G. FLOQUET

Sur les fonctions algébriques à trois déterminations

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 76-87

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__76_0>

SUR LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES A TROIS DÉTERMINATIONS;

Par M. G. Floquet.

Soit

$$Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0$$

l'équation algébrique du troisième degré en u, où A, B, C, D désignent des polynômes quelconques entiers en z, et qui définit u comme fonction algébrique de z. Dans bon nombre de questions se rattachant à cette équation, on a besoin de connaître, d'une manière générale, indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux coefficients, la forme analytique des racines dans le domaine d'un point singulier. C'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on veut étudier une intégrale abélienne appartenant à une équation *quelconque* du troisième degré. Je me propose ici d'obtenir, en la précisant autant que possible, la forme analytique en question.

Le changement de u en $u - \frac{B}{3A}$ ramenant toujours l'équation proposée à une équation de même forme entière

$$(1) \qquad ru^3 + pu + q = 0,$$

mais privée du terme u^2, j'envisagerai seulement cette dernière. Je supposerai son premier membre *indécomposable*, de sorte qu'entre ses racines, il ne pourra exister aucune relation linéaire, homogène, à coefficients constants *inégaux*. J'emploierai, pour chaque cas, des méthodes spéciales, afin d'obtenir un résultat aussi précis, aussi détaillé que possible.

1. Regardant en premier lieu r comme égal à l'unité, je considère l'équation

$$(2) \qquad u^3 + p(z)u + q(z) = 0.$$

Les seuls points singuliers à distance finie sont les zéros du discriminant

$$\Delta(z) = 4p^3(z) + 27q^2(z),$$

en chacun desquels l'équation (2) a deux racines égales et différentes de zéro, ou trois racines nulles. Soit a un de ces points, et soient u_1, u_2, u_3 les branches de la fonction u envisagées dans son domaine. Je vais étudier et exprimer ces fonctions, en utilisant ce fait que leur somme est identiquement nulle.

2. Supposons d'abord que a, étant racine multiple d'ordre k de Δ, n'annule pas q, auquel cas a n'annule pas p non plus :

$$\Delta(z) = (z-a)^k \Delta_1(z), \qquad \Delta_1(a) \neq 0, \qquad p(a) \neq 0, \qquad q(a) \neq 0.$$

Pour $z = a$, l'équation (2) aura une racine double et une racine simple différentes de zéro. Soit u_3 celle des branches u_1, u_2, u_3 qui, au point a, coïncide avec la racine simple : on peut alors poser

$$u_3 = -2\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine du point a et non nulle en ce point. On en conclut

$$(3) \qquad u_1 + u_2 = 2\varphi(z).$$

D'autre part, les trois fonctions $(u_2 - u_3)^2$, $(u_3 - u_1)^2$, $(u_1 - u_2)^2$ satisfont à l'équation aux carrés des différences des racines

$$U^3 + 6pU^2 + 9p^2U + \Delta = 0;$$

or, la dernière seule est nulle pour $z = a$; elle est donc de la forme $(z-a)^\rho \varpi(z)$, $\varpi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a et $\varpi(a)$ différant de zéro.

Comme le produit de ces trois fonctions est égal à $-\Delta$, on a

$$(u_2 - u_3)^2(u_3 - u_1)^2 = -(z-a)^{k-\rho}\frac{\Delta_1(z)}{\varpi(z)},$$

ce qui exige $\rho = k$, puisque le premier membre est fini et non nul pour $z = a$. On a, par suite,

$$(u_1 - u_2)^2 = (z-a)^k \varpi(z);$$

d'où l'on conclut, puisque $\varpi(a)$ n'est pas nul,

$$u_1 - u_2 = 2(z-a)^{\frac{k}{2}}\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a et $\psi(a)$ différant de zéro. En combinant cette relation avec la relation (3), on obtient finalement

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = \varphi(z) + (z-a)^{\frac{k}{2}}\psi(z), \\ u_2 = \varphi(z) - (z-a)^{\frac{k}{2}}\psi(z), \\ u_3 = -2\varphi(z), \end{cases}$$

comme expressions des branches u_1, u_2, u_3 dans le domaine du point a, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant deux fonctions régulières et non nulles en ce point.

