BULLETIN DE LA S. M. F.

FOURET

Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 72-83

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__72_1>

Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définis par deux caractéristiques; par M. Fouret.

(Séance du 25 mars 1874)

I. Définition des systèmes généraux de courbes. — La notion des systèmes de courbes planes algébriques, introduite dans la science, il y a une

(*) Dans l'ouvrage précédemment cité, M. Fiedler donne, sans démonstration, pour les degrés de ces deux dernières surfaces, et dans un cas particulier, des évaluations inexactes.

dizaine d'années, par M. Chasles, a conduit, comme on le sait, l'illustre géomètre et ceux qui l'ont suivi dans cette voie, à des résultats fort importants.

Dans ce genre de recherches, on considère l'ensemble des courbes d'un même degré, d'ailleurs quelconque, satisfaisant à des conditions communes, en nombre inférieur d'une unité au nombre de conditions nécessaire pour déterminer de pareilles courbes.

L'ensemble de ces courbes forme ce que l'on appelle un système. Parmi ces courbes, il en existe nécessairement un nombre déterminé μ, passant par un point quelconque, et un nombre déterminé ν, tangentes à une droite quelconque. Ces deux nombres sont appelés les deux *caractéristiques* du système : ils le caractérisent en ce sens qu'ils permettent d'énoncer, sous une forme simple, une multitude de propriétés de ce système.

Or, parmi ces propriétés quelques-unes dépendent de l'ordre, de la classe, ou des particularités qui distinguent les courbes du système ; d'autres, au contraire, en sont complètement indépendantes, et s'expriment uniquement à l'aide des deux caractéristiques μ et ν. D'autre part, il arrive fréquemment que des systèmes de courbes, du même degré, ou de degrés différents, et satisfaisant à des conditions très-différentes, ont cependant les mêmes caractéristiques. Cette double remarque m'a suggéré l'idée de considérer comme des cas particuliers d'un système plus général tous les systèmes définis par les deux mêmes caractéristiques, quelles que soient les particularités (ordre, classe, etc.) ou les propriétés communes aux courbes de l'un quelconque de ces systèmes. En cherchant ainsi à réunir par un lien commun tous les systèmes particuliers de courbes algébriques de mêmes caractéristiques, j'ai reconnu qu'ils satisfont à un même type d'équation différentielle, dont la forme la plus générale peut être considérée comme définissant un système général (μ,ν).

Ce système général (μ,ν) comprend, comme cas particuliers, outre les systèmes algébriques de mêmes caractéristiques, une infinité de systèmes de courbes transcendantes. On est ainsi amené à ajouter à l'étude des systèmes de courbes algébriques celle des systèmes de courbes transcendantes, ou plutôt à les comprendre indistinctement dans une même étude, celle des systèmes généraux de courbes définis par deux caractéristiques.

II. Démonstration de l'existence des systèmes de courbes transcendantes. — Considérons une équation différentielle du premier ordre, à deux variables

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{1}$$

que nous supposerons algébrique, entière et rationnelle. On sait qu'une pareille équation représente une infinité de courbes, en général transcendantes, et que si $\frac{dy}{dx}$ y figure au degré μ, il existe μ de ces courbes qui passent par un point quelconque du plan.

Pour avoir les courbes tangentes à une droite quelconque

$$y = ax + b, \tag{2}$$

on peut déterminer les x des points de contact au moyen de l'équation

$$\varphi(x, ax + b, a) = 0.$$

Cette équation, de même que (1), est algébrique, entière et rationnelle, et son degré ν est égal au nombre des points de contact de la droite (2) avec les courbes définies par (1).

L'ensemble de ces courbes est donc tel, qu'il en passe un nombre déterminé μ par un point quelconque et qu'il y en ait un nombre déterminé ν qui touchent une droite quelconque ; il forme par suite un système à caractéristiques μ et ν.

Je dis que, réciproquement, tout ensemble de courbes remplissant ces conditions, et formant par suite un système (μ,ν), satisfait nécessairement à une équation différentielle algébrique.

En effet, on voit immédiatement que le lieu des points de contact des tangentes de ces courbes, issues d'un point O quelconque du plan, est une courbe algébrique d'ordre $\mu + \nu$, ayant un point multiple d'ordre μ en O.

