H. DUPORT

Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 138-141
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__138_0>

SUR LES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE;

Par M. H. Duport.

On sait que Helmholtz a proposé de prendre pour base de la Géométrie les propositions suivantes :

I. Si l'on désigne par *coordonnées d'un point,* dans un espace à n dimensions, un système de variables définissant sa position, il existe une fonction des coordonnées de deux points qui est telle qu'un système quelconque de points puisse être modifié de façon que cette fonction conserve la même valeur pour chaque groupe de deux points. Cette fonction porte le nom de *distance des deux points*. Cette modification du système qu'on appelle son *mouvement* doit pouvoir se faire de façon que tout point puisse se transporter d'une manière continue en tout autre point. Seulement, pour les différents points d'un seul et même système, il existe des restrictions à ces mouvements tenant aux équations qui existent entre les coordonnées des points pris deux à deux.

II. On doit pouvoir fixer $n - 1$ points du système et le système devra encore pouvoir se mouvoir. On donne à ces mouvements le nom de *rotations*.

III. La rotation d'un système suffisamment prolongée ramène le corps à sa position primitive. On donne à cette condition le nom de *monodromie*.

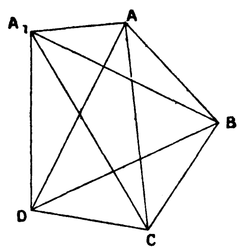
En partant de ces principes, Helmholtz a démontré que l'élément de la distance est la racine carrée d'une fonction homogène du second degré dans les différentielles des coordonnées, fonction dont les coefficients dépendent eux-mêmes des coordonnées.

Il retombait ainsi sur le point de départ adopté par Riemann dans sa Leçon d'habilitation. La question ainsi posée a fait le sujet de nombreux travaux parmi lesquels je citerai ceux de Riemann lui-même et ceux de MM. Sophus Lie et Poincaré.

Je me suis proposé de reprendre ce sujet en partant des principes mêmes d'Helmholtz. Je ferai voir que l'hypothèse II est suffisante pour que la question proposée puisse trouver dans l'Analyse sa solution complète. On peut ensuite fixer les hypothèses plus spéciales qui conduisent à la Géométrie réelle.

Dans un travail d'ensemble, il sera nécessaire de débuter par l'espace à trois dimensions; mais dans cette Note je me bornerai à exposer la méthode que j'ai suivie, dans le cas d'un espace à deux dimensions.

En prenant pour coordonnées d'un point les distances de ce point à deux points fixes, on voit qu'il doit exister une relation entre les distances de quatre points pris deux à deux. C'est cette relation que je me propose de chercher. Pour plus de clarté, je m'aiderai d'une figure. Soient quatre points A, B, C, D. Leurs



distances mutuelles seront désignées par les lettres suivantes

$$AB = x, \qquad AC = y, \qquad AD = z, \qquad BC = t, \qquad BD = u, \qquad CD = v.$$

Soit un cinquième point A_1. Posons encore

$$AA_1 = L, \qquad A_1B = x_1, \qquad A_1C = y_1, \qquad A_1D = z_1;$$

on devra avoir les relations suivantes

$$\begin{aligned} &v - F(x, y, z, t, u) = 0, && t - F_2(x, x_1, y, y_1, L) = 0, \\ &v - F_1(x_1, y_1, z_1, t, u) = 0, && u - F_3(x, x_1, z, z_1, L) = 0, \\ & && v - F_4(y, y_1, z, z_1, L) = 0. \end{aligned}$$

Écrivons que la figure BCD peut tourner autour du point A_1, le point A étant fixe; on aura

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx}dx + \frac{dF_2}{dy}dy = 0, \qquad \frac{dF_3}{dx}dx + \frac{dF_3}{dz}dz = 0, \qquad \frac{dF_4}{dy}dy + \frac{dF_4}{dz}dz = 0$$

