BULLETIN DE LA S. M. F.

F. BALITRAND

Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 26-32
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__26_1>

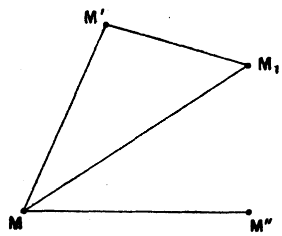
SUR LE DÉVELOPPEMENT DES COORDONNÉES D'UN POINT DANS LE MOUVEMENT RELATIF ET SUR LA COURBURE DES LIGNES ORTHOGONALES;

par M. BALITRAND.

Considérons dans le plan deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy et deux axes rectangulaires mobiles $O'x'$, $O'y'$ qui, à l'origine, coïncident avec les axes fixes. Soit M un point invariablement lié aux axes mobiles et soient x, y ses coordonnées par rapport aux axes fixes. Soient M_1, M', M'' les positions qu'il occupe au bout de l'instant Δt dans le mouvement absolu, le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

Le triangle $MM'M_1$ montre que MM_1 est la résultante de MM'

Fig. 1.



et de $M'M_1$; de sorte qu'en projetant sur les axes Ox et Oy on a

$$\delta x = dx + \Delta_1 x,$$
$$\delta y = dy + \Delta_1 y,$$

les caractéristiques δ, d, Δ se rapportant aux déplacements absolu, relatif et d'entraînement et Δ_1 désignant ce que devient Δ quand on y remplace les coordonnées x, y du point M par les coordonnées $x + dx$, $y + dy$ du point M'. En désignant par α l'angle que fait Ox avec $O'x'$ et par x_0, y_0 les coordonnées du point O' par rapport aux axes Ox, Oy, les formules de la transformation des coordonnées

$$x_1 = x_0 + x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y_1 = y_0 + x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

donnent immédiatement

$$\Delta_1 x = \Delta x + dx\cos\alpha - dy\sin\alpha - dx,$$
$$\Delta_1 y = \Delta y + dx\sin\alpha + dy\cos\alpha - dy,$$

et, par suite,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + \Delta x + dx\cos\alpha - dy\sin\alpha - dx,\\ \delta y &= dy + \Delta y + dx\sin\alpha + dy\cos\alpha - dy.\end{aligned}\right.$$

Ces formules ont lieu aussi bien pour des déplacements finis que pour des déplacements infiniment petits, aussi bien pour le cas où x et y dépendent d'une seule variable que pour le cas où x et y dépendent de deux variables. Supposons qu'il s'agisse d'un déplacement infiniment petit et développons en séries toutes les quantités qui entrent dans les formules (1); nous obtenons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x + \frac{1}{1.2}\delta^2 x + \frac{1}{1.2.3}\delta^3 x + \ldots = {} & dx + \frac{1}{1.2}d^2x + \frac{1}{1.2.3}d^3x + \ldots\\ & + \Delta x + \frac{1}{1.2}\Delta^2 x + \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 x + \ldots\\ & - \alpha\left(dy + \frac{1}{1.2}d^2y + \ldots\right)\\ & - \frac{\alpha^2}{1.2}\left(dx + \frac{1}{1.2}d^2x + \ldots\right) + \ldots,\\ \delta y + \frac{1}{1.2}\delta^2 y + \frac{1}{1.2.3}\delta^3 y + \ldots = {} & dy + \frac{1}{1.2}d^2y + \frac{1}{1.2.3}d^3y + \ldots\\ & + \Delta y + \frac{1}{1.2}\Delta^2 y + \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots\\ & + \alpha\left(dx + \frac{1}{1.2}d^2x + \ldots\right)\\ & - \frac{\alpha^2}{1.2}\left(dy + \frac{1}{1.2}d^2y + \ldots\right) + \ldots.\end{aligned}\right.$$

On déduit de là, en se limitant aux éléments du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre, etc., les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} \delta x = dx + \Delta x, & \delta y = dy + \Delta y, \\ \delta^2 x = d^2 x + \Delta^2 x - 2\alpha\, dy, & \delta^2 y = d^2 y + \Delta^2 y + 2\alpha\, dx, \\ \delta^3 x = d^3 x + \Delta^3 x - 3\alpha\, d^2 y - 3\alpha^2\, dx, & \delta^3 y = d^3 y + \Delta^3 y + 3\alpha\, d^2 x - 3\alpha\, dy, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Les formules (3) s'appliquent à un déplacement infiniment petit quelconque et permettent de développer en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de α, les coordonnées x et y. Considérons le cas où les axes Ox et Oy coïncident avec la tangente et la normale à une courbe et choisissons l'arc de cette courbe pour variable indépendante. En désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe au point O, les formules (3) se transforment dans les suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\delta x}{ds} = \dfrac{dx}{ds} + 1 - \dfrac{y}{\rho}, \\ \dfrac{\delta y}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{x}{\rho}, \\ \dfrac{\delta^2 x}{ds^2} = \dfrac{d^2 x}{ds^2} + \dfrac{y}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds} - \dfrac{3}{\rho}\dfrac{dy}{ds}, \\ \dfrac{\delta^2 y}{ds^2} = \dfrac{d^2 y}{ds^2} - \dfrac{x}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds} + \dfrac{3}{\rho}\dfrac{dx}{ds}, \\ \dfrac{\delta^3 x}{ds^3} = \dfrac{d^3 x}{ds^3} - \dfrac{4}{\rho}\dfrac{d^2 y}{ds^2} + \dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d\rho}{ds} - \dfrac{3}{\rho^2}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{y}{\rho^2}\left(\dfrac{d^2\rho}{ds^2} - \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\right), \\ \dfrac{\delta^3 y}{ds^3} = \dfrac{d^3 y}{ds^3} + \dfrac{4}{\rho}\dfrac{d^2 x}{ds^2} - \dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\rho}{ds} - \dfrac{3}{\rho^2}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{x}{\rho^2}\left(\dfrac{d^2\rho}{ds^2} - \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\right), \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