Cela est encore vrai, si l'on suppose le point O à l'infini, dans la direction

$$y = ax.$$

Or l'équation du lieu ainsi obtenu n'est autre que l'équation différentielle des courbes du système, dans laquelle on remplace $\frac{dy}{dx}$ par a ; par conséquent, cette équation doit être algébrique, entière et rationnelle, et de degré $\mu + \nu$ par rapport à x et y. Il est d'ailleurs évident qu'elle doit être algébrique de degré μ en $\frac{dy}{dx}$, puisqu'elle doit déterminer μ courbes passant par un point quelconque.

Donc, en résumé, il existe des système de courbes transcendantes, et les courbes d'un pareil système satisfont à une même équation différentielle algébrique.

III. Équation générale des systèmes de courbes. — L'équation différentielle la plus générale des systèmes (μ,ν) de courbes, algébriques ou transcendantes, peut se mettre sous la forme

$$\Phi[(x,y)_\nu, (\alpha,\beta)_\mu] = 0, \tag{3}$$

dans laquelle

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{dy}{dx}, \\ \beta = x\dfrac{dy}{dx} - y, \end{cases}$$

Φ étant un polynôme de degré μ par rapport à l'ensemble des variables α et β, de degré ν par rapport à l'ensemble des variables x et y.

En effet, par un point quelconque (x,y) passent μ des courbes (3); car, en substituant dans (3) les expressions (4) de α et β, on obtient une équation de degré μ en $\frac{dy}{dx}$.

Pour avoir le nombre des courbes tangentes à une droite quelconque, il suffit de remarquer que les expressions (4) de α et β ne sont autre chsoe que le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une droite tangente à une courbe (3). En choisissant arbitrairement les coordonnées α, β, de cette droite, le système des équations (3) et (4) conduit à une équation de degré ν en x ou y, qui détermine, conjointement avec la deuxième des équations (4), ν points de contact des courbes (3) avec la droite (α,β).

Il est, par suite, démontré que l'équation (3) représente un système (μ,ν).

Réciproquement, tout système (μ,ν) peut être représenté par une équation différentielle algébrique de la forme de l'équation (3).

En effet, nous avons déjà vu (art. II), que tout système (μ,ν) peut être représenté par une équation différentielle algébrique

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Cette équation, si l'on y fait $\frac{dy}{dx} = \alpha$, devient l'équation du lieu des points de contact des courbes du système avec des droites parallèles à la direction

$$y = \alpha\, x.$$

Mais ce lieu étant de degré $\mu + \nu$, et ayant un point multiple d'ordre μ à l'infini dans la direction $y = \alpha x$, son équation doit être de la forme

$$(5)\qquad R(y-\alpha x)^{\mu} + (S_0\alpha + S_1)(y-\alpha x)^{\mu-1} + \dots$$
$$+ (V_0\alpha^{\mu-1} + V_1\alpha^{\mu-2} + \dots + V_{\mu-1})(y-\alpha x) + P_0\alpha^{\mu} + P_1\alpha^{\mu-1} + \dots + P_{\mu} = 0,$$

dans laquelle R,S,...,V désignent des polynômes homogènes de degré ν en x et y, et P des polynômes complets également de degré ν en x et y.

On voit en effet immédiatement que l'équation (5) satisfait à la double condition : 1° de représenter une courbe d'ordre $\mu+\nu$ ayant un point multiple d'ordre μ à l'infini dans la direction $y=\alpha x$; 2° d'être de degré μ par rapport à α, c'est-à-dire de représenter à un autre point de vue, et comme équation différentielle, un ensemble de courbes dont μ passent par un point quelconque.

On voit de plus, sans difficulté, que l'équation (5) est l'équation la plus générale satisfaisant à cette double condition. Or, dans cette équation, nous pouvons, en vertu des relations (4), remplacer $y-\alpha x$ par $-\beta$; nous la transformons alors en une équation de la forme (3), c'est-à-dire contenant α et β ensemble au degré μ, x et y ensemble au degré ν.

Tout système (μ,ν) de courbes peut donc être défini par une pareille équation.

IV. Remarques. — 1° A cause des relations (4), l'équation (5) peut être écrite d'une infinité de manières sous la forme (3) : la plus simple est celle qui consiste à remplacer $y-\alpha x$ par $-\beta$ dans (5).

2° Le nombre des coefficents de (5), après que l'on a divisé par l'un d'eux, est $\frac{(\mu+1)(\nu+1)(\mu+\nu+2)}{4}-1$. Tel est le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un système général (μ,ν).

L'équation la plus générale de la forme (3) contenant

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}{4}-1$$

coefficients, il y en a sur ce nombre $\frac{\mu(\mu+1)\nu(\nu+1)}{4}$ surabondants; on peut les faire disparaître en se servant des relations de (4).

