BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur un système de sept clefs

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 171-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__171_0>

SUR UN SYSTÈME DE SEPT CLEFS;

Par M. G. Fontené.

Les expressions symboliques à huit termes, un réel et sept symboliques, qui seront définies plus loin et que j'appelle des *octants*, ont en général une multiplication non associative; si, malgré ce grave défaut, je me décide à en donner l'idée, c'est que, dans ma pensée, sous une condition qui reste à trouver, les octants doivent être propres à représenter le mouvement hélicoïdal par lequel on peut amener une figure de l'espace d'une position à une autre. On verra tout au moins qu'ils conduisent à la formule de Brioschi pour la décomposition du produit de deux sommes de 8 carrés en somme de 8 carrés, et le fait qu'une formule analogue n'existe plus pour 2^n carrés, avec $n > 3$, montre que les octants sont le dernier terme du groupe « quantités complexes, quaternions, octants »; les p^2-nions de M. Cartan, comprenant les nonions de Sylvester, sont l'extension des quaternions dans une autre voie.

§ I.

1. Considérons trois *clefs* fondamentales, i, j, l et les sept termes symboliques du produit

$$(1+i)(1+j)(1+l)$$

effectué régulièrement, savoir

$$i,\ j,\ ij,\ l,\ il,\ jl,\ ijl;$$

nous obtenons sept clefs dérivées, que nous désignerons par les lettres

$$i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n,\ p,$$

en posant, par conséquent,

$$ij=k,\qquad il=m,\qquad jl=n,\qquad kl=p.$$

Nous conviendrons que le carré de chaque clef est égal à -1, et pour définir le produit de deux clefs distinctes, qui devra être une clef affectée du signe $+$ ou du signe $-$ selon l'ordre des deux facteurs, nous aurons recours au *système triple* formé par les sept symboles; nous devrons d'ailleurs nous conformer aux égalités ci-dessus, dont la première est empruntée au calcul des quaternions, et dont les trois dernières donnent les produits des symboles i, j, k par le symbole l.

2. On sait que sept objets A, B, C, ..., G donnent lieu à sept triades, deux objets pris à volonté faisant partie d'une triade et d'une seule, de manière à déterminer un troisième objet; en outre, le procédé suivant de formation, qui est connu, donne la notion de sens cyclique pour chaque triade; on suppose les lettres A, B, C, ..., G rangées sur un cycle, et, pour former une triade, on prend deux lettres consécutives, on passe la suivante, et l'on prend celle qui vient ensuite :

$$\downarrow \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \\ \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \mathrm{A} \\ \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array}\right|;$$

le sens direct pour la première triade, par exemple, est le sens ABD, ou BDA, ou DAB.

Avec les sept clefs ci-dessus, on peut former le système triple :

$$\text{(1)} \qquad \downarrow \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} m & i & j & l & k & n & -p \\ i & j & l & k & n & -p & m \\ l & k & n & -p & m & i & j \end{array}\right|;$$

la flèche indiquant le sens direct pour chaque triade; les quatre premières colonnes sont organisées en vue de retrouver les égalités du n° 1, et elles déterminent les trois dernières. Nous conviendrons que l'on a, par exemple, en tenant compte du sens cyclique dans la première triade,

$$mil = ilm = lmi = -1,$$
$$iml = lim = mli = +1,$$

et de même pour les autres triades. Eu égard aux conventions

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad \ldots, \qquad p^2 = -1,$$

on a alors, par exemple,

$$mi = l, \qquad il = m, \qquad lm = i,$$
$$im = -l, \qquad li = -m, \qquad ml = -i.$$

c'est-à-dire que, *dans chaque triade du tableau* (1), *le produit de deux clefs donne la clef restante avec le signe + ou le signe — selon que l'ordre des deux facteurs conduit à parcourir la triade dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.* Les quatre premières triades font bien retrouver les égalités du n° 1. On peut écrire, pour la pratique,

$$(2) \qquad -1 = ijk = \begin{cases} ilm, \\ jln, \\ klp, \end{cases} = \begin{cases} ipn, \\ jmp, \\ knm; \end{cases}$$

on retient facilement les quatre premières triades, et, pour les trois dernières, on peut observer qu'une permutation circulaire de i, j, k, et une autre relative à m, n, p, conduisent de la triade ipn aux deux autres.