3. Supposons maintenant que $z = a$ annule q, auquel cas il annule aussi p; soient β le degré de multiplicité de a relativement à p, et γ le degré relatif à q :

$$p(z) = (z-a)^\beta p_1(z), \quad q(z) = (z-a)^\gamma q_1(z), \quad p_1(a) \neq 0, \quad q_1(a) \neq 0.$$

A cause de

$$\Delta = 4(z-a)^{3\beta} p_1^3 + 27(z-a)^{2\gamma} q_1^2,$$

on voit que, si k désigne toujours le degré de multiplicité de la racine a de Δ, k sera égal à 2γ ou à 3β, selon que 2γ sera inférieur ou supérieur à 3β, et que k sera au moins égal à la valeur commune de 2γ et de 3β lorsque ces deux nombres seront égaux. Je vais examiner successivement ces trois cas.

Premier cas. — $3\beta > 2\gamma$, $k = 2\gamma$.

La formule de Cardan conduit immédiatement aux expressions cherchées de u_1, u_2, u_3. La résolvante de l'équation (2) étant, en effet,

$$U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

si je pose

$$U = (z-a)^\gamma V,$$

elle devient

$$V^2 + q_1 V - \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 (z-a)^{3\beta - 2\gamma} = 0,$$

équation qui, pour $z = a$, admet deux racines distinctes, dont une seule est nulle. D'où je conclus que les deux racines de la résolvante sont holomorphes dans le domaine du point a, et que l'une d'elles admet ce point comme zéro d'ordre γ. Représentons-la par $(z-a)^\gamma \varpi(z)$, $\varpi(a)$ n'étant pas nul; puis désignons par $(z-a)^{\frac{\gamma}{3}}\varphi(z)$, avec $\varphi(a)\neq 0$, une quelconque des trois déterminations de $\sqrt[3]{(z-a)^\gamma \varpi(z)}$.

Si l'on pose alors

$$-\frac{1}{3}\frac{p_1(z)}{\varphi(z)}=\psi(z),$$

la formule connue donne les expressions suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= (z-a)^{\frac{\gamma}{3}}\left[\ \ \varphi(z)+\ \ (z-a)^{\beta-\frac{2\gamma}{3}}\psi(z)\right],\\ u_2 &= (z-a)^{\frac{\gamma}{3}}\left[j\ \varphi(z)+j^2(z-a)^{\beta-\frac{2\gamma}{3}}\psi(z)\right],\\ u_3 &= (z-a)^{\frac{\gamma}{3}}\left[j^2\varphi(z)+j\ (z-a)^{\beta-\frac{2\gamma}{3}}\psi(z)\right],\end{aligned}\right.$$

où j et j^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, et où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignent des fonctions régulières et non nulles au point a.

Deuxième cas. — $3\beta < 2\gamma$, $k=3\beta$.

Je poserai ici

$$(z-a)^{\frac{1}{2}}=z', \qquad u=vz'^\beta,$$

$(z-a)^{\frac{1}{2}}$ désignant une quelconque des deux déterminations de $\sqrt{z-a}$. L'équation (2) devient

$$(6)\qquad v^3+vp_1(a+z'^2)+z'^{2\gamma-3\beta}q_1(a+z'^2)=0.$$

Pour $z'=0$, elle admet trois racines simples, dont une nulle. Si donc v_1, v_2, v_3 désignent les branches de v envisagées dans le domaine du point $z'=0$, v_1, v_2, v_3 sont holomorphes, et une seule de ces fonctions, qui sera v_3 par exemple, est nulle pour $z'=0$. L'identité

$$(7)\qquad v_1v_2v_3=-z'^{2\gamma-3\beta}q_1(a+z'^2)$$

montre alors que l'ordre infinitésimal de v_3 est $2\gamma-3\beta$, en sorte que l'on peut écrire

$$v_3=-2z'^{2\gamma-3\beta}\varpi(z') \qquad \varpi(0)\neq 0.$$

Comme, d'autre part, la somme $v_1+v_2+v_3$ est nulle, on peut poser

$$v_1 = z'^{2\gamma-3\beta}\varpi(z') + \chi(z'),$$
$$v_2 = z'^{2\gamma-3\beta}\varpi(z') - \chi(z'),$$

$\chi(z')$ étant holomorphe dans le domaine de $z' = 0$ et différent de zéro en ce point.