3° L'équation (3), en vertu des relations (5), peut être considérée à la fois comme l'équation différentielle ponctuelle et l'équation différentielle tangentielle du système (μ,ν). En substituant les expressions (5) de α et β, on a la première forme. Pour avoir la seconde, il suffit de tirer de (5)

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{d\beta}{d\alpha},\\ y&=\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta,\end{aligned}\right.$$

et de substituer ces expressions dans (3).

Cette double signification de l'équation (3), contenant à la fois les coordonnées ponctuelles et tangentielles des mêmes courbes, nous parait constituer un fait intéressant au point de vue de la géométrie analytique.

4° Si, dans l'équation (3), on change x en α, y en β, et réciproquement, on forme une nouvelle équation qui représente un système (ν,μ) corrélatif du système (μ,ν) représenté par l'équation (3). Il résulte de cette remarque qu'ayant démontré une propriété quelconque d'un système de courbes, on sera en droit d'en conclure, sans démonstration, la propriété corrélative.

5° On peut supposer, comme cas particulier, que les termes en α et β disparaissent de l'équation (3) ($\mu=0$); cette équation ne contient plus alors que x et y au degré ν, et, par suite, le système qu'elle représente se réduit à une courbe algébrique du degré ν.

Si, au contraire, ce sont les termes en x et y qui manquent dans (3) ($\nu=0$), on a l'équation tangentielle d'une courbe algébrique de la classe μ.

Les courbes algébriques se présentent ainsi, et de deux manières, comme cas très-particulier des systèmes généraux de courbes; de telle sorte qu'une courbe algébrique du m^e ordre et de la n^e classe peut être considérée, soit comme un système ($\mu=0$, $\nu=m$) de points, soit comme un système ($\mu=n$, $\nu=0$) de droites. La géométrie à deux dimensions, ayant pour éléments le point et la ligne droite, devient en quelque sorte un cas particulier d'une géométrie plane plus générale, dans laquelle les points et les droites sont remplacés par certaines courbes transcendantes. Cette géométrie des systèmes, étendue à l'espace, n'est d'ailleurs autre chose que la géométrie dont Plücker a, dans ces dernières années, ouvert la voie; seulement elle se présente ici avec un domaine notablement agrandi.

V. Propriétés des systèmes généraux de courbes. — Dans un prochain travail, nous montrerons comment on peut étendre aux systèmes de courbes la plupart des propriétés des courbes algébriques, spécialement celles qui ont rapport aux transversales, aux polaires et aux axes harmoniques, aux faisceaux et aux involutions, etc. Pour le moment, nous nous proposons de faire voir, par quelques exemples, la manière simple dont peuvent s'établir non-seulement les propriétés d'un système, mais les propriétés relatives à plusieurs systèmes. Nous rappellerons tout d'abord un théorème dont nous avons déjà fait usage précédemment, et qui est fondamental dans toute cette théorie; il consiste en ce que :

Le lieu des points de contact des courbes d'un système général (μ,ν), *avec des droites issues d'un même point* O, *est une courbe d'ordre* $\mu+\nu$, *douée d'un point multiple d'ordre* μ *en* O.

Ce théorème a pour corrélatif le suivant, qui nous sera également utile :

L'enveloppe des tangentes des courbes d'un système général (μ,ν), *aux points où ces courbes rencontrent une droite* D, *est une courbe de la classe* $\mu+\nu$, *ayant une tangente multiple d'ordre* ν *coïncidant avec* D.

Ce théorème, de même que le précédent, se démontre immédiatement.

VI. *Étant donné un système* (μ,ν) *et trois points* e, f, g, *le lieu d'un point* a, *tel que la tangente à l'une des courbes du système qui y passent forme avec* *les trois droites ac, af, ag un rapport anharmonique constant et égal à* λ, *est de l'ordre* $2\mu+\nu$ *et a trois points multiples d'ordre* μ *en e, f et g* (*).

Cherchons le nombre des points a du lieu situés sur une droite quelconque passant par le point g. Soit h le point de rencontre de cette droite avec ef. La tangente en un des points a, à l'une des courbes du système passant par ce point, doit couper ef en un point i tel que

$$\frac{ic}{if}:\frac{hc}{hf}=\lambda.$$

Or le lieu des points de contact des tangentes, menées du point i aux courbes du système, est de l'ordre $\mu+\nu$, et rencontre, par suite, gh en $\mu+\nu$ points.

Le lieu a donc, sur une droite quelconque passant par g, $\mu+\nu$ points en dehors de ce point g.

