BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LAURENT

Sur la théorie des roulettes gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 84-93

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__84_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1873-1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la théorie des roulettes gauches; par M. H. Laurent.

(Séance du 25 février 1874.)

Une des théories le plus étudiées aujourd'hui, une des mieux connues, est certainement la théorie des roulettes planes, mais si l'on en excepte l'épicycloïde sphérique, il semble que l'on n'ait que des connaissances très-imparfaites sur les propriétés des roulettes relatives aux courbes gauches.

Si l'on considère une courbe gauche fixe à laquelle je donnerai le nom de *base*, une courbe mobile que j'appellerai la *roulante* assujettie à rouler sans glisser sur la base, un point quelconque invariablement lié à la roulante engendrera une certaine courbe que j'appellerai une *roulette gauche*, ou simplement la *roulette*.

La roulette relative à des courbes dans l'espace est généralement indéterminée, et deux courbes données ont une infinité de roulettes ; en effet, le mouvement de la roulante n'est pas défini quand on se contente de dire qu'elle roule sans glisser sur la base, il faut encore donner à chaque instant l'angle des plans osculateurs des deux courbes, ou toute autre notion équivalente ; on pourrait, par exemple, assujettir la roulante à s'appuyer sur une courbe ou sur une surface directrice ; dans ce qui va suivre, je préfère me donner l'angle des plans osculateurs à cause de sa liaison intime avec les affections des courbes que l'on étudie.

Nous rapporterons la courbe fixe ou base à trois axes rectangulaires fixes. Soit M le point de contact de la base et de la roulette ; par ce point, menons la tangente commune, la normale principale de chacune des deux courbes en question et leurs binormales. Soit

ds l'élément commun à la base et à la roulante, en sorte que s désignant l'arc de roulante ou de roulette compté depuis les points m sur la base, m_0 sur la roulante, le point m_0 coïncide à un certain moment avec m ; ainsi $m_0\mathrm{M} = m\mathrm{M} = s$, quel que soit d'ailleurs le point de contact M. Nous prendrons l'arc s pour variable indépendante. Soient, en outre

x, y, z les coordonnés du point de contact M,

R le rayon de courbure de la base, R_0 celui de la roulante,

T le rayon de torsion de la base, T_0 celui de la roulante,

a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente commune,

b, b', b'' ceux de la normale principale de la base,

b_1, b'_1, b''_1 ceux de la normale principale de la roulante,

c, c', c'' ceux de la binormale à la base,

c_1, c'_1, c''_1 ceux de la binormale à la roulante,

X, Y, Z les coordonnées d'un point O invariablement lié à la roulante ; ce point décrira la roulette,

X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées du même point O par rapport à des axes invariablement liés à la roulante,

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M par rapport aux mêmes axes,

a_0, a'_0, a''_0 les cosinus directeurs de la tangente en M à la roulante pris par rapport aux mêmes axes,

b_0, b'_0, b''_0 ceux de la normale principale,

c_0, c'_0, c''_0 ceux de la binormale,

ξ, η, ζ les projections de la ligne OM sur la tangente, la normale principale et la binormale de la roulante. Posons enfin $OM = N = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, et désignons par θ l'angle des plans osculateurs de la base et de la roulante au point M.

Les formules ordinaires de la transformation des coordonnées donnent immédiatement les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = a(X-x) + a'(Y-y) + a''(Z-z), \\ \eta = b_1(X-x) + b'_1(Y-y) + b''_1(Z-z), \\ \zeta = c_1(X-x) + c'_1(Y-y) + c''_1(Z-z), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \xi = a_0(X_0-x_0) + a'_0(Y_0-y_0) + a''_0(Z_0-z_0), \\ \eta = b_0(X_0-x_0) + b'_0(Y_0-y_0) + b''_0(Z_0-z_0), \\ \zeta = c_0(X_0-x_0) + c'_0(Y_0-y_0) + c''_0(Z_0-z_0). \end{cases}$$