En désignant par $x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0, \dots$ ce que deviennent $x, y, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{d^2x}{ds^2}, \dfrac{d^2y}{ds^2}, \dots$ pour $s = 0$, les relations (4) fourniront pour x et y les développements suivants, ordonnés suivant les puissances croissantes de s :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \left(x'_0 + 1 - \dfrac{y_0}{\rho}\right) s + \left(x''_0 + \dfrac{y_0\rho'}{\rho} - \dfrac{3y'_0}{\rho}\right)\dfrac{s^2}{12} + \dots, \\ y = y_0 + \left(y'_0 + \dfrac{x_0}{\rho}\right) s + \left(y''_0 - \dfrac{x_0\rho'}{\rho} + \dfrac{3x'_0}{\rho}\right)\dfrac{s^2}{12} + \dots. \end{array}\right.$$

Enfin, les relations (3) conduisent aux formules très importantes qui assurent la fixité du point M dans le plan :

$$dx + \Delta x = 0, \qquad dy + \Delta y = 0, \tag{6}$$

et dans le cas particulier des formules (4) :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho}. \tag{6'}$$

Ce sont ces formules et les formules analogues pour l'espace qui, établies par M. Cesaro (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 128; 1886), ont été employées par lui avec tant de succès, dans ses recherches sur la Géométrie intrinsèque des courbes gauches et des surfaces réglées.

Nous allons faire une application des formules qui précèdent à la théorie de la courbure des lignes orthogonales dans le plan.

Courbure des lignes orthogonales. — Supposons que le plan rapporté à deux systèmes de lignes coordonnées (u) et (v) admette pour élément linéaire l'expression

$$ds^2 = f^2\,du^2 + 2fg\cos\theta\,du\,dv + g^2\,dv^2. \tag{1}$$

Soit M un point du plan correspondant aux courbes (u) et (v) et M′ un point infiniment voisin correspondant aux courbes ($u + du$) et ($v + dv$). Prenons comme axes mobiles deux droites issues du point M, la droite Mx faisant un angle φ avec la tangente à la courbe (u), cet angle variant d'ailleurs d'un point à un autre. Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan par rapport à ces axes mobiles. Pour passer du point M au point M′ infiniment voisin, on peut se déplacer d'abord suivant $u =$ const., puis suivant $v =$ const.; on trouve alors les formules

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + g\cos\varphi\,dv + f\cos\psi\,du \\ &\quad - y\left(\frac{1}{\rho_u} + \varphi'\right) g\,dv - y\left(\frac{1}{\rho_v} + \psi'\right) f\,du, \\ \delta y &= dy + g\sin\varphi\,dv + f\sin\psi\,du \\ &\quad + x\left(\frac{1}{\rho_u} + \varphi'\right) g\,dv + x\left(\frac{1}{\rho_v} + \psi'\right) f\,du. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ρ_u et ρ_v désignent les rayons de courbure des courbes (u) et (v) au point M, et l'on a posé

$$\psi = \varphi + \theta.$$

La caractéristique d se rapporte au déplacement relatif et la caractéristique δ au déplacement absolu.

Les formules (2) se simplifient si l'axe Mx coïncide avec la tangente à la courbe (u). Il suffit de faire $\varphi = 0$ dans les formules (2) qui, dans cette hypothèse, se réduisent à

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + g\,dv + f\cos\theta\,du - y\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right) - y\theta' f\,du,\\ \delta y &= dy \qquad\quad + f\sin\theta\,du + x\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right) + x\theta' f\,du.\end{aligned}\right.$$

Les formules (2) se simplifient encore si $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si les lignes coordonnées sont orthogonales. Faisons donc $\theta = \frac{\pi}{2}$; nous obtenons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + g\cos\varphi\,dv - f\sin\varphi\,du\\ &\qquad - y\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right) - y\varphi'(g\,dv + f\,du),\\ \delta y &= dy + g\sin\varphi\,dv + f\cos\varphi\,du\\ &\qquad + x\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right) + x\varphi'(g\,dv + f\,du).\end{aligned}\right.$$