On peut toujours supposer que i, j, k dans leur ensemble sont B, C, E, mais cela donne lieu à six arrangements; D est alors l, ou m, ou n, ou p, à volonté; les divers tableaux que l'on obtient, en se conformant aux égalités du n° 1, donnent tous le même résultat.

La multiplication n'est pas associative; on a, par exemple,

$$i.j.l = k.l = p, \qquad i \times (j.l) = i.n = -p.$$

3. Nous appellerons *octant* l'expression symbolique

$$q = a + b.i + c.j + d.k + e.l + f.m + g.n + h.p,$$

qui n'est pas un biquaternion, la clef nouvelle l n'étant pas commutative avec les clefs i, j, k; l'octant conjugué Kq s'obtiendra en changeant les signes dans la partie symbolique; le carré du module sera par définition Σa^2. On a un quaternion en supposant $e, f, g, h = 0$; on a une quantité complexe ordinaire en supposant de plus $c, d = 0$.

1° La multiplication étant distributive par définition, *le produit de deux octants conjugués est égal au carré du module;* on a, en effet,

$$(3) \qquad \begin{cases} q.\mathrm{K}q = a^2 - (bi + cj + \ldots + hp)^2 \\ \qquad\quad = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + h^2, \end{cases}$$

à cause de $ij = -ji$, etc.

2° *L'octant conjugué du produit de deux octants est égal au produit des conjugués de ces facteurs multipliés dans l'ordre inverse;* on a, en effet,

$$(a' - \Sigma b'i)(a - \Sigma bi) = aa' - a\Sigma b'i - a'\Sigma bi + \Sigma b'i.\Sigma bi;$$

la partie réelle est la même que dans

$$(a + \Sigma bi)(a' + \Sigma b'i),$$

et toute la partie symbolique est changée de signe à cause de $ij = -ji$, etc.; on a donc

$$\text{(4)} \qquad K(qq') = Kq' \times Kq.$$

3° D'une manière générale, si l'on prend (à cause du n° 4)

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} q &= a + b\,i + cj + \ldots + h\,p, \\ q' &= a' - b'i - c'j - \ldots - h'p, \end{aligned} \right.$$

on trouve

$$\text{(6)} \qquad qq' = A + Bi + Cj + \ldots + Hp,$$

en posant

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= aa' + bb' + cc' + dd' + ee' + ff' + gg' + hh' \\ B &= -ab' + ba' - cd' + dc' - ef' + fe' + gh' - hg, \\ C &= -ac' + bd' + ca' - db' - eg' - fh' + ge' + hf', \\ D &= -ad' - bc' + cb' + da' - eh' + fg' - gf' + he', \\ E &= -ae' + bf' + cg' + dh' + ea' - fb' - gc' - hd', \\ F &= -af' - be' + ch' - dg' + eb' + fa' + gd' - hc', \\ G &= -ag' - bh' - ce' + df' + ec' - fd' + ga' + hb', \\ H &= -ah' + bg' - cf' - de' + ed' + fc' - gb' + ha'. \end{aligned} \right.$$

On a disposé les lettres non accentuées dans l'ordre alphabétique. Si l'on forme alors le tableau des lettres accentuées, on observe que ce tableau peut être obtenu par le procédé de formation des mosaïques de M. Laisant; on écrit d'abord

$$(\alpha) \qquad \begin{array}{c|c} a' & b' \\ \hline b' & a'; \end{array}$$

on forme ensuite un tableau analogue en remplaçant a' par la table (α), et b' par un tableau qui se déduit de (α) en mettant c' et d' au lieu de a' et b' :

$$(\beta)\qquad \begin{array}{cc|cc} a' & b' & c' & d' \\ b' & a' & d' & c' \\ \hline c' & d' & a' & b' \\ d' & c' & b' & a' \end{array};$$

en opérant sur (β) comme on a opéré sur (α), on forme un tableau (γ) qui est celui des lettres accentuées dans les expressions des quantités A, B, ..., H.