Si l'on considère les μ courbes du système passant par le point g, à chacune des μ tangentes gt, correspond une droite gs, formant avec gt, ge et gf un rapport anharmonique égal à λ. Les μ droites gs ainsi obtenues sont les tangentes à μ branches du lieu qui passent par le point g.

Le lieu est donc de l'ordre $2\mu+\nu$ et a un point multiple d'ordre μ en g. On voit de la même manière qu'il a deux autres points multiples d'ordre μ en e et f.

VII. *Étant donnés un système* (μ, ν), *deux points e, f, et une droite* D, *l'enveloppe des droites issues des divers points a de* D, *et telles que le rapport anharmonique formé par l'une quelconque d'entre elles, la tangente à l'une des courbes du système passant en a, et les droites ac et af, soit constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu+\nu$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $(\mu+\nu)$ *coïncidant avec* D *et une tangente multiple d'ordre* μ *coïncidant avec ef.*

Cherchons le nombre des tangentes de l'enveloppe qui passent par un point g quelconque. Le lieu défini à l'article VI, et décrit à l'aide des points e, f, g, rencontre D en $2\mu+\nu$ points. Chacun de ces points détermine une des tangentes de l'enveloppe qui passent en g. Cette enveloppe est, par suite, de la classe $2\mu+\nu$.

Prenons en particulier le point g sur la droite D. Le lieu (VI) a un point multiple d'ordre μ en g, et rencontre D en $\mu+\nu$ autres points. En ces points, l'enveloppe est tangente à D, qui est par conséquent une tangente multiple d'ordre $\mu+\nu$.

On voit de plus aisément que, si l'on considère les μ courbes du système qui passent par le point de rencontre des droites ef et D, les μ tangentes en

(*) Ce théorème, pour le cas des systèmes de coniques, a été donné par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 297; 1864).

ce point ont toutes pour tangente correspondante de l'enveloppe la droite ef, qui est, par conséquent, une tangente multiple d'ordre μ.

VIII. *Étant donnés deux systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu')$ *et deux points* e,f, *le lieu d'un point, tel que les tangentes aux courbes de l'un et l'autre système passant par ce point divisent le segment* ef *dans un rapport anharmonique donné* λ, *est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a deux points multiples d'ordre* $\mu\mu'$ *en* e *et* f.

Cherchons le nombre des points d'intersection du lieu avec un droite D quelconque. L'enveloppe (A) des droites déterminées à l'aide de D et du système (μ,ν), par la construction indiquée à l'article VII, est, comme nous l'avons vu, de la classe $2\mu+\nu$, et a une tangente d'ordre $\mu+\nu$ coïncidant avec ef. D'autre part, l'enveloppe (B) des tangentes du système μ',ν', dont les points de contact sont situés sur D, est de la classe $\mu'+\nu'$, et a une tangente multiple d'ordre ν' coïncidant avec D. Par suite, le nombre des tangentes communes à (A) et à (B) est, au total, égal à $(2\mu+\nu)(\mu'+\nu')$. Seulement $(\mu+\nu)\nu'$ de ces tangentes communes coïncident avec D.

Or les tangentes communes autres que D déterminent, sur cette droite D, les points du lieu cherché. Ce lieu est donc de l'ordre

$$(2\mu+\nu)(\mu'+\nu')-(\mu+\nu)\nu'=2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu.$$

Il est facile de voir que chacun des points e et f est un point multiple d'ordre $\mu\mu'$ du lieu. En effet, considérons les μ courbes du système (μ,ν) et les μ' courbes du système (μ',ν') qui passent par l'un de ces points, e par exemple.

On peut associer ces courbes chacune à chacune de $\mu\mu'$ manières, et chacune de ces combinaisons détermine un élément du lieu passant par e. Il y a donc $\mu\mu'$ branches de ce lieu qui se croisent en e. Il en est évidemment de même de f.

IX. *Étant donnés deux systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu')$, *un point* e *et une droite* D, *l'enveloppe des droites issues des divers points* a *de* D, *et telles que le rapport anharmonique formé par l'une quelconque d'entre elles, les tangentes à deux courbes de l'un et l'autre système passant en* a, *et la droite* ae, *soit constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ *coïncidant avec* D.

Cherchons le nombre des tangentes de l'enveloppe ainsi définie, qui passent par un point f quelconque. Le lieu VIII, décrit à l'aide des points e,f, et du rapport anharmonique λ, rencontre D en $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ points, et chacun de ces points détermine une des tangentes de l'enveloppe qui passent en f. Cette enveloppe est donc bien de la classe $2\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$.