Or b_1 et c_1 peuvent être considérés comme les projections d'un rayon vecteur égal à l'unité sur la normale principale et sur la binormale de la roulante, et b, c comme les projections du même rayon vecteur sur la normale principale et la binormale de la base. Ces normales et binormales peuvent être considérées comme formant deux systèmes d'axes de coordonnés rectangulaires dans un même plan ; ces axes font alors entre eux l'angle θ et les formules de transformation donnent

$$(3)\quad \begin{cases} b_1 = b\cos\theta - c\sin\theta, & b'_1 = b'\cos\theta - c'\sin\theta, & b''_1 = b''\cos\theta - c''\sin\theta, \\ c_1 = b\sin\theta + c\cos\theta, & c'_1 = b'\sin\theta + c'\cos\theta, & c''_1 = b''\sin\theta + c''\cos\theta, \end{cases}$$

A ces formules, il faut joindre les belles formules de M. Serret relatives aux courbes gauches, à savoir

$$(4)\quad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R},\quad \frac{da'}{ds} = \frac{b'}{R},\quad \frac{da''}{ds} = \frac{b''}{R},$$

$$(5)\quad \frac{db}{ds} = -\left(\frac{a}{R}+\frac{c}{T}\right),\quad \frac{db'}{ds} = -\left(\frac{a'}{R}+\frac{c'}{T}\right),\quad \frac{db''}{ds} = -\left(\frac{a''}{R}+\frac{c''}{T}\right),$$

$$(6)\quad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{T},\quad \frac{dc'}{ds} = \frac{b'}{T},\quad \frac{dc''}{ds} = \frac{b''}{T}.$$

On a aussi

$$(7)\quad \frac{da_0}{ds} = \frac{b_0}{R_0},\quad \frac{da'_0}{ds} = \frac{b'_0}{R_0},\quad \frac{da''_0}{ds} = \frac{b''_0}{R_0},$$

$$(8)\quad \frac{db_0}{ds}=-\left(\frac{a_0}{R_0}+\frac{c_0}{T_0}\right),\quad \frac{db'_0}{ds}=-\left(\frac{a'_0}{R_0}+\frac{c'_0}{T_0}\right),\quad \frac{db''_0}{ds}=-\left(\frac{a''_0}{R_0}+\frac{c''_0}{T_0}\right),$$

$$(9)\quad \frac{dc_0}{ds}=\frac{b_0}{T_0},\quad \frac{dc'_0}{ds}=\frac{b'_0}{T_0},\quad \frac{dc''_0}{ds}=\frac{b''_0}{T_0}.$$

On peut déduire des formules (4), (5), (6) les suivantes, pourvu que l'on ait égard aux relations (3) dans lesquelles on suppose l'angle θ constant :

$$(10)\quad \frac{db_1}{ds}=-\left(\frac{a}{R}+\frac{c}{T}\right)\cos\theta-\frac{b}{T}\sin\theta=-\left(\frac{a\cos\theta}{R}+\frac{c_1}{T}\right),\ \ldots,$$

$$(11)\quad \frac{dc_1}{ds}=-\left(\frac{a}{R}+\frac{c}{T}\right)\sin\theta+\frac{b}{T}\cos\theta=-\left(\frac{a\sin\theta}{R}-\frac{b_1}{T}\right),\ \ldots,$$

$$(12)\quad \frac{da}{ds}=\frac{b}{R}=\frac{b_1}{R}\cos\theta+\frac{c_1}{R}\sin\theta,\ \ldots.$$

Différentions par rapport à s les formules (1), en laissant θ constant, nous aurons, en ayant égard aux relations (10), (11), (12), et en observant que $\frac{dx}{ds}=a, \frac{dy}{ds}=a', \frac{dz}{ds}=a''$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dx}&=\frac{1}{R}\Big[(b_1\cos\theta+c_1\sin\theta)(X-x)+\ldots\Big]+a\left(\frac{dX}{ds}-a\right)+\ldots,\\
\frac{d\eta}{dx}&=-\left(\frac{a\cos\theta}{R}+\frac{c_1}{T}\right)(X-x)+\ldots+b_1\left(\frac{dX}{ds}-a\right)+\ldots,\\
\frac{d\zeta}{dx}&=-\left(\frac{a\sin\theta}{R}-\frac{b_1}{T}\right)(X-x)+\ldots+c_1\left(\frac{dX}{ds}-o\right)+\ldots,
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des relations (1) et des relations qui lient entre eux les neuf cosinus a, a', a'', b_1, b'_1, b''_1, c_1, c'_1, c''_1,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\xi}{ds}&=\frac{1}{R}(\eta\cos\theta+\zeta\sin\theta)+a\frac{dX}{ds}+a'\frac{dY}{ds}+a''\frac{dZ}{ds}-1,\\
\frac{d\eta}{ds}&=-\frac{1}{R}\xi\cos\theta-\frac{\zeta}{T}+b_1\frac{dX}{ds}+b'_1\frac{dY}{ds}+b''_1\frac{dZ}{ds},\\
\frac{d\zeta}{ds}&=-\frac{1}{R}\xi\sin\theta+\frac{\eta}{T}+c_1\frac{dX}{ds}+c'_1\frac{dY}{ds}+c''_1\frac{dZ}{ds}.
\end{aligned}\right.$$

