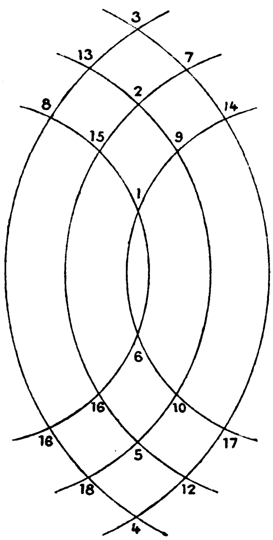
Fig. 6.



1, 6, 7, 12, 14, 17, 21, 22 $\perp$ 1, 6, 8, 11, 15, 16, 19, 24 $\perp$
2, 5, 9, 10, 13, 18, 19, 24 $\perp$ 3, 4, 7, 12, 13, 18, 20, 23 $\perp$

($S_1 = 100$, $S_2 = 1640$).

Fig. 7.



1, 6, 8, 11, 15, 16 $\perp$ 1, 6, 9, 10, 14, 17 $\perp$ 2, 5, 7, 12, 15, 16 $\perp$
2, 5, 9, 10, 13, 18 $\perp$ 3, 4, 7, 12, 14, 17 $\perp$ 3, 4, 8, 11, 13, 18

($S_1 = 57$, $S_2 = 703$).

Les plus intéressantes des figures numériques de cette espèce sont les carrés magiques à deux degrés qui, sous le rapport de la difficulté, surpassent de beaucoup les carrés magiques ordinaires, ou à un degré, dont des mathématiciens se sont occupés jusqu'ici.

C'est M: G. Pfeffermann qui le premier publia des carrés à deux degrés dans les *Tablettes du Chercheur*.

Nous donnons à la page en regard deux carrés de 8 et de 9, à deux degrés.

Dans le premier, les rangées horizontales et verticales, et les deux diagonales donnent $S_1 = 260$ et $S_2 = 11180$; et dans le second $S_1 = 369$ et $S_2 = 20049$.

7. Les carrés dont les rangées sont identiques étant composés des mêmes nombres, et qui ne diffèrent entre eux que par l'arrangement et la disposition de ces rangées, ne forment que des variantes d'un même type. Il est évident que les carrés à deux et à plusieurs degrés sont susceptibles des mêmes transformations que les carrés ordinaires.

Il y a trois espèces de transformations générales des carrés que nous avons signalées dans une Note présentée, en 1886, au Congrès de Nancy de l'Association française pour l'avancement des Sciences : 1° la rupture des carrés en deux parties, avec leur interversion ; 2° la transposition des cadres composés chacun de quatre rangées, deux horizontales et deux verticales, également éloignées du centre, en éloignant les uns et en rapprochant les autres cadres du centre ; et 3° le retournement des cadres, avec la transposition simultanée des quatre rangées de chaque cadre, de sorte que la rangée supérieure passe en bas, la rangée gauche passe à droite et réciproquement la rangée inférieure en haut et celle de droite à gauche.

Le nombre des variantes déterminé par les deux dernières transformations est égal pour n pair à

$$2^{\frac{n-2}{2}} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \frac{n-2}{2},$$

et pour n impair à

$$2^{\frac{n-3}{2}} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \frac{n-3}{2}.$$

La rupture des carrés magiques donne deux variantes, le carré

45	23	1	59	26	36	54	16
40	30	12	50	19	41	63	5
22	48	58	4	33	27	13	55
31	37	51	9	44	18	8	62
3	57	47	21	56	14	28	34
10	52	38	32	61	7	17	43
60	2	24	46	15	53	35	25
49	11	29	39	6	64	42	20

4	77	35	11	46	57	42	27	70
63	52	1	32	24	67	17	74	39
68	33	18	75	2	37	22	61	53
73	38	23	62	16	54	3	69	31
26	72	48	76	41	6	34	10	56
51	13	79	28	66	20	59	44	9
29	21	60	45	80	7	64	49	14
43	8	65	15	58	50	81	30	19
12	55	40	25	36	71	47	5	78

primordial y compris; pour les carrés semi-diaboliques, elle produit quatre variantes et pour les carrés diaboliques n^2 variantes.

Le total des variantes d'un carré semi-magique, dans lequel l'une ou les deux diagonales donnent les sommes autres que S_1 et S_2, est égal à

$$(P_n)^2 = (1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n)^2.$$

8. Outre cela, tout carré dont les rangées ne sont ni complémentaires les unes des autres, ni composées de nombres complémentaires, fournit un carré complémentaire, en y remplaçant tous les nombres par leurs compléments, ce qui ne trouble pas l'égalité à plusieurs degrés, comme le montre le théorème II du premier Mémoire.