4. En désignant par (ab') la quantité $(ab' - ba')$ on peut écrire

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \Sigma aa', \\ B &= -(ab') - (cd') - (ef') + (gh'), \\ C &= -(ac') + (bd') - (eg') - (fh'), \\ D &= -(ad') - (bc') - (eh') + (fg'), \\ E &= -(ae') + (bf') + (cg') + (dh'), \\ F &= -(af') - (be') + (ch') - (dg'), \\ G &= -(ag') - (bh') - (ce') + (df'), \\ H &= -(ah') + (bg') - (cf') - (de'). \end{aligned}\right.$$

5. *Le module du produit de deux octants est égal au produit de leurs modules.* On a, en effet,

$$(9)\qquad \Sigma a^2 \times \Sigma a'^2 = \Sigma A^2,$$

comme on le voit en développant ΣA^2 : on trouve d'abord le premier membre de la formule, et les doubles produits se détruisent, parce que les binômes auxquels donnent lieu les formules (7) se correspondent deux à deux comme il suit :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & -db' & \cdots & +ge' & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & -de' & \cdots & -gb' & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots . \end{array}$$

§ II.

6. Brioschi a donné la formule ci-dessus en 1856 dans le *Journal de Crelle;* sa méthode, dégagée des généralités, consiste en ceci : On considère un déterminant δ', dont les éléments sont précisément les quantités qui multiplient a, b, c, d, ... dans les expressions de A, B, C, D, ..., et la multiplication de ce déterminant par lui-même montre qu'il a pour valeur la quatrième puissance de $\Sigma a'^2$; or on trouve que le produit de deux déterminants analogues δ et δ' est un déterminant analogue Δ, construit avec A, B, C, D, ... On peut observer ceci : Le déterminant δ' contenant le facteur $a' + b'i + c'j + \ldots$, si, comme dans le cas des déterminants cycliques, on ajoute les lignes horizontales multipliées respectivement par 1, $-i$, $-j$, ..., on obtient une ligne dont le premier terme est le facteur en question, les sept autres termes étant les produits du premier par $-i$, $-j$, ...

7. Le théorème du module s'établit facilement pour des quaternions, la multiplication étant alors associative; on a

$$\begin{aligned} qq' \times \mathrm{K}(qq') &= qq' \times (\mathrm{K}q'.\mathrm{K}q) \\ &= q \times (q'.\mathrm{K}q') \times \mathrm{K}q \\ &= (q'.\mathrm{K}q') \times (q.\mathrm{K}q). \end{aligned}$$

Pour des octants, la première des égalités ci-dessus reste exacte, la troisième aussi, et par suite la seconde a lieu puisque le théorème du module se conserve; mais comme, en général, la multiplication des octants n'est pas associative, cette seconde égalité a lieu ici pour des raisons spéciales qu'il faudrait élucider.

8. La méthode que M. Hermite a donnée pour obtenir la formule d'Euler relative au produit de deux sommes de quatre carrés, méthode fondée sur l'emploi des quantités complexes, se trouve être applicable à la démonstration de la formule de Brioschi, en remplaçant les quantités complexes par des quaternions; mais la multiplication des quaternions n'étant pas commutative, la démonstration est valable pour des raisons cachées qu'il faudrait mettre en évidence. Partons de l'identité

$$(xz' - zx')(yt' - ty') = (xt' - tx')(yz' - zy') + (xy' - yx')(zt' - tz').$$

équivalente à la formule d'Euler pour quatre points en ligne droite, et admettons provisoirement que cette identité reste exacte avec des quaternions, *en ce qui concerne les parties réelles des deux membres;* si l'on fait

