E. GOURSAT

Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 88-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__88_0>

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ANALOGUES A L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

Par M. E. Goursat.

1. On connaît depuis longtemps une classe d'équations différentielles du premier ordre, dont on obtient l'intégrale générale en remplaçant dans cette équation y' par une constante arbitraire; ce sont les équations de Clairaut ou, plus généralement, les équations de la forme

$$F(y', y - xy') = 0. \tag{1}$$

Dans plusieurs Communications, M. Raffy a appelé l'attention sur d'autres équations différentielles jouissant de la même propriété. Telle est l'équation

$$y = y' + \frac{e^x}{y'}, \tag{2}$$

dont l'intégrale générale est

$$y = C + \frac{e^x}{C}.$$

Je me propose de montrer comment on peut former des équations possédant la même propriété et dépendant d'autant de fonctions arbitraires qu'on le veut.

2. Considérons d'abord une équation différentielle

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

où le second membre est une fonction analytique régulière dans le domaine d'un point (x_0, y_0). On sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy, qu'il existe une infinité d'intégrales de cette équation, voisines du point (x_0, y_0), et représentées par une équation de la forme

$$\varphi(x, y) = \text{const.}, \tag{4}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction régulière dans le domaine de ce point. Pour que cette fonction $\varphi(x, y)$ soit identique à la fonction f, il faut que $f(x, y)$ vérifie l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par une relation arbitraire entre f et $y - xf$. Dans le cas où nous nous plaçons, il n'y a donc pas d'autre solution que l'équation de Clairaut.

Mais une équation différentielle du premier ordre ne se présente pas nécessairement sous la forme simple (3). Prenons, pour fixer les idées, une équation du second degré en y'

$$(5) \qquad y'^2 + P(x, y)y' + Q(x, y) = 0,$$

où $P(x,y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions analytiques régulières, tant que le point (x, y) reste compris dans une certaine région R. A tout point (x, y), l'équation (5) fait correspondre deux valeurs de y'

$$(6) \qquad y' = u(x, y), \qquad y' = v(x, y),$$

et nous supposerons la région R assez petite pour que chacune des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soit uniforme. Les courbes intégrales forment alors deux familles de courbes distinctes dans la région du plan considérée; par chaque point, il passe une courbe de chacune de ces deux familles et une seule.

Si, dans l'équation (5), on remplace y' par une constante arbitraire C, l'équation obtenue

$$(7) \qquad C^2 + P(x, y)C + Q(x, y) = 0$$

représente aussi deux familles de courbes distinctes

$$(8) \qquad u(x, y) = C, \qquad v(x, y) = C.$$

Admettons maintenant que l'équation (7) représente l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée (5). Cela peut arriver de deux façons; ou bien l'équation $u =$ const. représente l'intégrale générale de l'équation $y' = u(x, y)$, et $v =$ const. l'intégrale générale de l'équation $y' = v(x, y)$, et alors l'équation (5) est une équation de Clairaut; ou bien, l'équation $u =$ const. représente l'intégrale générale de l'équation $y' = v(x, y)$, et $v =$ const. l'intégrale générale de l'équation $y' = u(x, y)$. Les fonctions u et v vérifient alors les deux équations simultanées

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

C'est précisément ce qui a lieu pour l'équation (2) citée plus haut ; on peut l'écrire

$$y'^2 - yy' + e^x = 0,$$

et l'on en tire

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2};$$

on a donc ici

$$u = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2}, \qquad v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2}.$$

On vérifie sans peine que u et v satisfont au système (9).

