BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 2-8
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__2_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA THÉORIE DE LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ;

Par M. Émile Picard.

Les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique ont été, comme l'on sait, représentées par l'équation

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial V}{\partial t} = C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

V est le potentiel, et A, B, C sont trois constantes positives.

En choisissant convenablement les unités, on peut réduire l'équation à la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

et enfin, en posant

$$V = U e^{-t},$$

on a l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U.$$

M. Poincaré a fait récemment, dans les *Comptes rendus* (1), une discussion des intégrales de cette équation, fort intéressante au point de vue physique; j'ai montré ensuite (2) comment l'équa-

(1) H. Poincaré [*Sur la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, 26 décembre 1893)].

(2) Em. Picard [*Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la propagation de l'électricité* (*Comptes rendus*, 2 janvier 1894)].

tion précédente pouvait être discutée de la manière la plus simple et la plus rigoureuse à l'aide de la méthode générale de Riemann, méthode fondamentale dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles : c'est ce que je me propose de développer ici.

1. Je rappellerai d'abord les résultats de Riemann, en me reportant à la remarquable exposition faite par M. Darboux, dans le tome II de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (p. 75). Prenons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

et soit considérée en même temps son adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right) u = 0,$$

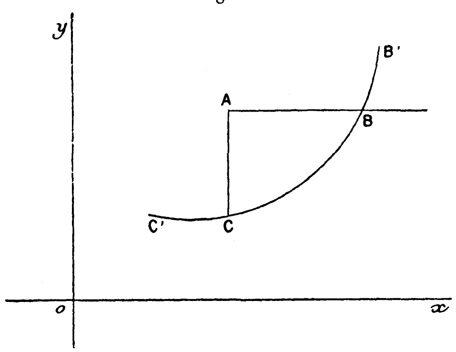
et posons

$$M = auz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$N = buz + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Soient B′C′ (*fig.* 1) une courbe tracée arbitrairement dans le plan et A un point quelconque de ce plan.

Fig. 1.



En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de A, supposons que l'on ait déterminé la solution

$$u(x, y;\, x_0, y_0)$$

de l'équation adjointe, se réduisant à l'unité pour $x = x_0$, $y = y_0$, et prenant la valeur

$$e^{\int_{x_0}^{x} b\,dx}$$

pour $y = y_0$, tandis qu'elle prend la valeur

$$e^{\int_{y_0}^{y} a\,dy}$$

pour $x = x_0$. Dans ces conditions, on aura

$$(uz)_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \int_C^B (N\,dx - M\,dy),$$

l'intégrale curviligne étant prise le long de $C'B'$.

Cette formule permet de déterminer la solution z de l'équation aux dérivées partielles proposée, qui prend des valeurs données ainsi que l'une de ses deux dérivées pour les points de la courbe $B'C'$. L'équation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

appliquée à un déplacement suivant cette courbe, détermine évidemment celle des deux dérivées premières qui n'est pas donnée *a priori*.

2. Ceci rappelé, revenons à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z, \tag{1}$$

en remplaçant U par z. Transformons-la en posant

$$2X = x + t, \qquad 2Y = x - t.$$

On obtient de suite

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + z = 0. \tag{2}$$

L'équation adjointe est ici :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0,$$

c'est la même équation.

Supposons qu'une intégrale de l'équation (1) soit déterminée par les conditions initiales suivantes : on se donne z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, ces valeurs étant seulement *différentes de zéro* pour x compris entre a et b $(a > b)$.

On voit alors que, pour l'équation (2), on peut considérer la fonction z ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre *comme données sur la bissectrice de l'angle des axes;* les valeurs données sont seulement *différentes de zéro* sur un segment fini de cette bissectrice, à savoir le segment déterminé par les équations

$$X = Y = \frac{x}{2},$$

x variant de b à a.

3. Pour appliquer la méthode de Riemann, nous avons seulement à voir si nous pouvons déterminer l'intégrale u de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \, \partial Y} + u = 0$$

qui pour $X = X_0$ prend la valeur *un* quel que soit Y, et qui pour $Y = Y_0$ prend la valeur *un* quel que soit X. Or cette recherche est immédiate, car, en posant

$$\lambda = (X - X_0)(Y - Y_0),$$

on trouvera une fonction $u = \varphi(\lambda)$ satisfaisant à l'équation précédente; en effet, on obtient ainsi l'équation de Bessel

$$\lambda \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi}{d\lambda} + \varphi = 0$$

et la fonction cherchée est la série de Bessel

$$u = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(1.2)^2} - \frac{\lambda^3}{(1.2.3)^2} + \ldots .$$

4. Figurons (*fig.* 2) le plan (X, Y).

L'intégrale z est nulle ainsi que $\frac{\partial z}{\partial X}$ $\left(\text{et par suite } \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$ sur la bissectrice des axes, sauf sur la partie $\beta\alpha$; on a sur cette partie des successions de valeurs données pour z et $\frac{\partial z}{\partial X}$ $\left(\text{d'où résulte la valeur de } \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$. Nous avons donc la formule