Si l'on prend le point f sur D, le lieu III, ayant un point multiple d'ordre $\mu\mu'$ en f, rencontre D en $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$ autres points, qui sont des points de contact de l'enveloppe avec D. Donc cette droite est pour l'enveloppe une tangente multiple d'ordre $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$.

X. *Étant donnés trois systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu')(\mu'',\nu'')$, *et un point e, le lieu d'un point a, tel que les tangentes à trois courbes appartenant chacune à chacun des systèmes, et la droite ae, forment un rapport anharmonique* λ, *est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu''\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$, *qui a un point multiple d'ordre* $\mu\mu'\mu''$ *en e.*

La démonstration de ce théorème étant tout à fait analogue à celle donnée à l'article VIII, nous ne nous y arrêterons pas.

XI. *Étant donnés trois systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu'),(\mu'',\nu'')$, *et une droite* D, *l'enveloppe d'une droite issue d'un point a de* D, *de manière à former avec les tangentes à trois courbes appartenant chacune à chacun des systèmes et passant en a, un rapport anharmonique constant et égal à* λ, *est une courbe de la classe* $2\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu'\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$, *qui a une tangente multiple d'ordre* $\mu\mu'\mu'' + \mu'\mu''\nu + \mu''\mu\nu' + \mu\mu'\nu''$ *coïncidant avec* D.

Démonstration toute semblable à celle donnée à l'article IX.

XII. *Étant donnés quatre systèmes* $(\mu,\nu),(\mu',\nu'),(\mu'',\nu''),(\mu''',\nu''')$, *le lieu des points en lesquels se coupent suivant un rapport anharmonique donné quatre courbes appartenant chacune à chacun des systèmes est de l'ordre*

$$2\mu\mu'\mu''\mu''' + \mu'\mu''\mu'''\nu + \mu''\mu'''\mu\nu' + \mu'''\mu\mu'\nu'' + \mu\mu'\mu''\nu'''.$$

Démonstration semblable à celle des articles VIII et X.

Ce dernier théorème relatif à quatre systèmes est d'une grande généralité; il comprend comme cas particuliers les théorèmes des articles VI, VIII et X. On en déduit également comme corollaire le théorème suivant, communiqué par M. Chasles à l'Académie, dans sa séance du 2 mars 1874, comme généralisation d'un théorème fondamental dans la théorie des coniques :

Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à quatre courbes de classes n_1,n_2,n_3,n_4, *quatre tangentes ayant un rapport anharmonique donné, est une courbe de l'ordre* $2n_1n_2n_3n_4$.

Ce théorème se déduit du précédent d'après la remarque déjà faite précédemment (art. IV), que les tangentes d'une courbe de n^{me} classe forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = n, \nu = 0$.

XIII. Le théorème VIII conduit à de nombreuses conséquences.

Si l'on suppose que le système (μ',ν') consiste en un faisceau de courbes algébriques du m^{me} ordre, on a

$$\mu' = 1, \nu' = 2(m-1);$$

l'ordre du lieu est alors égal à

$$2m\mu + \nu,$$

et l'on voit aisément que ce lieu a pour points multiples d'ordre μ les m^2 points fondamentaux du faisceau du m^{me} ordre. Les points e et f sont d'ailleurs aussi des points multiples d'ordre μ.

Considérons un système (μ,ν) et une courbe algébrique U du m^{me} ordre, sans singularités. On peut construire une infinité de faisceaux du m^{me} ordre comprenant la courbe U. Considérons l'un quelconque de ces faisceaux. En vertu du théorème VIII, il donne lieu conjointement avec le système (μ,ν) à une courbe (C) d'ordre $2m\mu + \nu$, ayant pour points multiples d'ordre μ les m^2 points fondamentaux du faisceau. La courbe U coupe la courbe (C) en un nombre total de points égal à $m(2m\mu + \nu)$; mais au nombre de ces points figurent les m^2 points fondamentaux du faisceau dont U fait partie; ces m^2 points, étant multiples d'ordre μ, comptent ensemble pour $m^2\mu$ points dans le nombre total des points d'intersection. Les $m(m\mu + \nu)$ autres points d'intersection donnent lieu au théorème suivant :

XIV. *Étant donnés un système* (μ,ν), *une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *et un segment ef, il existe m* $(m\mu + \nu)$ *points de* U *qui sont tels que la tangente à* U *en chacun de ces points et la tangente à l'une des* μ *courbes du système qui y passent divisent ef dans un rapport anharmonique donné.*

Les théorèmes VIII et XIV sont susceptibles de recevoir plusieurs formes, et donnent des résultats intéressants, lorsqu'on choisit convenablement le segment ef, ou la valeur du rapport anharmonique.

