Bulletin de la S. M. F.

L. Lecornu

Sur le pendule de longueur brusquement variable

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 133-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__133_0>

SUR LE PENDULE DE LONGUEUR BRUSQUEMENT VARIABLE;

Par M. L. Lecornu.

Considérons un pendule simple, et imaginons qu'au moment du passage par la verticale le fil se trouve brusquement raccourci : que va devenir la vitesse? Si l'on applique le théorème des quantités de mouvement en projection horizontale, on est tenté de répondre que la vitesse linéaire n'est pas modifiée par le fait de la variation de longueur, car les deux forces agissantes, pesanteur et tension, sont toutes les deux verticales à cet instant. Dans ses *Leçons de Mécanique élémentaire,* Delaunay, pour faire la théorie de l'escarpolette, a supposé que les choses se passent effectivement ainsi. Cependant le théorème des moments des quantités de mouvement conduit à une tout autre conclusion : en vertu de ce théorème, comme le moment de la tension par rapport au point d'attache est constamment nul, et comme celui de la pesanteur s'annule aussi pour la position verticale du pendule, le moment de la quantité de mouvement, c'est-à-dire le produit de la vitesse linéaire par la longueur du pendule, doit demeurer invariable. En d'autres termes, la vitesse linéaire doit varier en raison inverse de la longueur.

Pour éclaircir cette difficulté, il faut envisager d'abord le cas d'un pendule qui se raccourcit dans un temps très court, mais fini, et faire ensuite tendre vers zéro cet intervalle de temps. Nous effectuerons d'ailleurs ce calcul sans avoir besoin de supposer que le raccourcissement coïncide avec le passage par la verticale. Soient, à un instant quelconque, l la longueur, θ l'angle d'inclinaison sur la verticale, ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, T la tension du fil.

Prenons la masse du pendule égale à l'unité.

On a

$$T = g\cos\theta + \omega^2 l - \frac{d^2 l}{dt^2}.$$

Si nous choisissons comme direction horizontale positive celle qui correspond aux valeurs croissantes de θ, le théorème des quantités de mouvement donne, pour chaque élément de temps dt,

$$d(l\omega \cos\theta) + \mathrm{T} \sin\theta\, dt = 0.$$

Remplaçant T par sa valeur, et tenant compte de l'identité

$$\frac{d^2 l}{dt^2} \sin\theta\, dt = d\left(\frac{dl}{dt} \sin\theta\right) - \omega \cos\theta\, dl,$$

il vient

$$\cos\theta [d(l\omega) + \omega\, dl] + g \cos\theta \sin\theta\, dt - d\left(\frac{dl}{dt} \sin\theta\right) = 0$$

ou bien, en intégrant de t_1 à t_2,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos\theta}{l} d(l^2\omega) + g \int_{t_1}^{t_2} \cos\theta \sin\theta\, dt - \left[\frac{dl}{dt} \sin\theta\right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Si l'instant t_1 précède immédiatement et si l'instant t_2 suit immédiatement la phase de raccourcissement, $\frac{dl}{dt}$ est nul pour ces deux instants, ce qui fait disparaître le dernier terme. D'autre part, quand l'intervalle $t_2 - t_1$ tend vers zéro, il en est de même de l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} \cos\theta \sin\theta\, dt$. Il faut donc que la première intégrale ait aussi une limite nulle. Or, en appelant A une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs acquises par $\frac{\cos\theta}{l}$ dans les limites d'intégration, on a, avec une notation évidente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos\theta}{l} d(l^2\omega) = \mathrm{A}[(l^2\omega)_2 - (l^2\omega)_1].$$

On conclut de là que, pour $t_2 - t_1 = 0$, c'est-à-dire pour un raccourcissement instantané, le produit $l^2\omega$ doit demeurer invariable : c'est précisément ce qu'indiquait *a priori* le théorème des moments. L'erreur commise par Delaunay consiste à négliger l'intégrale $\int \mathrm{T} \sin\theta\, dt$, sous prétexte que $\sin\theta$ tend vers zéro, et sans faire attention que T devient en même temps infini. Le théorème des moments ne nécessite pas, pour son application, une discussion semblable, parce que le moment de la tension T par rapport au point d'attache est toujours *rigoureusement* nul.

Il est intéressant de rechercher à quelles conséquences conduit ici le théorème des forces vives. Le travail élémentaire des forces appliquées (tension et pesanteur) est

$$-\mathrm{T}\,dl + gd(l\cos\theta)$$

ou bien

$$\frac{d^2 l}{dt^2}\,dl - \omega^2 l\,dl - gl\sin\theta\,d\theta.$$

Si le raccourcissement total $l_1 - l_2$ est produit dans un temps infiniment petit, le dernier terme donne une intégrale infiniment petite. Le premier terme, dont l'intégrale indéfinie est $\frac{1}{2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2$, donne un résultat nul, puisque $\frac{dl}{dt}$ est nul aux limites d'intégration. Il reste donc seulement

$$-\int_{l_1}^{l_2} \omega^2 l\,dl = \int_{l_2}^{l_1} \omega^2 l\,dl.$$

Mais $\omega l^2 = \omega_1 l_1^2 = \omega_2 l_2^2$. Le travail total est donc

$$\omega_1^2 l_1^4 \int_{l_2}^{l_1} \frac{dl}{l^3} = \frac{1}{2}\,\omega_1^2 l_1^4 \left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_1^2}\right),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}(\omega_2^2 l_2^2 - \omega_1^2 l_1^2).$$

On trouve ainsi, comme il fallait s'y attendre, que le travail est égal à l'accroissement de force vive.

Au lieu d'appliquer le théorème des forces vives dans le mouvement absolu du pendule, on pourrait considérer le mouvement relatif par rapport à la direction de la tige. Le travail de la pesanteur et de la tension, dans le mouvement brusque dont il s'agit, resterait le même que précédemment. Mais, au lieu de se traduire par un accroissement de force vive, il se trouverait annihilé par le travail négatif de la force d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire de la force centrifuge. Et, en effet, celle-ci a pour valeur absolue $\omega^2 l$, et pour travail élémentaire $\omega^2 l\,dl$.

J'ai cru devoir insister sur cette remarque presque évidente parce qu'elle montre nettement par quel mécanisme un système mobile à déformations intérieures, tel que l'assemblage d'une escarpolette et d'un gymnasiarque, peut développer de la force vive d'entraînement : le travail interne, considéré dans le mouvement relatif, est en partie employé à vaincre les forces d'inertie; dans le mouvement absolu, ces forces apparentes n'existent pas, et le travail qu'elles absorbaient se transforme en force vive : de telle façon que, pour évaluer l'accroissement de la force vive d'entraînement, il suffit de connaître le travail des forces apparentes dans le mouvement relatif. Ajoutons toutefois, pour être exact, qu'on doit également tenir compte de ce que le travail de la pesanteur n'est pas le même, en général, dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu, et cela à cause des changements de direction que cette force éprouve par rapport au système entraîné. Il est aisé, en s'appuyant sur ces principes, de retrouver, par une autre voie, les équations auxquelles je suis parvenu dans ma *Théorie de l'escarpolette* (Association française, 1894).