On tire des trois dernières

$$\frac{\frac{dF_2}{dx}}{\frac{dF_2}{dy}} \frac{\frac{dF_3}{dz}}{\frac{dF_3}{dx}} \frac{\frac{dF_4}{dy}}{\frac{dF_4}{dz}} + 1 = 0,$$

ou bien

$$R(x, x_1, y, y_1, L) S(z, z_1, x, x_1, L) T(y, y_1, z, z_1, L) + 1 = 0.$$

On tire sans peine de cette relation, toutes les quantités qui y entrent étant indépendantes les unes des autres,

$$R = -\frac{B(y, y_1, L)}{A(x, x_1, L)}, \qquad S = -\frac{A(x, x_1, L)}{C(z, z_1, L)}, \qquad T = -\frac{C(z, z_1, L)}{B(y, y_1, L)}.$$

On aura donc les quatre équations

$$\frac{dF}{dx} A(x, x_1, L) + \frac{dF}{dy} B(y, y_1, L) + \frac{dF}{dz} C(z, z_1, L) = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dx} A(x, x_1, L) + \frac{dF_2}{dy} B(y, y_1, L) = 0,$$

$$\frac{dF_3}{dz} C(z, z_1, L) + \frac{dF_3}{dx} A(x, x_1, L) = 0,$$

$$\frac{dF_4}{dy} B(y, y_1, L) + \frac{dF_4}{dz} C(z, z_1, L) = 0.$$

La première équation peut s'écrire, en remplaçant y_1 et z_1 par leurs valeurs tirées de

$$t - F_2 = 0, \qquad u - F_3 = 0,$$

de la manière suivante :

$$\frac{dF}{dx} A(x, x_1, L) + \frac{dF}{dy} B_1(x, y, t, x_1, L) + \frac{dF}{dz} C_1(x, z, u, x_1, L) = 0.$$

On en tire que l'on doit avoir entre A, B, C une relation de la forme

$$A[H(x, z, u) + K(x, y, t)] + BM(x, y, t) + CN(x, z, u) = 0.$$

On aura alors

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{H(x, z, u) + K(x, y, t)} = \frac{\frac{dF}{dy}}{M(x, y, t)} = \frac{\frac{dF}{dz}}{N(x, z, u)}$$

Les conditions des systèmes complets donnent

$$\frac{\frac{dN}{dx}(x, z, u) - \frac{dH}{dz}(x, z, u)}{N(x, z, u)} = \frac{\frac{dM}{dx}(x, y, t) - \frac{dK}{dy}(x, y, t)}{M(x, y, t)} = R(x).$$

En remarquant que les fonctions H, K, M, N peuvent être multipliées par une fonction quelconque de x, on verra que l'on peut prendre $R(x)$ nulle. On aura donc

$$\frac{dH}{dz}(x, z, u) = \frac{dN}{dx}(x, z, u),$$
$$\frac{dK}{dy}(x, y, t) = \frac{dM}{dx}(x, y, t).$$

On en tire, en désignant par μ et ν deux fonctions nouvelles,

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{d\mu}{dx}(x, z, u) + \frac{d\nu}{dx}(x, y, t)} = \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{d\nu}{dy}(x, y, t)} = \frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{d\mu}{dz}(x, z, u)}.$$

Les fonctions F et $\mu + \nu$ ont leurs dérivées partielles par rapport à x, y, z proportionnelles, on aura donc

$$F = v = \Phi[u, t, \mu(x, z, u) + \nu(x, y, t)].$$

On peut donc mettre la relation cherchée sous la forme

$$(1) \qquad \lambda(u, v, t) + \mu(x, z, u) + \nu(x, y, t) = 0.$$

On aura de même les trois autres formes

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda_1(u, t, v) + \mu_1(z, x, u) + \nu_1(v, y, z) = 0, \\ \lambda_2(v, u, t) + \mu_2(y, z, v) + \nu_2(y, x, t) = 0, \\ \lambda_3(y, v, z) + \mu_3(x, u, z) + \nu_3(x, t, y) = 0. \end{cases}$$

On est donc ramené à l'étude du système des quatre équations (1). Dans une prochaine Note, j'exposerai la solution que j'en ai trouvée.