Mais il est aisé de voir que $\varpi(z')$ et $\chi(z')$ ne dépendent que du carré de z'. Lorsqu'on passe, en effet, du point z' au point $(-z')$ en restant à distance infiniment petite de $z' = 0$, v_3 ne cesse pas de coïncider avec l'unique racine de l'équation (5) qui est voisine de zéro. Or, au point $(-z')$, cette équation devient soit l'équation (5) elle-même, soit sa transformée en $(-v)$, selon que $2\gamma - 3\beta$ est pair ou impair, de sorte que la racine voisine de zéro y est en tout cas $-2(-1)^{2\gamma-3\beta}z'^{2\gamma-3\beta}\varpi(z')$; quant à v_3, il devient $-2(-z')^{2\gamma-3\beta}\varpi(-z')$. On a donc, en égalant ces deux expressions,

$$\varpi(-z') = \varpi(z'),$$

ce qui prouve que $\varpi(z')$ est une fonction paire $\varphi_1(z'^2)$ de z'. L'identité (7) s'écrit alors

$$2v_1v_2\varphi_1(z'^2) = q_1(a + z'^2),$$

et montre, par suite, que v_1v_2 ou $z'^{4\gamma-6\beta}\varphi_1(z'^2) - \chi^2(z')$ est aussi une fonction paire, ce qui exige que $\chi(z')$ soit paire ou impaire : comme $\chi(0)$ n'est pas nul, il faut donc que $\chi(z')$ soit une fonction paire $\psi_1(z'^2)$.

On a, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z'^{2\gamma-3\beta}\varphi_1(z'^2) + \psi_1(z'^2),\\ v_2 &= z'^{2\gamma-3\beta}\varphi_1(z'^2) - \psi_1(z'^2),\\ v_3 &= -2z'^{2\gamma-3\beta}\varphi_1(z'^2), \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &\varphi_1(0) \neq 0,\\ &\psi_1(0) \neq 0, \end{aligned}$$

et si l'on revient maintenant aux quantités u et z, et que l'on pose

$$\varphi_1(z-a) = \varphi(z), \qquad \psi_1(z-a) = \psi(z),$$

on obtient

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= (z-a)^{\frac{\beta}{2}}\left[+\psi(z) + (z-a)^{\gamma-\frac{3\beta}{2}}\varphi(z)\right],\\ u_2 &= (z-a)^{\frac{\beta}{2}}\left[-\psi(z) + (z-a)^{\gamma-\frac{3\beta}{2}}\varphi(z)\right],\\ u_3 &= -2(z-a)^{\gamma-\beta}\varphi(z), \end{aligned}\right.$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant deux fonctions régulières au point a, et non nulles en ce point.

Troisième cas. — $3\beta = 2\gamma$.

Cette égalité exige que l'on ait

$$\beta = 2m, \qquad \gamma = 3m,$$

m désignant un entier. On a donc

$$\Delta = (z-a)^{6m}(4p_1^3 + 27q_1^2) = (z-a)^{6m}\Delta_1,$$

de sorte que, si $\Delta_1(a)$ n'est pas nul, a est racine multiple d'ordre $k = 6m$ de Δ, tandis que, si a annule Δ_1 n fois, a est racine d'ordre $k = 6m + n$ de Δ. Posons

$$u = (z-a)^m v,$$

et l'équation (2) devient

$$(9) \qquad v^3 + p_1 v + q_1 = 0,$$

qui n'a aucune racine nulle pour $z = a$.

