BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Théorème nouveau de réversibilité algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 136-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__136_1>

THÉORÈME NOUVEAU DE RÉVERSIBILITÉ ALGÉBRIQUE;

Par M. Désiré André.

1. Il a paru récemment, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* sous le n° 811 et avec la signature Buenger, une question intéressante de réversibilité algébrique. En voici l'énoncé textuel :

Si l'on pose

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

les formules

$$\frac{f(x, y, z)}{X} = \frac{f(y, z, x)}{Y} = \frac{f(z, x, y)}{Z}$$

donnent

$$\frac{f(X, Y, Z)}{x} = \frac{f(Y, Z, X)}{y} = \frac{f(Z, X, Y)}{z}.$$

Y a-t-il d'autres exemples analogues?

En cherchant de tels exemples, j'ai obtenu un théorème général qui en fournit une infinité : celui qu'on vient de lire n'est que le premier, c'est-à-dire le plus simple d'entre eux.

2. Considérons les deux suites, de n nombres chacune,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \ldots, x_n,$$
$$X_1, X_2, X_3, \ldots, \ldots, X_n.$$

Avec les nombres de la première, formons le rectangle, de n colonnes et de $n-1$ lignes,

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & \ldots\ldots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \ldots\ldots & x_1 & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_{n-2} & x_{n-1}; \end{array}$$

et, avec ceux de la seconde, le rectangle pareil

$$\begin{array}{cccccc} X_2 & X_3 & X_4 & \ldots\ldots & X_n & X_1 \\ X_3 & X_4 & X_5 & \ldots\ldots & X_1 & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & X_1 & X_2 & \ldots\ldots & X_{n-2} & X_{n-1}. \end{array}$$

Prenons les déterminants qui se déduisent du premier de ces rectangles par la suppression de la 1re, de la 2e, ..., de la $n^{\text{ième}}$ colonne, et, après les avoir affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$, désignons-les par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$; prenons enfin les déterminants qui se déduisent du second rectangle par le même procédé, et, après les avoir affectés aussi alternativement des signes $+$ et $-$, désignons-les par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Le théorème général qui fait l'objet de la présente Note peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Si l'on a*

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \ldots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

on a aussi

$$\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \ldots = \frac{\Delta_n}{x_n};$$

et réciproquement.

3. Ce théorème, pour $n = 3$, nous donne, aux notations près, l'exemple cité par M. Buenger. Il nous en donne évidemment une infinité d'autres, d'autant plus compliqués qu'ils correspondent à des valeurs plus grandes de n. C'est un théorème très général. C'est aussi, ce me semble, un théorème nouveau. J'en ai envoyé à l'*Intermédiaire,* comme réponse à la question 811, l'énoncé tel qu'on vient de le lire, mais sans le faire suivre de la démonstration. C'est cette démonstration que je vais exposer maintenant.

4. Supposons que l'on ait

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \ldots \frac{\delta_n}{X_n},$$

et considérons le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \ldots & x_1 & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est du $n^{\text{ième}}$ ordre et qui, par la suppression de sa première ligne, se réduit au premier des rectangles formés précédemment. Il est évident que nous avons

$$M = A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3 + \ldots + A_{n-1}\delta_{n-1} + A_n\delta_n.$$

Or, si l'on remplace, dans ce déterminant M, les éléments A de la première ligne par les éléments correspondants d'une quelconque des lignes suivantes, ce déterminant s'annule. De là ces $n - 1$ identités

$$\begin{gathered} x_2\delta_1 + x_3\delta_2 + x_4\delta_3 + \ldots + x_n\delta_{n-1} + x_1\delta_n = 0, \\ x_3\delta_1 + x_4\delta_2 + x_5\delta_3 + \ldots + x_1\delta_{n-1} + x_2\delta_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n\delta_1 + x_1\delta_2 + x_2\delta_3 + \ldots + x_{n-2}\delta_{n-1} + x_{n-1}\delta_n = 0. \end{gathered}$$

Ces identités étant homogènes par rapport aux quantités δ, nous pouvons y remplacer ces quantités δ par les quantités X qui leur correspondent et qui, d'après notre hypothèse, leur sont proportionnelles. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&x_2 X_1 + x_3 X_2 + x_4 X_3 + \ldots + x_n X_{n-1} + x_1 X_n = 0,\\
&x_3 X_1 + x_4 X_2 + x_5 X_3 + \ldots + x_1 X_{n-1} + x_2 X_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_n X_1 + x_1 X_2 + x_2 X_3 + \ldots + x_{n-2} X_{n-1} + x_{n-1} X_n = 0.
\end{aligned}$$

Mais ces nouvelles identités, grâce à la façon dont nous avons formé notre premier rectangle, constituent un système qui se transforme en lui-même lorsqu'on y remplace à la fois, sans toucher aux indices, les nombres x par les nombres X, et les nombres X par les nombres x. Par cette opération, en effet, la première de ces identités reproduit la dernière; la deuxième, l'avant-dernière; la troisième, l'anté-pénultième, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire ce système d'identités sous cette nouvelle forme :

$$\begin{aligned}
&X_2 x_1 + X_3 x_2 + X_4 x_3 + \ldots + X_n x_{n-1} + X_1 x_n = 0,\\
&X_3 x_1 + X_4 x_2 + X_5 x_3 + \ldots + X_1 x_{n-1} + X_2 x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&X_n x_1 + X_1 x_2 + X_2 x_3 + \ldots + X_{n-2} x_{n-1} + X_{n-1} x_n = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi écrites, ces identités peuvent être regardées comme formant un système de $n - 1$ équations linéaires et homogènes, relativement aux n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces n inconnues sont donc proportionnelles aux déterminants, affectés alternativement des signes $+$ et $-$, qu'on déduit du rectangle formé par leurs coefficients, en y supprimant la 1$^{\text{re}}$, la 2$^{\text{e}}$, ..., la $n^{\text{ième}}$ colonne. Or le rectangle de ces coefficients n'est autre chose que le second des rectangles écrits précédemment. Donc les déterminants dont nous parlons, pris avec les signes indiqués, ne sont autres choses que $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Donc finalement

$$\frac{x_1}{\Delta_1} = \frac{x_2}{\Delta_2} = \ldots = \frac{x_n}{\Delta_n},$$

ce qui démontre notre théorème.

Il est bien évident, d'ailleurs, que la réciproque n'a pas besoin d'être démontrée.