En opérant sur les formules (2) comme sur les formules (1), X_0, Y_0, Z_0 ne variant pas, on a

$$(14)\quad \frac{d\xi}{ds}=\frac{\eta}{R_0}-1,\quad \frac{d\eta}{ds}=-\left(\frac{\xi}{R_0}+\frac{\zeta}{T_0}\right),\quad \frac{d\zeta}{ds}=\frac{\eta}{T_0}.$$

L'élimination des dérivées $\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}$, entre les équations (13) et (14), donne des formules qui, résolues par rapport à $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$, sont

$$\frac{dX}{ds}=a\left[\eta\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)-\zeta\frac{\sin\theta}{R}\right]-b_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)+\zeta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right]$$
$$+c_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)+\xi\frac{\sin\theta}{R}\right],$$
$$\frac{dY}{ds}=a'\left[\eta\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)-\zeta\frac{\sin\theta}{R}\right]-b'_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)+\zeta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right]$$
$$+c'_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)+\xi\frac{\sin\theta}{R}\right],$$
$$\frac{dZ}{ds}=a''\left[\eta\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)-\zeta\frac{\sin\theta}{R}\right]-b''_1\left[\xi\left(\frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}\right)+\zeta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right]$$
$$+c''_1\left[\eta\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)+\xi\frac{\sin\theta}{R}\right].$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$(15)\qquad \frac{1}{R_0}-\frac{\cos\theta}{R}=\frac{1}{\rho},\qquad \frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}=\frac{1}{\tau}\qquad \frac{\sin\theta}{R}=\frac{1}{\sigma};$$

nous aurons alors

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds}&=a\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)-b_1\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)+c_1\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right),\\ \frac{dY}{ds}&=a'\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)-b'_1\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)+c'_1\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right),\\ \frac{dZ}{ds}&=a''\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)-b''_1\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)+c''_1\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par $X-x$, la seconde par $Y-y$, la troisième par $Z-z$, et si on les ajoute, on trouve

$$(17)\qquad (X-x)\,dX+(Y-y)\,dY+(Z-z)\,dZ=0,$$

en observant que $a\,(X-x)+a'\,(Y-y)+a''\,(Z-z)$ est égal à ξ, etc., en vertu des formules (1). L'équation (17) montre que le plan normal à la trajectoire du point O passe par le point M, ce que l'on pouvait prévoir par la théorie de l'axe instantané. Les équations mêmes de l'axe instantané sont les formules (16), dans lesquelles on remplace les premiers membres par zéro. Ces équations peuvent s'écrire, en multipliant la première par a, la seconde par a', la troisième par a'', et en ajoutant, etc.,

$$\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}=0,\qquad \frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}=0,\qquad \frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}=0.$$