Supposant d'abord $\Delta_1(a)$ différent de zéro, auquel cas k est égal à $6m$, l'équation (9) aura trois racines simples au point a. Les branches v_1, v_2, v_3 de v sont holomorphes dans son domaine et non nulles en ce point. Soit

$$v_3 = -2\varphi(z);$$

comme $v_1 + v_2 + v_3$ est nul, il vient

$$v_1 + v_2 = 2\varphi(z),$$

et je puis poser

$$v_1 = \varphi(z) + \psi(z),$$
$$v_2 = \varphi(z) - \psi(z),$$

d'où l'on déduit

$$(10) \qquad \begin{cases} u_1 = (z-a)^m[\varphi(z) + \psi(z)], \\ u_2 = (z-a)^m[\varphi(z) - \psi(z)], \\ u_3 = -2(z-a)^m\varphi(z), \end{cases}$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant des fonctions régulières au point a, non nulles en ce point, et en outre telles que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ ne soient ni égaux, ni égaux et de signes contraires.

Supposons maintenant que a soit racine multiple d'ordre n de Δ_1, auquel cas k est égal à $6m + n$. L'équation (9) se trouve alors dans les mêmes conditions que celles admises au début (2) pour l'équation (2), ce qui permet d'écrire

$$v_1 = \varphi(z) + (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z),$$
$$v_2 = \varphi(z) - (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z),$$
$$v_3 = -2\varphi(z)$$

et, par suite,

$$(11) \qquad \begin{cases} u_1 = (z-a)^m \left[\varphi(z) + (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z)\right], \\ u_2 = (z-a)^m \left[\varphi(z) - (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z)\right], \\ u_3 = -2(z-a)^m \varphi(z), \end{cases}$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions régulières et non nulles au point a.

Remarquons que les expressions (10), qui répondent au cas $n=0$, sont comprises dans les formules (11).

4. En résumé, si j'observe que pour $m=0$, c'est-à-dire pour $3\beta = 2\gamma = 0$, ce qui est le cas examiné au début (n° 2), les formules (11) coïncident avec les formules (4) obtenues dans ce cas, on peut dire que les expressions de u_1, u_2, u_3 sont les expressions (5) si $3\beta > 2\gamma$, les expressions (8) si $3\beta < 2\gamma$, les expressions (11) si $3\beta = 3\gamma$.

Dans ce dernier cas, $6m$, qui peut être nul, est la valeur commune des nombres 3β et 2γ, et n représente la différence $k-6m$, positive ou nulle, entre le degré de multiplicité k de la racine a de Δ et le nombre $6m$.

5. J'ai supposé que le coefficient r de l'équation

$$(1) \qquad ru^3 + pu + q = 0$$

était égal à l'unité. Examinons ce qui a lieu lorsqu'il dépend de z.

Les points singuliers à distance finie sont alors les zéros de $r^3(4p^3 + 27rq^2)$. Pour ceux de ces zéros qui annulent r, l'équation (1) aura au moins deux racines infinies; en chacun des autres, elle aura deux racines égales et différentes de zéro ou trois racines nulles.

Soit a un quelconque de ces points singuliers. Désignons toujours par u_1, u_2, u_3 les branches de u considérées dans son domaine. Appelons λ, μ, ν les nombres de fois que a annule respectivement r, p, q, un au moins de ces trois nombres étant nul, puisque r, p, q sont supposés n'avoir aucun facteur commun.

La substitution $u = v : r$ ramène le cas actuel au cas $r = 1$. L'équation (1) se transforme, en effet, en la suivante :

$$v^3 + prv + qr^2 = 0, \tag{12}$$

et l'on a ici

$$\Delta = r^3(4p^3 + 27rq^2), \qquad \beta = \lambda + \mu, \qquad \gamma = 2\lambda + \nu.$$

Il en résulte que, si v_1, v_2, v_3 désignent les branches de la fonction v, v_1, v_2, v_3 s'expriment par les formules (5) si $2\gamma - 3\beta$ ou $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est négatif, par les formules (8) si $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est positif, et par les formules (11) si $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est nul.