On peut encore modifier les carrés et les autres figures à plusieurs degrés, en remplaçant les nombres naturels par des nombres correspondants de toute autre progression arithmétique. On peut aussi, en partageant la série des nombres naturels en m sections de p nombres, augmenter les termes des sections de quantités différentes pour toutes les sections, et puis remplacer les nombres naturels par des nombres ainsi modifiés, si les groupes sont composés des nombres pris dans toutes les sections. Par exemple, en partageant la série de 18 nombres naturels en 6 sections

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17, 18

on peut, en laissant les nombres de la première section sans augmentation, augmenter ceux des autres sections respectivement de 1, 2, 3, 4 et 5, et en remplaçant par les nombres modifiés de cette façon les nombres naturels de l'égalité

$$1, 6, 9, 10, 14, 17 \perp 2, 5, 7, 12, 15, 16 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18$$
$$(S_1 = 57, \quad S_2 = 703),$$

en déduire l'égalité suivante :

$$1, 7, 11, 13, 18, 22 \perp 2, 6, 9, 15, 19, 21 \perp 3, 5, 10, 14, 17, 23$$
$$(S_1 = 72, \quad S_2 = 1148).$$

Mais toutes les modifications de ce genre ne constituent pas de solutions particulières.

9. Établissons l'impossibilité des carrés magiques à deux degrés pour des valeurs de la racine n inférieures à 8.

Les formules générales

$$S_1 = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n^3+n}{2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{n(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$$

donnent pour

$n=3$:	$S_1 = 15$;	$S_2 = 95$,
$n=4$:	$S_1 = 34$;	$S_2 = 374$,
$n=5$:	$S_1 = 65$;	$S_2 = 1105$,
$n=6$:	$S_1 = 111$;	$S_2 = 2701$,
$n=7$:	$S_1 = 175$;	$S_2 = 5775$.

On remarque que S_1 et S_2 ont la même terminaison ou chiffre final pour toutes les valeurs de n. Cela provient de ce que la cinquième puissance de tout nombre a la même terminaison que le nombre lui-même. Par exemple $2^5 = 32$; $3^5 = 243$; $7^5 = 16807$; .... Et comme la différence $S_2 - S_1 = \frac{n^5 - n}{3}$ et le diviseur 3 est premier avec 10, il en résulte que cette différence est un multiple de 10, et par conséquent S_1 et S_2 ont nécessairement la même terminaison.

Remarquons encore que les carrés de tous les nombres impairs sont toujours de la forme $(4h+1)$. Donc, si la somme S_2 est de la forme $(4h+1)$, les groupes de nombres doivent contenir 1, 5, 9, ... impairs et n'en peuvent pas contenir 3, 7, 11, ... Au contraire, si S_2 est de la forme $(4h+3)$ les groupes ne pourront contenir 1, 5, 9, ... impairs.

L'impossibilité des carrés magiques à deux degrés se voit immédiatement pour $n = 3$ et 4, car parmi les 8 groupes de trois nombres donnant $S_1 = 15$:

1, 5, 9; 1, 6, 8; 2, 4, 9; 2, 5, 8; 2, 6, 7; 3, 4, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6;

aucun ne donne $S_2 = 95$, et pour $n = 4$, de 86 groupes donnant $S_1 = 34$, il n'y a que deux :

2, 8, 9, 15 et 3, 5, 12, 14

qui donnent $S_2 = 374$.

Pour $n = 5$, $S_2 = 1105$ étant de la forme $(4h+1)$, on ne peut disposer dans le carré les 13 impairs qu'en prenant deux rangées de 5 impairs et trois de 1 impair et de 4 pairs. Or, parmi les 1394 groupes donnant $S_1 = 65$, pas un seul composé de 5 impairs ne donne $S_2 = 1105$.

Pour $n = 6$, on trouve deux systèmes de répartition en 6 groupes égaux à deux degrés :

I.	II.
1, 8, 22, 24, 26, 30	1, 10, 18, 24, 26, 32
2, 12, 17, 18, 28, 24	2, 12, 14, 22, 28, 33
3, 9, 19, 20, 25, 35	3, 7, 20, 21, 29, 31
4, 5, 21, 23, 27, 31	4, 9, 15, 23, 25, 35
6, 10, 14, 16, 32, 33	5, 11, 13, 19, 27, 36
7, 11, 13, 15, 29, 36	6, 8, 16, 17, 30, 34

Mais ces deux systèmes ne se prêtent pas à la formation d'un carré magique, ce qui est d'ailleurs impossible, à cause de l'impossibilité de disposer dans le carré les 18 impairs de telle manière qu'il y ait trois rangées horizontales et verticales à 5 impairs et trois à 1 impair.

Enfin pour $n = 7$, $S_2 = 5775$ étant de la forme $(4h + 3)$, les 25 impairs doivent être distribués dans six rangées à 3 impairs et une rangée à 7 impairs. Or aucun des groupes de 7 impairs donnant $S_1 = 175$ ne donne $S_2 = 5775$.