Telles sont les équations de l'axe instantané par rapport aux coordonnées ξ, η, ζ. Il est facile de voir d'ailleurs que les équations précédentes se réduisent en réalité à deux; il suffit, pour cela, de les ajouter, après les avoir multipliées respectivement par ξ, $-\eta$ et ζ. Elles peuvent encore être remplacées par les suivantes

$$(18)\qquad \xi\tau = -\eta\sigma = \zeta\rho.$$

τ^{-1}, $-\sigma^{-1}$ et ρ^{-1} sont donc proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe instantané. Si $\theta = 0$, σ^{-1} s'annule en vertu de (15), et, par suite, dans le cas où la roulante et la base ont même plan osculateur, l'axe instantané est perpendiculaire à la normale principale commune. Nous avons laissé θ constant; mais, si on le supposait variable, il suffirait d'ajouter aux valeurs trouvées pour $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$ les dérivées de X, Y, Z prises en faisant varier θ seul, et comme l'on a

$$X = x + a\xi + b_1\eta + c_1\zeta,$$

on en conclurait, en faisant varier θ seul,

$$\frac{dX}{ds} = \left(\eta \frac{db_1}{ds} + \zeta \frac{dc_1}{ds}\right)\frac{d\theta}{ds},$$

ou, en vertu des formules (3),

$$\frac{dX}{ds} = \Big[\eta(-b\sin\theta - c\cos\theta) + \zeta(b\cos\theta - c\sin\theta)\Big]\frac{d\theta}{ds},$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{d\theta}{ds} = \theta'$,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= (-c_1\eta + b_1\zeta)\,\theta', \\ \frac{dY}{ds} &= (-c'_1\eta + b'_1\zeta)\,\theta', \\ \frac{dZ}{ds} &= (-c''_1\eta + b''_1\zeta)\,\theta', \end{aligned}\right.$$

en sorte que les formules (16) devraient être remplacées par les suivantes

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= a\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \\ \frac{dY}{ds} &= a'\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b'_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c'_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \\ \frac{dZ}{ds} &= a''\left(\frac{\eta}{\rho} - \frac{\zeta}{\sigma}\right) - b''_1\left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\zeta}{\tau} - \theta'\zeta\right) + c''_1\left(\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi}{\sigma} - \theta'\eta\right), \end{aligned}\right.$$

et l'on reconnaît encore que

$$(X - x)\,dX + (Y - y)\,dY + (Z - z)\,dZ = 0.$$

Les équations de l'axe instantané s'en déduisent sans difficulté. Elles sont encore données par les formules (18), pourvu que l'on pose $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T^0}-\frac{1}{T}-\theta'$, au lieu de poser $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}$; de sorte que, avec cette convention, les formules (16) conviendront encore au cas où l'angle θ serait assujetti à varier en même temps que s. Ce sera donc de ces formules que nous ferons usage, mais nous poserons

$$(21)\qquad \frac{1}{\tau}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}-\frac{d\theta}{ds}.$$

Élevons les équations (16) au carré, et ajoutons-les; nous aurons, en désignant par dS l'élément de l'arc de roulette,

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\xi^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}\right)+\eta^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)+\zeta^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)-2\eta\zeta\frac{1}{\rho\sigma}+2\xi\zeta\frac{1}{\rho\tau}+2\eta\xi\frac{1}{\sigma\tau},$$

ou bien encore

$$\frac{dS^2}{ds^2}=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)-\left(\frac{\eta}{\sigma}+\frac{\zeta}{\rho}-\frac{\xi}{\tau}\right)^2.$$

On voit, par cette formule, que le lieu des points qui décrivent des arcs égaux est un cylindre de révolution. On peut considérer, si l'on veut, $-\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\sigma}$ et $\frac{1}{\rho}$ comme les composantes d'une droite fictive $\frac{1}{G}$, et poser

$$\frac{1}{\tau}=\frac{1}{G}\cos\alpha,\quad \frac{1}{\sigma}=\frac{1}{G}\cos\beta,\quad \frac{1}{\rho}=\frac{1}{G}\cos\gamma;$$

on peut alors écrire

$$\frac{dS^2}{ds^2}=\frac{N^2}{G^2}-\frac{N^2}{G^2}\cos^2(N,G),$$

d'où l'on tire

$$dS=ds\frac{N}{G}\sin(N,G).$$

Dans cette hypothèse, les formules (16) pourraient s'écrire

$$\frac{dX}{dx}=\frac{N}{G}(a\cos A+b_1\cos B+c_1\cos C)\sin(N,G),\ \ldots,$$

A, B, C désignant alors les cosinus directeurs de la perpendiculaire aux directions $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\frac{\xi}{N}$, $\frac{\eta}{N}$, $\frac{\zeta}{N}$. Or la direction $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ est celle de l'axe instantané, la direction A, B, C est celle d'une droite perpendiculaire à OM et à l'axe instantané. Appelons cette droite MI, nous pourrons écrire