$$\begin{cases} x = a + bi + cj + dk, \\ z' = a - bi - cj - dk, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -(e - fi - gj - hk), \\ x' = \quad e + fi + gj + hk, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = a' + b'i + c'j + d'k, \\ t' = a' - b'i - c'j - d'k, \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -(e' - f'i - g'j - h'k), \\ y' = \quad e' + f'i + g'j + h'k, \end{cases}$$

de sorte que le premier membre de l'identité devienne $\Sigma a^2 \times \Sigma a'^2$, chaque somme portant sur huit carrés, il arrive ceci : le conjugué du produit de deux quaternions étant le produit des conjugués des facteurs pris dans l'ordre inverse, le conjugué de $xt' - tx'$ est $yz' - zy'$, et le conjugué de $xy' - yx'$ est $zt' - tz'$ en commençant par le second terme; de sorte que, au second membre de l'identité ci-dessus, chaque terme est le produit de deux facteurs conjugués, et est égal, par suite, à une somme de quatre carrés; on trouve d'ailleurs

$$\begin{aligned} xt' - tx' &= \quad \mathrm{A} + \mathrm{B}i + \mathrm{C}j + \mathrm{D}k, \\ xy' - yx' &= - \mathrm{E} - \mathrm{F}i - \mathrm{G}j - \mathrm{H}k, \end{aligned}$$

A, B, ... ayant le même sens que précédemment, et l'on obtient la formule de Brioschi. (Si l'on prend des octants, le résultat auquel on arrive est forcément inexact, le produit de deux sommes de seize carrés n'étant pas une somme de seize carrés; on peut consulter sur ce sujet un article de M. Arnoux, inséré aux *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences,* 1896, 2e Partie, p. 48.)

Relativement à la question de savoir si, dans l'expression

$$(ab')(cd') - (ac')(bd') + (ad')(bc'),$$

la partie réelle est toujours nulle avec des quaternions, voici un exemple. Par analogie avec le premier membre de l'identité d'Euler pour quatre points en ligne droite, identité que Bellavitis a étendue au quadrangle plan par l'emploi des vecteurs plans, considérons, pour un tétraèdre ABCD, l'expression

$$\mathrm{AB}.\mathrm{CD} - \mathrm{AC}.\mathrm{BD} + \mathrm{AD}.\mathrm{BC},$$

dont chaque terme est un produit de vecteurs; en prenant A comme origine, on a l'expression

$$(\mathrm{AB}.\mathrm{AD} - \mathrm{AD}.\mathrm{AB}) + \ldots + \ldots,$$

dont la partie réelle est nulle, comme l'on sait; donc, en prenant une origine quelconque O, et en désignant par a', b', c', d' les vecteurs OA, OB, OC, OD, on a l'expression

$$(b'-a')(d'-c') - (c'-a')(d'-b') + (d'-a')(c'-b')$$

dont la partie réelle est nulle; c'est l'expression ci-dessus dans laquelle on suppose $a = b = c = d = 1$, les quaternions a', b', c', d' étant toutefois réduits à des vecteurs. (Le fait géométrique signalé ici conduit à un théorème intéressant : *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1898, p. 340; quant à l'énoncé géométrique qui résulte de la formule de Bellavitis, il a son analogue dans l'espace, comme je me propose de le faire voir prochainement, et M. Laisant, à qui j'ai communiqué le théorème général, a réussi à le démontrer par la théorie des vecteurs.)