10. Ainsi la construction des carrés magiques à deux degrés ne devient possible que pour $n = 8$ et au-dessus de 8.

Sans entrer ici dans les détails de la construction de ces carrés, nous nous bornerons à donner deux procédés de transformation des groupes de nombres qui permettront de déduire rapidement d'un seul groupe beaucoup d'autres égaux à deux degrés. On pourra ainsi dresser en peu de temps des Tables de tous les groupes de n nombres, si n n'est pas trop grand, qui serviront à la formation de tous les systèmes de répartition de n^2 nombres, ainsi qu'à la construction des figures numériques à deux degrés.

Le premier procédé consiste à prendre dans le groupe donné quatre nombres a, b, c, d, tous pairs ou impairs, ou deux pairs et deux impairs, tels que la différence de la somme des extrêmes $(a + d)$ et de celle des moyens $(b + c)$ soit un nombre pair $2r$. Si la première est plus grande, on diminue chacun des extrêmes de r et l'on augmente de la même quantité chacun des moyens, et *vice versa*. Par exemple, en prenant quatre nombres

$$5,\ 12,\ 18,\ 31 \quad (S_1 = 66;\ S_2 = 1454),$$

on a

$$5 + 31 = 36;\quad 12 + 18 = 30;\quad 36 - 30 = 6;\quad \tfrac{6}{2} = 3.$$

Donc on peut remplacer ces nombres par

$$5 - 3;\quad 12 + 3;\quad 18 + 3;\quad 31 - 3$$

ou

$$2,\ 15,\ 21,\ 28 \quad (S_1 = 66;\ S_2 = 1454).$$

Soit donné le groupe

$$1,\ 6,\ 26,\ 35,\ 44,\ 48,\ 49,\ 51 \quad (S_1 = 260;\quad S_2 = 11180).$$

Nous conviendrons d'écrire en chiffres gras dans les groupes les quatre nombres que nous nous proposerons de remplacer, et nous obtiendrons la série des groupes suivante :

1, 6, 26, 35, **44**, **48**, **49**, **51**;
1, 6, 26, **35**, **45**, 47, **48**, **52**;
1, 6, 26, **38**, **42**, **45**, **47**, 55;
1, 6, 26, **39**, 41, **44**, **48**, **55**;
1, 6, 26, **38**, **41**, 45, **49**, **54**;
1, 6, 26, 37, 42, 45, 50, 53,

et ainsi de suite.

Voici une seconde série

14, 15, 16, 17, **35**, **45**, **58**, **60**;
14, 15, **16**, 17, **39**, **41**, **54**, 64;
14, 15, **17**, **21**, **34**, **36**, 59, 64;
14, 15, 18, 20, 33, 37, 59, 64,

et ainsi de suite.

11. Dans le second procédé on prend trois nombres a, b, c tous de formes différentes, $3h$; $(3h+1)$; $(3h+2)$, ou tous de l'une de ces formes. C'est avec des nombres pareils que sont composées les égalités $1, 5, 6 \perp 2, 3, 7$; $1, 8, 9 \perp 3, 4, 11$; $1, 11, 12 \perp 4, 5, 15, \ldots$, dont les termes peuvent être augmentés respectivement des nombres additionnels 0, 1, 2, comme c'est expliqué dans le premier Mémoire. La différence de la somme des extrêmes $(a+c)$ et du double du moyen $2b$ sera nécessairement divisible par 3. Nommons-la $3t$.

Si $a+c>2b$, on augmente le terme moyen b de $2t$ et l'on diminue a et c de t, et *vice versa*.

Par exemple, dans le dernier groupe

$$14,\ 15,\ 18,\ 20,\ 33,\ 37,\ 59,\ 64 \quad (S_1=260;\ S_2=11180),$$

on a trois nombres, 15, 18, 33, de la forme $3h$; deux nombres, 37 et 64, de la forme $(3h+1)$, et trois, 14, 20, 59, de la forme $(3h+2)$, Si nous prenons trois nombres, tous de formes différentes,

$$20,\ 33,\ 37 \quad (S_1=90;\ S_2=2858),$$

on a

$$20+37=57;\quad 2\times 33=66;\quad 66-57=9;\quad \tfrac{9}{3}=3;\quad 2\times 3=6.$$

Comme $(a+c)<2b$, on fait

$$20+3;\quad 33-6;\quad 37+3,$$

ce qui donne

$$23,\ 27,\ 40 \quad (S_1=90;\ S_2=2858),$$

et l'on aura un nouveau groupe

$$14,\ 15,\ 18,\ 23,\ 27,\ 40,\ 59,\ 64 \quad (S_1=260;\ S_2=11180).$$

Ces deux procédés, étant peu compliqués, suffiront pour dresser rapidement les Tables de tous les groupes égaux à deux degrés.