$$\frac{dX}{ds}=\frac{N}{G}\cos u \sin(N,G),\ \frac{dY}{ds}=\frac{N}{G}\cos v \sin(N,G),\ \frac{dZ}{ds}=\frac{N}{G}\cos w \sin(N,G);$$

u, v et w seront alors les angles que MI fait avec les axes fixes. Ajoutons que $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\sigma}$ et $-\frac{1}{\tau}$ ne sont autre chose que les composantes de la rotation instantanée $\frac{1}{G}$.

Occupons-nous maintenant de la recherche du rayon de courbure de la roulette. A cet effet, différentions les équations (16) ; nous aurons, en ayant égard aux formules de M. Serret, ou aux formules (10), (11), (12), que l'on en déduit en laissant θ constant,

$$\begin{aligned}(21)\quad \frac{d^2X}{ds^2}= &\left(\frac{1}{R}\cos\theta+\frac{c_1}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\eta}{\rho}-\frac{\zeta}{\sigma}\right)+\left(\frac{a}{R}\cos\theta+\frac{c_1}{T}\right)\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\zeta}{\tau}\right)\\ &+\left(\frac{b_1}{T}-\frac{a}{R}\sin\theta\right)\left(\frac{\eta}{\tau}+\frac{\xi}{\sigma}\right)+a\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\eta}{ds}-\frac{1}{\sigma}\frac{d\zeta}{ds}\right)-b_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\xi}{ds}+\frac{1}{\tau}\frac{d\zeta}{ds}\right)\\ &+c_1\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\eta}{ds}+\frac{1}{\sigma}\frac{d\xi}{ds}\right)+a\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}\right)-b_1\left(\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}+\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}\right)\\ &+c_1\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées de ξ, η, ζ par leurs valeurs (14); la seconde partie de $\frac{d^2X}{ds^2}$ prend la forme

$$\begin{aligned}a\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\zeta}{T_0}-\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{T_0}\right)-b_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\eta}{R_0}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\tau}\frac{\eta}{T_0}\right)&\\ +c_1\left(-\frac{1}{\tau}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\tau}\frac{\zeta}{T_0}+\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{R_0}-\frac{1}{\sigma}\right)&,\end{aligned}$$

et la formule (21) devient alors

$$\begin{aligned}(22)\quad \frac{d^2X}{ds^2}= &\,a\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\xi}{\rho}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\zeta}{\tau}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\eta}{\tau}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\xi}{\sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\zeta}{T_0}-\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{T_0}\right)\\ &+b_1\left(-\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\frac{\cos\theta}{R}\frac{\eta}{\rho}-\frac{\cos\theta}{R}\frac{\zeta}{\sigma}+\frac{1}{T}\frac{\eta}{\tau}+\frac{1}{T}\frac{\xi}{\sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{\eta}{R_0}+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\tau}\frac{\eta}{T_0}\right)\\ &+c_1\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\sin\theta}{R}\frac{\eta}{\rho}-\frac{\sin\theta}{R}\frac{\zeta}{\sigma}+\frac{1}{T}\frac{\xi}{\rho}+\frac{1}{T}\frac{\zeta}{\tau}-\frac{1}{\tau}\frac{\xi}{R_0}-\frac{1}{\tau}\frac{\zeta}{T_0}+\frac{1}{\sigma}\frac{\eta}{R_0}-\frac{1}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Cette formule et ses analogues peuvent s'écrire plus simplement; il suffit, pour cela, de poser