9. La méthode précédente ramène le problème à un problème sur les quaternions. Dans le même ordre d'idées on peut faire la remarque suivante, analogue à celle que l'on trouve dans les Œuvres posthumes de Gauss (*Œuvres complètes,* t. III, p. 384) à propos de la formule d'Euler pour le produit de deux sommes de quatre carrés. Si l'on écrit la formule de Brioschi sous la forme

$$(\Sigma a^2 + \Sigma e^2) \times (\Sigma a'^2 + \Sigma e'^2) = \Sigma \mathrm{A}^2 + \Sigma \mathrm{E}^2,$$

chaque somme s'étendant à quatre carrés, on peut regarder chacune des quatre premières sommes comme la norme, ou carré du module, d'un quaternion, et poser

$$\begin{aligned} l &= a + bi + cj + dk, & l' &= a' - b'i - c'j - d'k, \\ m &= e + fi + gj + hk, & m' &= e' - f'i - g'j - h'k, \end{aligned}$$

on constate alors que $\Sigma \mathrm{A}^2$ et $\Sigma \mathrm{E}^2$ sont les normes des deux expressions $ll' + m'm$ et $m.\mathrm{K}l' - \mathrm{K}m'.l$.

10. Si l'on effectue régulièrement le produit

$$(1 + \mathrm{M})(1 + \mathrm{N})(1 + \mathrm{P}),$$

et si, dans la formule (9), on remplace $a, b, c, \ldots, h$ par

$$x,\ y\sqrt{M},\ z\sqrt{N},\ t\sqrt{MN},\ u\sqrt{P},\ v\sqrt{MP},\ w\sqrt{NP},\ r\sqrt{MNP},$$

et $a', b', c', \ldots, h'$ par $x', y'\sqrt{M}, \ldots$, on trouve que le produit de deux expressions de la forme

$$x^2 + My^2 + Nz^2 + MNt^2 + Pu^2 + MPv^2 + NPw^2 + MNPr^2$$

est une expression de même forme

$$X^2 + M.Y^2 + N.Z^2 + MN.T^2 + P.U^2 + MP.V^2 + NP.W^2 + MNP.R^2,$$

$X, Y, Z, \ldots, R$ étant rationnels et entiers par rapport aux données. *C'est l'extension au cas de huit variables d'un fait bien connu pour le cas de quatre variables.*

§ III.

11. Cayley a remarqué que la solution du problème des substitutions orthogonales quaternaires, telle qu'Euler l'a donnée, résulte de la formule

$$\begin{aligned} &d(x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4) \\ &= (-\lambda' i - \mu' j - \nu' k + \rho')(y_1 i + y_2 j + y_3 k + y_4)(\lambda i + \mu j + \nu k + \rho), \end{aligned}$$

dans laquelle la séparation des facteurs extrêmes au second membre a pour but d'empêcher la réduction des huit paramètres (sept en réalité) à quatre paramètres L, M, N, R; la règle des modules donne en effet

$$d^2 \times \Sigma x^2 = \Sigma\lambda^2.\Sigma\lambda'^2 \times \Sigma y^2,$$

ou

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2,$$

en prenant

$$d^2 = \Sigma\lambda^2.\Sigma\lambda'^2.$$

Il est d'ailleurs probable qu'Euler, voulant satisfaire à des relations dont les quatre premières sont

$$C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + C_{i3}^2 + C_{i4}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

est parti de la formule, trouvée par lui, pour la décomposition du produit $\Sigma\lambda^2.\Sigma\lambda'^2$ en somme de quatre carrés, décomposition possible de plusieurs façons; il déclare, en effet, avoir en quelque sorte deviné la solution. Il faut seulement observer, avec Euler, que la condition d'avoir une substitution rationnelle exige que le produit $\Sigma\lambda^2.\Sigma\lambda'^2$ soit un carré, et le plus simple est de faire

$$\Sigma\lambda^2 = \Sigma\lambda'^2,$$

ce qui réduit le nombre des paramètres à six.

Cayley a montré comment la solution d'Euler, avec cette dernière condition, se ramène à la solution générale pour n variables.

Il est possible que, avec des octants, on pût donner une solution analogue pour huit variables; il faudrait, au second membre de la formule, introduire à la fin deux nouveaux facteurs avec λ'', ..., λ''', ..., pour avoir $7 \times 4 + 1$ paramètres, que la condition de rationnalité réduirait à 28, nombre nécessaire; la question est de savoir si, du fait que la multiplication des octants n'est pas associative, il arriverait que les 28 paramètres fussent distincts.