3. La recherche des équations du premier ordre et du second degré de la forme (5), qui s'intègrent de cette façon, est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultanées (9). Si l'on élimine l'une des inconnues, v par exemple, on est conduit à l'équation suivante du second ordre, où p, q, r, s, t désignent, d'après les notations habituelles, les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction inconnue u

$$(10) \qquad qr + (qu - p)s - put = 0.$$

L'équation (10) est intégrable par la méthode de Monge; elle admet l'intégrale intermédiaire

$$(11) \qquad p + qu = \varphi(u),$$

où $\varphi(u)$ désigne une fonction arbitraire. On le vérifie immédiatement en observant que le premier membre de l'équation (10) est identique au déterminant fonctionnel

$$\frac{D(p + qu, u)}{D(x, y)}.$$

L'équation (11) est linéaire et son intégration se ramène à celle du système d'équations différentielles

$$(12) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{\varphi(u)};$$

comme $\varphi(u)$ est une fonction arbitraire de u, on peut poser

$$\frac{1}{\varphi(u)} = \psi''(u),$$

$\psi(u)$ étant aussi une fonction arbitraire. L'intégrale générale du système (12) est alors donnée par les formules

$$x - \psi'(u) = C,$$
$$y - u\psi'(u) + \psi(u) = C',$$

et, par suite, l'intégrale générale de l'équation (10) est fournie par une équation de la forme

$$(13) \qquad y - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)],$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires. Si l'on prend, par exemple, $\varphi(u) = u$, l'intégrale générale de l'équation $p + qu = u$ est

$$y - u - f(x - \log u) = 0;$$

avec la fonction $f(x) = e^x$, nous retombons sur l'équation (2)

$$y - y' - \frac{e^x}{y'} = 0.$$

4. En résumé, l'équation

$$(13) \qquad y - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)],$$

jointe à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

donne l'intégrale générale du système (9). On a donc le moyen de former toutes les équations de la forme (5), dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant y' par C. Mais ici se place une remarque essentielle. Une fois qu'on a choisi les deux fonctions arbitraires f et ψ, l'équation (13) nous donne pour u une fonction déterminée de x et de y; on a ensuite v par la formule

$$v = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

et l'intégrale générale de l'équation

$$(14) \qquad [y' - u(x, y)][y' - v(x, y)] = 0$$

est bien

$$[u(x,y)-C][v(x,y)-C]=0.$$

Mais, en général, les deux fonctions u et v sont analytiquement distinctes, de sorte que l'équation (14) se dédouble, en réalité, en deux équations distinctes du premier ordre. Il reste donc à examiner comment il faut prendre les deux fonctions f et ψ pour que u et v soient deux branches d'une même fonction analytique, comme cela a lieu pour l'équation (2).

Pour répondre à cette question, nous allons étudier les propriétés d'une équation du premier ordre

$$y' = u(x,y),$$

où la fonction u est définie par une relation de la forme (13). D'après ce qui a été établi, l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

C désignant la constante arbitraire. Or, on tire de l'équation (13)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\left(u - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\psi''(u)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\left(u - \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\psi''(u)};$$

l'intégrale générale est donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} - C = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x - \psi'(u) = \text{const.}$$

On voit donc que *l'intégrale générale de toute équation de la forme* (13)

$$y - y'\psi'(y') + \psi(y') = f[x - \psi'(y')]$$

s'obtient en éliminant u entre le système des deux équations

$$(15)\qquad \begin{cases} y - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)], \\ x - \psi'(u) = \text{const.} \end{cases}$$

La vérification directe est facile, car, si l'on regarde y et u comme deux fonctions de x définies par les équations (15), on en tire

$$y' - u\psi''(u)\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\left[1 - \psi''(u)\frac{du}{dx}\right],$$

$$1 - \psi''(u)\frac{du}{dx} = 0;$$

par suite $y' = u$, ce qui démontre la proposition.