En revenant maintenant aux fonctions u_1, u_2, u_3 par les égalités

$$u_1 = \frac{v_1}{r}, \qquad u_2 = \frac{v_2}{r}, \qquad u_3 = \frac{v_3}{r},$$

et en appelant toujours $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ deux fonctions régulières au point a et non nulles en ce point, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}}\varphi(z) + (z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}}\psi(z),\\ u_2 &= j(z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}}\varphi(z) + j^2(z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}}\psi(z),\\ u_3 &= j^2(z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}}\varphi(z) + j(z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}}\psi(z), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu < 0$;

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (z-a)^{\nu-\mu}\varphi(z) + (z-a)^{\frac{\mu-\lambda}{2}}\psi(z),\\ u_2 &= (z-a)^{\nu-\mu}\varphi(z) - (z-a)^{\frac{\mu-\lambda}{2}}\psi(z),\\ u_3 &= -2(z-a)^{\nu-\mu}\varphi(z), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu > 0$;

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (z-a)^{m-\lambda}\varphi(z) + (z-a)^{m-\lambda+\frac{n}{2}}\psi(z),\\ u_2 &= (z-a)^{m-\lambda}\varphi(z) - (z-a)^{m-\lambda+\frac{n}{2}}\psi(z),\\ u_3 &= -2(z-a)^{m-\lambda}\varphi(z), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu = 0$.

$6m$, qui peut être nul, représente la valeur commune des deux nombres $3(\lambda+\mu)$ et $2(2\lambda+\nu)$, et n est la différence positive ou nulle $k-6m$, entre le degré de multiplicité k de la racine a de Δ et le nombre $6m$.

6. J'ai dit que l'un au moins des trois nombres entiers λ, μ, ν était égal à zéro; d'ailleurs, si c'est λ qui est nul, μ et ν sont nuls ou différents de zéro en même temps. Il résulte de là et des formules (13), (14), (15) que les expressions de u_1, u_2, u_3 sont données dans tous les cas possibles par le Tableau suivant :

Cas : $\lambda = 0$.

$$3\mu > 2\nu.$$
$$\mu \neq 0, \qquad \nu \neq 0.$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (z-a)^{\frac{\nu}{3}}\left[\ \ \varphi(z) + \ \ (z-a)^{\mu-\frac{2\nu}{3}}\psi(z)\right],\\
u_2 &= (z-a)^{\frac{\nu}{3}}\left[j\ \ \varphi(z) + j^2\,(z-a)^{\mu-\frac{2\nu}{3}}\psi(z)\right],\\
u_3 &= (z-a)^{\frac{\nu}{3}}\left[j^2\varphi(z) + j\ \ (z-a)^{\mu-\frac{2\nu}{3}}\psi(z)\right];
\end{aligned}
$$

$$3\mu < 2\nu.$$
$$\mu \neq 0, \qquad \nu \neq 0.$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (z-a)^{\frac{\mu}{2}}\left[+\psi(z) + (z-a)^{\nu-\frac{3\mu}{2}}\varphi(z)\right],\\
u_2 &= (z-a)^{\frac{\mu}{2}}\left[-\psi(z) + (z-a)^{\nu-\frac{3\mu}{2}}\varphi(z)\right],\\
u_3 &= -2(z-a)^{\nu-\mu}\varphi(z);
\end{aligned}
$$

$$3\mu = 2\nu = 6m.$$
$$\mu \geqq 0, \qquad \nu \geqq 0, \qquad n = k-6m \geqq 0.$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (z-a)^m\left[\varphi(z) + (z-a)^{\frac{n}{2}}\psi(z)\right],\\
u_2 &= (z-a)^m\left[\varphi(z) - (z-a)^{\frac{n}{2}}\psi(z)\right],\\
u_3 &= -2(z-a)^m\varphi(z).
\end{aligned}
$$

Cas : $\mu = 0$.

$$\lambda \neq 0, \qquad \nu \geqq 0.$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (z-a)^{-\frac{\lambda}{2}}\left[+\psi(z) + (z-a)^{\nu+\frac{\lambda}{2}}\varphi(z)\right],\\
u_2 &= (z-a)^{-\frac{\lambda}{2}}\left[-\psi(z) + (z-a)^{\nu+\frac{\lambda}{2}}\varphi(z)\right],\\
u_3 &= -2(z-a)^{\nu}\varphi(z).
\end{aligned}
$$

Cas : $\nu = 0$.

