BULLETIN DE LA S. M. F.

ST. GERMAIN

Du facteur constant dans l'expression de $\vartheta(x)$ en produit illimité

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 62-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__62_1>

Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité;
par M. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 17 décembre 1873)

Considérons la fonction définie par Jacobi au moyen d'une série :

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

où nous dirons seulement que q est < 1. On peut exprimer la fonction comme produit d'un nombre infini de facteurs, de la forme

$$1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n+2},$$

avec un facteur indépendant de x, et que nous désignerons par $\varphi(q)$. Une simple remarque permet de déterminer ce facteur plus aisément que ne l'a fait Jacobi. Égalons les expressions de $\Theta(x)$, ou mieux de $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$, en série et en produit illimité :

$$1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots$$
$$= \varphi(q)(1 - 2q \cos 2x + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2x + q^6)\dots.$$

Dans cette identité, je fais $x = \frac{\pi}{4}$; il vient

(1) $$1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \dots = \varphi(q)(1 + q^2)(1 + q^6)(1 + q^{10})\dots.$$

Faisons au contraire $x = 0$, et changeons q en q^4, nous aurons

$$1 - 2q^4 + 2q^{16} - \dots = \varphi(q^4)(1 - q^4)^2(1 - q^{12})^2(1 - q^{20})^2\dots$$

Le premier membre est le même que dans l'équation (1), et le second est divisible par $(1+q^2)(1+q^6)\dots$; on a donc, en supprimant ce facteur commun,

$$\varphi(q) = \varphi(q^4)(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^{12})(1 - q^{10})(1 - q^{20})\dots.$$

Nous trouvons un produit de facteurs de la forme $1-q^{2n}$, où n a toutes les valeurs de 1 à ∞, sauf celles qui sont multiples de 4. Si on multiplie les deux membres par $(1-q^8)(1-q^{16})\dots$, on n'aura plus de lacunes, et on pourra écrire, n variant de 1 à ∞,

$$\varphi(q)\Pi(1 - q^{8n}) = \varphi(q^4)\Pi(1 - q^{2n});$$

d'où

$$\frac{\varphi(q)}{\Pi(1 - q^{2n})} = \frac{\varphi(q^4)}{\Pi(1 - q^{8n})} = \frac{\varphi(q^{16})}{\Pi(1 - q^{32n})} = \dots.$$

On aura une suite de rapports égaux, dont les dénominateurs tendent vers l'unité; il en est de même du numérateur, car si dans l'équation (1) on remplace q par $q^{4\mu}$, il est évident que, pour μ infini, $\varphi(q^{4\mu}) = 1$. On a donc

$$\varphi(q) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8)\dots$$

C'est la formule de Jacobi.