Pour faire l'élimination de u, on peut imaginer que l'on tire u de la seconde des équations (15) et qu'on porte sa valeur dans la première, ce qui conduit à une équation de la forme

$$y = f(C) + \varphi(x - C);$$

quand on fait varier la constante d'intégration, on voit donc que toutes les courbes que l'on obtient se déduisent de l'une d'elles par des translations. Par suite, on a la définition géométrique suivante pour les familles de courbes qui satisfont à une équation différentielle du premier ordre de la forme (13). Soient c et γ deux courbes quelconques se coupant en un point A; imaginons que la courbe c se déplace d'un mouvement de translation de façon que le point A décrive la courbe γ. Les positions successives c', c'', ... de la courbe mobile forment une famille de courbes C qui satisfont à une équation différentielle de la forme (13), et inversement on obtient ainsi la famille la plus générale de courbes satisfaisant à une équation de cette forme.

A la famille de courbes C correspond une famille conjuguée Γ, formée par les positions successives occupées par la courbe γ, qui se déplacerait d'un mouvement de translation de façon que le point A décrive la courbe c. Soient $u(x, y)$ le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C qui passe par le point de coordonnées (x, y), et $v(x, y)$ le coefficient angulaire de la tangente à la courbe Γ, qui passe par le même point. L'équation différentielle des courbes C est

$$y' = u(x, y),$$

et celle des courbes Γ,

$$y' = v(x, y);$$

or, il est évident géométriquement que, tout le long d'une courbe C, le coefficient angulaire $v(x, y)$ de la tangente à la courbe Γ est constant, et de même, tout le long d'une courbe Γ, le coefficient angulaire $u(x, y)$ de la tangente à la courbe C est constant. Les équations

$$v(x, y) = \text{const.}, \qquad u(x, y) = \text{const.}$$

représentent donc respectivement les courbes C et les courbes Γ. Telle est l'interprétation géométrique des formules qui représentent l'intégrale générale du système (9).

On peut encore donner des courbes C et Γ une définition indépendante de toute considération cinématique. Prenons dans le plan deux courbes fixes c et γ; joignons un point m de la courbe c à un point m' de γ et soit M le milieu du segment mm'. Lorsque, le point m' restant fixe, le point m décrit la courbe c, le point M décrit une courbe homothétique à c avec $\frac{1}{2}$ pour rapport d'homothétie. Les diverses positions de cette courbe, lorsqu'on fait décrire la courbe γ au centre d'homothétie m', forment une famille de courbes C. On obtiendrait les courbes Γ en échangeant les rôles des deux courbes c et γ.

5. Si les deux courbes c et γ sont analytiquement distinctes, il en sera de même des courbes C et Γ; mais, si les deux courbes c et γ sont confondues, les courbes C et Γ ne seront plus analytiquement distinctes, et l'équation différentielle de ces courbes sera indécomposable. Pour obtenir des équations du premier ordre indécomposables qui s'intègrent comme l'équation de Clairaut, en remplaçant y' par une constante arbitraire, il suffira donc de prendre une courbe arbitraire C et de prendre les positions successives de cette courbe dans un mouvement de translation tel que l'un de ses points décrive la courbe dans sa position primitive. On peut encore remplacer cette construction par la suivante : on prendra les courbes homothétiques de la courbe c, avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$, par rapport à ses différents points pris pour centres d'homothétie. On remarquera que les courbes intégrales de l'équation différentielle ainsi obtenue sont toutes superpo-

sables, propriété qui rapproche encore cette équation de l'équation de Clairaut.

Par exemple, l'équation

$$y = C + \frac{e^x}{C}$$

peut s'écrire

$$y - y_0 = e^{x - x_0},$$

avec la condition $y_0 = e^{x_0}$. On voit que toutes ces courbes sont les positions successives de la courbe $y = e^x$ lorsque le point (x_0, y_0) décrit cette courbe elle-même.

6. Au lieu de prendre une équation du second degré en y', on pourrait, pour former des équations analogues à l'équation de Clairaut, considérer des équations d'un degré quelconque en y', et reprendre les raisonnements du n° 2. Par exemple, en prenant une équation du troisième degré, on est conduit au système suivant

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

tout à fait analogue au système (9). L'élimination de deux des fonctions inconnues u, v, w conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.