$\lambda < 3\mu$.

$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0.$

$$u_1 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}}\left[\varphi(z) + (z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}}\psi(z)\right],$$
$$u_2 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}}\left[j\,\varphi(z) + j^2(z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}}\psi(z)\right],$$
$$u_3 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}}\left[j^2\varphi(z) + j\,(z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}}\psi(z)\right];$$

$\lambda > 3\mu$.

$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0.$

$$u_1 = (z-a)^{-\frac{\lambda-\mu}{2}}\left[+\psi(z) + (z-a)^{\frac{\lambda-3\mu}{2}}\varphi(z)\right],$$
$$u_2 = (z-a)^{-\frac{\lambda-\mu}{2}}\left[-\psi(z) + (z-a)^{\frac{\lambda-3\mu}{2}}\varphi(z)\right],$$
$$u_3 = -2(z-a)^{-\mu}\varphi(z);$$

$\lambda = 3\mu$.

$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad n = k - 12\mu \geqq 0.$

$$u_1 = (z-a)^{-\mu}\left[\varphi(z) + (z-a)^{\frac{n}{2}}\psi(z)\right],$$
$$u_2 = (z-a)^{-\mu}\left[\varphi(z) - (z-a)^{\frac{n}{2}}\psi(z)\right]$$
$$u_3 = -2(z-a)^{-\mu}\varphi(z).$$

7. On déduit aisément de là les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir la racine a de Δ pour que, au point a, les racines de l'équation (1) forment un, deux ou trois systèmes circulaires, et le Tableau précédent montre clairement comment se comportent ces racines selon les valeurs attribuées aux entiers λ, μ et ν.

Par exemple, pour que les racines forment un système circulaire unique, les conditions sont ou

$$\lambda = 0, \qquad \mu \neq 0, \qquad \nu \neq 0, \qquad 3\mu > 2\nu \quad \text{et} \quad \nu \text{ non multiple de } 3$$

ou

$$\lambda \neq 0, \qquad \mu \neq 0, \qquad \nu = 0, \qquad \lambda < 3\mu \quad \text{et} \quad \lambda \text{ non multiple de } 3.$$

Autrement dit, si a n'annule pas r, il faut et il suffit que a annule q un nombre de fois ν non divisible par 3, et p un nombre de fois μ tel que 3μ soit supérieur à 2ν; et si a annule r, les conditions sont que a annule r un nombre de fois λ non multiple de 3, et p un nombre de fois μ tel que 3μ soit supérieur à λ. Les trois feuillets de la surface de Riemann formeront alors un seul cycle dont le sommet sera un point de ramification du second ordre, et au point analytiqne $(a, 0)$ ou (a, ∞) répondra ce seul point sur la surface.

Dans le cas où deux branches seulement deviennent infinies pour $z = a$, on aperçoit immédiatement que, pour que le point a soit un pôle pour chacune d'elles, il faut et il suffit que a annule r un nombre pair de fois $\lambda = 2\rho$, et le pôle est alors d'ordre ρ.

Lorsque les trois branches deviennent infinies pour $z = a$, pour que ce point soit un pôle pour chacune, il faut et il suffit que λ égale 3μ, ou que, λ étant supérieur à 3μ, la différence $\lambda - \mu$ soit un nombre pair, ou enfin que λ, inférieur à 3μ, soit un multiple de 3.

8. J'ai considéré jusqu'à présent un point singulier a situé à distance finie. Supposons actuellement que le point ∞ soit singulier, et cherchons les expressions des branches u_1, u_2, u_3, envisagées dans son domaine.