Prenons pour points e et f les points à l'infini sur un cercle. Les théorèmes VIII et XIV donnent alors les suivants (*) :

XV. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points par chacun desquels passent deux courbes de l'un et l'autre système, se coupant sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation, est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$, *qui a pour points multiples d'ordre* $\mu\mu'$ *les deux points circulaires à l'infini.*

XVI. *Étant donnés un système* (μ,ν) *et une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *il existe m* $(m\mu + \nu)$ *courbes du système qui coupent* U *sous un angle donné de grandeur et de sens de rotation.*

On peut supposer aussi que les points e et f soient à l'infini dans deux directions rectangulaires, et que le rapport anharmonique soit égal à -1. Les théorèmes VIII et XIV deviennent alors les suivants :

XVII. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points par chacun desquels passent deux courbes de l'un et l'autre système, se coupant sous un angle dont la bissectrice est donnée de direction, est une courbe de l'ordre* $2\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$, *qui a deux*

(*) On formera facilement l'énoncé du théorème résultant, dans cette hypothèse, du théorème VI.

points multiples d'ordre $\mu\mu'$ *à l'infini, dans la direction même de la bissectrice et dans la direction perpendiculaire.*

XVIII. *Étant donnés un système* (μ,ν) *et une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités* U, *il existe* $m(m\mu+\nu)$ *courbes du système qui coupent* U *sous un angle dont la bissectrice est donnée de direction* (*).

Les points e et f restant quelconques, supposons que le rapport anharmonique considéré précédemment devienne égal à l'unité. En introduisant cette hypothèse dans le théorème VIII, on voit immédiatement que la droite ef devient partie intégrante du lieu, avec un degré de multiplicité égal à $\mu\mu'$. En négligeant cetle droite, le théorème VIII donne le suivant :

XIX. *Étant donnés deux systèmes* (μ,ν) *et* (μ',ν') *de courbes algébriques ou transcendantes, le lieu des points de contact de deux courbes de l'un et l'autre système est une courbe de l'ordre* $\mu\mu'+\mu\nu'+\mu'\nu$.

Ce théorème donne, comme cas particulier, le théorème de Bezout sur le nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, et son corrélatif sur le nombre des tangentes communes à deux pareilles courbes.

En supposant le rapport anharmonique égal à l'unité, le théorème XIV donne le nombre des courbes d'un système (μ,ν) qui touchent la courbe U, en ayant soin de déduire du nombre $m(m\mu+\nu)$ le nombre correspondant aux points d'intersection de U et de ef, qui comptent chacun pour μ points, et ne satisfont pas à la question. On peut dès lors énoncer le théorème suivant :

XX. *Le nombre des courbes d'un système* (μ,ν), *qui touchent une courbe algébrique du* m^{me} *ordre sans singularités, est égal à* $m[(m-1)\mu+\nu]$ (**).

Les théorèmes XIX et XX se déduisent, ainsi que nous venons de le voir, des théorèmes VIII et XIV. Ils se démontrent aussi directement avec la plus grande facilité.

Les théorèmes que nous venons de démontrer peuvent facilement se transformer par voie de dualité. Nous citerons seulement le suivant, qui est le corrélatif du théorème XII.

XXI. *Étant donnés quatre systèmes* (μ,ν), (μ',ν'), (μ'',ν''), (μ''',ν'''), *l'enveloppe des droites qui sont touchées par quatre courbes appartenant chacune à chacun des quatre systèmes, en des points formant un rapport anharmonique donné, est une courbe de la classe*

$$2\nu\nu'\nu''\nu''' + \mu\nu'\nu''\nu''' + \mu'\nu''\nu'''\nu + \mu''\nu'''\nu''\nu' + \mu'''\nu\nu'\nu''.$$

(*) Les théorèmes XVI et XVII ont été énoncés par M. de Jonquières dans le cas des systèmes algébriques (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 535.)

(**) Ce théorème, dans le cas des systèmes algébriques, a été donné par M. Chasles *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 297 ; 1864). Le nombre $m[(m-1)\mu+\nu]$ peut aussi s'écrire $n\mu+m\nu$, n désignant la classe de U. Énoncé sous cette forme, le théorème est plus général.