Enfin, l'on peut combiner les hypothèses (3) et (4), c'est-à-dire supposer $\varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; on arrive alors aux formules très simples et très importantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x &= dx + g\,dv - y\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right),\\ \delta y &= dy + f\,du + x\left(g\frac{dv}{\rho_u} + f\frac{du}{\rho_v}\right).\end{aligned}\right.$$

Si nous appliquons maintenant les relations (6) du premier paragraphe, nous obtenons, pour la fixité d'un point, les conditions suivantes

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} + f\cos\theta - \dfrac{fy}{\rho_v} - fy\theta' = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial u} + f\sin\theta + \dfrac{fx}{\rho_v} + fx\theta' = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + g - \dfrac{gy}{\rho_u} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{gx}{\rho_u} = 0, \end{cases}$$

et pour l'invariabilité de la direction l, m les relations

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u} - \dfrac{fm}{\rho_v} - fm\theta' = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{fl}{\rho_v} - fl\theta' = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} - \dfrac{gm}{\rho_u} = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{gl}{\rho_u} = 0. \end{cases}$$

Exprimons que les dérivées de l et de m, fournies par les relations (7), satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial m}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial m}{\partial v};$$

on obtient ainsi

$$(8)\qquad f\frac{\partial \frac{1}{\rho_v}}{\partial v} - g\frac{\partial \frac{1}{\rho_u}}{\partial u} + \frac{1}{\rho_v}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{\rho_u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(f\theta') = 0.$$

Opérant de même sur les dérivées de x et de y tirées des équations (6), on obtient les nouvelles relations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}(f\cos\theta) + \dfrac{fg\sin\theta}{\rho_u} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(f\theta') - \dfrac{\partial}{\partial v}(f\sin\theta) + fg\left(\theta' + \dfrac{1}{\rho_v} + \dfrac{\cos\theta}{\rho_u}\right) = 0. \end{cases}$$

Si l'on part des relations (5) et que l'on opère de même, on arrive aux formules suivantes, très simples,

$$(6')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{fy}{\rho_v} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial u} + f + \dfrac{fx}{\rho_v} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + g - \dfrac{gy}{\rho_u} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{gx}{\rho_u} = 0; \end{cases}$$

$$(7')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial u} - \dfrac{fm}{\rho_v} = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial u} + \dfrac{fl}{\rho_v} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} - \dfrac{gm}{\rho_u} = 0, & \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{gl}{\rho_u} = 0. \end{cases}$$

Ces formules constituent l'extension au cas des coordonnées curvilignes orthogonales des formules de Cesaro, qui n'avaient été données jusqu'ici que pour le cas des coordonnées rectilignes orthogonales. Elles vont nous mener à des relations connues qui sont, en quelque sorte, les formules fondamentales de la théorie des surfaces de Codazzi, dans le cas où la surface de référence est plane. La méthode qui y conduit est d'ailleurs identique à celle qui nous a servi à établir les formules fondamentales de la périmorphie et les formules de Codazzi (*Bulletin de la Société Mathématique,* 1894).

Opérons sur les formules (6′) et (7′), comme nous l'avons fait sur les formules (6) et (7); nous obtenons

$$(8') \qquad f\frac{\partial\frac{1}{\rho_v}}{\partial v} - g\frac{\partial\frac{1}{\rho_u}}{\partial u} + \frac{1}{\rho_v}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{\rho_u}\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

$$(9') \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{fg}{\rho_u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{fg}{\rho_v}.$$

Au moyen des relations (9′), la relation (8′) peut s'écrire

$$(10) \qquad f\frac{\partial\frac{1}{\rho_v}}{\partial v} - g\frac{\partial\frac{1}{\rho_u}}{\partial u} + \frac{fg}{\rho_v^2} + \frac{fg}{\rho_u^2} = 0,$$

et, si l'on pose

$$f\,du = ds_u, \qquad g\,dv = ds_v,$$

la relation (10) devient

$$(11) \qquad \frac{-\dfrac{\partial\frac{1}{\rho_u}}{\partial u}du}{ds_u} + \frac{\dfrac{\partial\frac{1}{\rho_v}}{\partial v}dv}{ds_v} + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{1}{\rho_u^2} = 0.$$

Elle ne diffère que par les notations de celle qui a été découverte par Lamé (voir *Journal de l'École Polytechnique,* XXIX^e Cahier, p. 157, et Bertrand, *Traité de Calcul différentiel,* p. 544).

Observons enfin que les relations (9′), donnant les expressions des rayons de courbure ρ_u et ρ_v en fonction des coefficients de l'élément linéaire, conduisent immédiatement aux théorèmes établis par M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel,* p. 541 et suivantes.