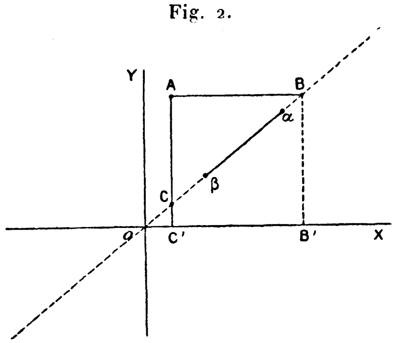
$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2}\int_C^B \left(u\frac{\partial z}{\partial X} - z\frac{\partial u}{\partial X}\right) dX - \left(u\frac{\partial z}{\partial Y} - z\frac{\partial u}{\partial Y}\right) dY,$$

ce que l'on peut écrire :

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2}\int_C^B \varphi\left(\frac{\partial z}{dX} - \frac{\partial z}{\partial Y}\right) dX - \frac{(X_0 - Y_0)}{2}\int_C^B z\frac{d\varphi}{d\lambda}\, dX.$$

On peut regarder sous les signes d'intégration $\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}$ et z, comme des fonctions arbitrairement données de X, différentes de

Fig. 2.



zéro entre $\frac{b}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et nulles pour toute autre valeur de X; désignons-les par $\psi(X)$ et $\chi(X)$. Nous aurons donc

$$z(t_0, x_0) = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2}\int_{C'}^{B'} \varphi(\lambda)\psi(X)\, dX - t_0\int_{C'}^{B'} \chi(X)\varphi'(\lambda) dX$$

$$2X_0 = x_0 + t_0, \qquad 2Y_0 = x_0 - t_0,$$

en désignant par C′ et B′ les projections de C et B sur OX, et en posant

$$\lambda = \left(X - \frac{x_0 + t_0}{2}\right)\left(Y - \frac{x_0 - t_0}{2}\right).$$

Telle est la forme de l'intégrale générale de l'équation (1).

5. Discutons la valeur de $z(t_0, x_0)$, quand, x_0 étant arbitraire mais fixe, t_0 varie de o à $+\infty$.

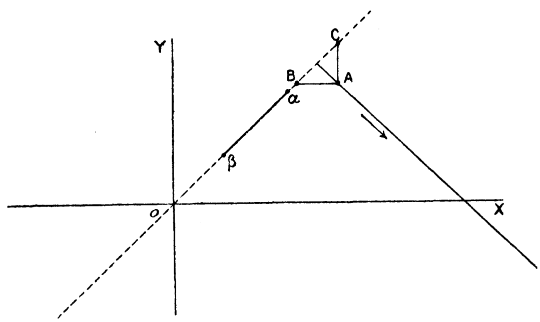
Supposons x_0 en dehors de l'intervalle ba. Les relations

$$2X_0 = x_0 + t_0, \qquad 2Y_0 = x_0 - t_0$$

montrent que le point A de coordonnées X_0, Y_0 se déplace sur une droite perpendiculaire à $\alpha\beta$, comme l'indique la *fig.* 3 qui correspond à $x_0 > a$.

Tant que t_0 est trop petit pour que le point B soit situé dans l'in-

Fig. 3.



tervalle $\alpha\beta$, tous les termes figurant dans l'expression de $z(t_0, x_0)$ sont nuls. C'est seulement quand B arrive en α que z devient différent de zéro; ceci se produit quand

$$\frac{x_0 - t_0}{2} = \frac{a}{2},$$

c'est-à-dire à l'instant $x_0 - a$, et la partie ne contenant pas de signe d'intégration dans $z(t_0, x_0)$, c'est-à-dire $\frac{(uz)_B}{2}$, sera *différente de zéro* depuis le temps $x_0 - a$ jusqu'au temps $x_0 - b$. On peut dire que *cette partie correspond à une onde régulière.*

Une fois le temps $x_0 - b$ dépassé, la valeur de z se réduit à

$$z(t_0, x_0) = -\frac{1}{2}\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi(\lambda)\psi(X)\,dX - t_0\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} \chi(X)\varphi'(\lambda)\,dX.$$

On voit donc ainsi bien nettement *une sorte de résidu laissé par l'onde régulière que représentait le terme* $\frac{(uz)_B}{2}$.

Quant à la valeur asymptotique de $z(t_0, x_0)$ ou plutôt de

$$V(t_0, x_0) = e^{-t_0} z(t_0, x_0)$$

pour t_0 très grand, elle serait facile à obtenir à l'aide de l'expression asymptotique bien connue de $\varphi(\lambda)$ pour λ infini, mais je ne m'y arrêterai pas; ce que nous venons de dire suffit pour montrer la nature des intégrales de *l'équation des télégraphistes.*