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\cos\theta}{R\rho}-\frac{\sin\theta}{R\sigma}-\frac{1}{\rho R_0},\quad \frac{1}{\mu}=-\frac{\sin\theta}{R\tau}-\frac{1}{\sigma\tau},\quad \frac{1}{\nu}=\frac{\cos\theta}{R\tau}-\frac{1}{\rho T_0},$$

$$\frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{T\sigma},\quad \frac{1}{\mu'}=\frac{\cos\theta}{R\rho}+\frac{1}{T\tau}-\frac{1}{\rho R_0}-\frac{1}{\tau T_0},\quad \frac{1}{\nu'}=-\frac{\mathrm{cs}\theta}{R\sigma},$$

$$\frac{1}{\lambda''}=\frac{1}{T\rho}-\frac{1}{\tau R_0},\quad \frac{1}{\mu''}=\frac{\sin\theta}{R\rho}+\frac{1}{\sigma R_0},\quad \frac{1}{\nu''}=-\frac{1}{R\sigma}+\frac{1}{T\tau}-\frac{1}{\tau T_0},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{R\rho},\quad \frac{1}{\lambda'}=\frac{1}{\sigma T},\quad \frac{1}{\lambda''}=-\frac{1}{T\rho},\\ &\frac{1}{\mu}=-\frac{2}{T\sigma},\quad \frac{1}{\mu'}=\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\rho^2},\quad \frac{1}{\mu''}=\frac{1}{\sigma\rho}-\frac{1}{\sigma R_0},\\ &\frac{1}{\nu}=-\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{T_0}\right),\ \frac{1}{\nu'}=-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{\rho}\right)\ \frac{1}{\nu''}=-\frac{1}{\sigma R}+\frac{1}{T^2}-\frac{1}{T_0^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont un peu plus simples que les précédentes; elles permettent la construction par la règle et le compas de λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'', dès que l'on connaît R, R_0, T, T_0, c'est-à-dire les éléments de la figure; en d'autres termes, il n'est pas nécessaire, pour les obtenir, de connaître la nature de la roulante et de la base. Les formules (22) deviennent ainsi

$$(24)\quad \begin{aligned}\frac{d^2X}{ds^2}=a&\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\mu}+\frac{\zeta}{\nu}\right)\\ &+b_1\left(-\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}-\zeta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\frac{\xi}{\lambda'}+\frac{\eta}{\mu'}+\frac{\zeta}{\nu'}+\frac{1}{\rho}\right)\\ &+c_1\left(\eta\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau}+\xi\frac{d}{ds}\frac{1}{\sigma}+\frac{\xi}{\lambda''}+\frac{\eta}{\mu''}+\frac{\zeta}{\nu''}-\frac{1}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

On voit par cette formule, sans qu'il soit nécessaire de développer les calculs, que le rayon de courbure de la roulette pourra se construire avec la règle et le compas, si l'on connaît les rayons R, R_0, T et T_0, ainsi que leurs dérivées.

Si, à l'aide des équations (16) et des formules de réduction connues $a=b'c''-c'b''$, ..., on forme les quantités d^2XdY-d^2YdX, ..., qui sont les coefficients de l'équation du plan osculateur, on voit que ces expressions seront du second degré en ξ, η, ζ (et homogènes, si l'on a $\frac{1}{\rho}=0$, $\frac{1}{\sigma}=0$). dS^3 sera du degré $\frac{3}{2}$; en sorte que, si l'on chasse les radicaux et si l'on écrit que la courbure est égale à un nombre donné, on obtiendra une équation qui sera du 6e degré en ξ, η, ζ. Ainsi les points qui décrivent des rou-

lettes de même courbure se trouvent sur une courbe du sixième degré. Les points qui décrivent des roulettes de courbure nulle, c'est-à-dire qui possèdent un point d'inflexion, sont situés sur une courbe obtenue en posant

$$d^2X dY - d^2Y dX = 0, \ldots,$$

ou

$$\frac{d^2X}{dX} = \frac{d^2Y}{dY} = \frac{d^2Z}{dZ}.$$

Cette courbe se trouve évidemment sur deux surfaces du second ordre, qui se réduisent à deux cônes quand $\frac{1}{\rho} = 0$ et $\frac{1}{\sigma} = 0$. $\frac{1}{\sigma}$ est nul pour $\theta = 0$ et pour $\frac{1}{R} = 0$, ce qui entraînerait la condition $\frac{1}{R_0} = 0$, et l'on aurait alors des droites pour base et pour roulante, ce qui est inadmissible quel que soit s. On peut avoir aussi $\frac{1}{\rho} = 0$ et $\frac{1}{\sigma} = 0$ en prenant $\theta = 0$ et $R = R_0$; alors on a des courbes de même courbure et ne différant que par leur torsion. L'axe instantané faisant partie de la courbe, celle-ci est une cubique gauche.