Soient λ', μ', ν' les degrés respectifs des polynômes r, p, q, coefficients de l'équation (1). Si l'on change z en $\frac{1}{z'}$, cette équation devient

$$r' z'^{-\lambda'} u^3 + p' z'^{-\mu'} u + q' z'^{-\nu'} = 0, \tag{16}$$

r', p', q' étant des polynômes entiers en z', non nuls pour $z' = 0$, et u_1, u_2, u_3 deviennent des fonctions u'_1, u'_2, u'_3 de la variable z', qu'il est bien aisé d'exprimer dans le domaine du point $z' = 0$.

Appelons, en effet, α un nombre égal au plus grand des entiers λ', μ', ν', ou aux plus grands s'il y en a plusieurs. En multipliant par z'^{α}, l'équation (16) s'écrit

$$r' z'^{\alpha-\lambda'} u^3 + p' z'^{\alpha-\mu'} u + q' z'^{\alpha-\nu'} = 0, \tag{17}$$

où l'un au moins des exposants $\alpha - \lambda'$, $\alpha - \mu'$, $\alpha - \nu'$ est égal à zéro, les autres étant positifs. Or l'équation (17) est de la forme (1) et, relativement au point $z' = 0$ qui, par hypothèse, annule le discriminant, on a ici

$$\lambda = \alpha - \lambda', \qquad \mu = \alpha - \mu', \qquad \nu = \alpha - \nu'.$$

On déduit de là, *quel que soit* α,

$$\mu - \nu = -(\mu' - \nu'), \qquad \nu - \lambda = -(\nu' - \lambda'), \qquad \lambda - \mu = -(\lambda - \mu'),$$

et, par suite,

$$\lambda - 3\mu + 2\nu = -(\lambda' - 3\mu' + 2\nu');$$

d'ailleurs, dans le cas où $\lambda' - 3\mu' + 2\nu'$ est nul, si $6m'$ représente la valeur commune des deux nombres $3(\lambda' + \mu')$ et $2(2\lambda' + \nu')$, il vient

$$m - \lambda = -(m' - \lambda').$$

Les formules (13), (14), (15) donnent donc des expressions de u'_1, u'_2, u'_3 faciles à écrire.

En revenant maintenant à z, on a pour u_1, u_2, u_3, dans le domaine du point ∞,

$$\begin{aligned}
u_1 &= z^{\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\varphi(z) + z^{\mu'-\lambda'-\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\psi(z),\\
u_2 &= j\, z^{\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\varphi(z) + j^2 z^{\mu'-\lambda'-\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\psi(z),\\
u_3 &= j^2 z^{\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\varphi(z) + j\, z^{\mu'-\lambda'-\frac{\nu'-\lambda'}{3}}\psi(z),
\end{aligned}$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' > 0$;

$$\begin{aligned}
u_1 &= z^{\nu'-\mu'}\varphi(z) + z^{\frac{\mu'-\lambda'}{2}}\psi(z),\\
u_2 &= z^{\nu'-\mu'}\varphi(z) - z^{\frac{\mu'-\lambda'}{2}}\psi(z),\\
u_3 &= -2z^{\nu'-\mu'}\varphi(z),
\end{aligned}$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' < 0$;

$$\begin{aligned}
u_1 &= z^{m'-\lambda'}\varphi(z) + z^{m'-\lambda'-\frac{n'}{2}}\psi(z),\\
u_2 &= z^{m'-\lambda'}\varphi(z) - z^{m'-\lambda'-\frac{n'}{2}}\psi(z),\\
u_3 &= -2z^{m'-\lambda'}\varphi(z),
\end{aligned}$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' = 0$; $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant deux fonctions régulières au point ∞ et non nulles en ce point, et n' étant le nombre de fois que $z' = 0$ annule $4p'^3 + 27r'q'^2$, nombre qui peut être nul.

On déduirait facilement de là les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les degrés λ', μ', ν' des coefficients de l'équation (1), pour que le point ∞ soit de telle ou telle nature.