On pourrait calculer $\frac{d^3X}{ds^3}, \ldots$ comme nous avons calculé $\frac{d^2X}{ds^2}, \ldots$, mais il va sans dire que les calculs seraient d'une longueur rebutante; quoi qu'il en soit, on peut observer que $\frac{d^3X}{ds^3}$ se ramènerait à une fonction linéaire de ξ, η, ζ, et il en serait certainement de même de toutes les autres dérivées. Supposons que l'on calcule le rayon de torsion de la roulette et qu'on l'égale à une constante, on obtiendra une équation qui sera seulement du 4^e degré. Ainsi les points qui décrivent des roulettes de même torsion sont situés sur une même surface du 4^e ordre, et l'on peut voir que ceux qui en particulier décrivent des roulettes de torsion nulle sont situés sur une surface qui n'est que du 3^e ordre; dans ce cas, en effet, la surface se décompose en deux parties, dont l'une est l'axe instantané de rotation.

Examinons maintenant quelques cas particuliers de nos formules générales, et, pour commencer, supposons $\theta = 0$. Alors $\frac{1}{\sigma}$ est nul, et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R\rho}, \quad \frac{1}{\mu} = 0, \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_0}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda'} = 0, \ \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{T^2} - \frac{1}{\rho^2}, \ \frac{1}{\nu'} = 0, \ \frac{1}{\lambda''} = -\frac{1}{T\rho}, \ \frac{1}{\mu''} = 0, \ \frac{1}{\nu''} = \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}.$$

En effectuant les calculs, on trouve que le seul terme contenant les dérivées de ρ et de τ est de la forme de $\eta\ (a''\xi + b''_1\eta + c''_1\zeta)\ \frac{d}{ds}\frac{1}{\rho\tau}$. De telle sorte que, si le produit $\frac{1}{\rho\tau}$ reste constant, on pourra toujours construire le rayon de courbure de la roulette à l'aide des seuls éléments de la figure, pourvu que l'on connaisse R, R_0, T et T_0.

En particulier, lorsque deux hélices ordinaires roulent l'une sur l'autre sans glisser, de manière à ce que leurs plans osculateurs se confondent, on peut toujours construire, avec la règle et le compas, le rayon de courbure d'une roulette quelconque; on peut s'assurer sur les formules générales que le théorème a encore lieu quand les plans osculateurs font entre eux un angle constant.

Si l'on suppose $T = T_0$, ou $\frac{1}{\tau} = 0$ avec $\theta = 0$, on obtient la formule assez simple que voici, pour expression du rayon de courbure r de la roulette,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\rho^2}{(\xi^2 + \eta^2)^3}\left[\frac{\xi^4}{T^3} + \frac{\eta^2\xi^2}{T^2} + \left(\frac{\xi^2}{\rho} + \frac{\eta^2}{\rho} - \eta - \frac{\xi\zeta}{T}\right)^2\right].$$

Cette formule est applicable, par exemple, au cas où les deux courbes que l'on fait rouler l'une sur l'autre sont identiques, et symétriquement placées par rapport à la tangente commune. Si l'on suppose $\frac{1}{T} = 0$ et $\zeta = 0$, on retrouve la formule connue relative aux roulettes planes; en effet, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\rho^2}{N^6}\left(\frac{N^2}{\rho} - \eta\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho}{N^3}\left(\frac{N}{\rho} - \eta\right).$$

Si l'on pose alors $\eta = N \sin\varphi$, φ désignant l'angle que fait OM avec la tangente commune, on trouve

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho}{N^3}\left(\frac{N^2}{\rho} - N\sin\varphi\right),$$

ou enfin

$$r = \frac{N^2}{N - \rho\sin\varphi},$$

ce qui est la formule connue.

Signalons encore un cas particulier intéressant : si l'on suppose $T = T_0$, $\zeta = 0$, R et R_0 constants, on obtient des courbes dont le rayon de courbure peut toujours se construire géométriquement, ainsi que le rayon de torsion; ces courbes peuvent être utilisées dans la théorie des engrenages coniques.