BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 200-205

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__200_1>

INTÉGRATION GRAPHIQUE DE CERTAINS TYPES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

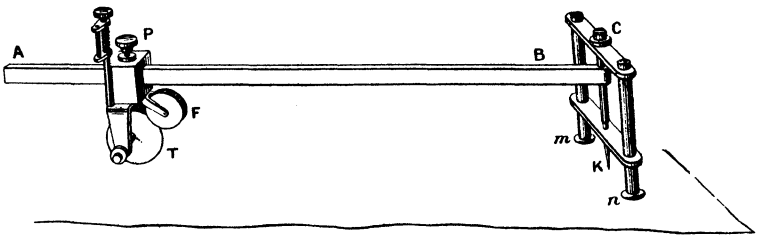
Par M. Michel Petrovitch.

Dans le *Dingler's polytechn. Journal* (1897; Bd. 305), M. Klerits a décrit un appareil d'une extrême simplicité, qu'il a appelé *tractoriographe,* parce qu'il peut servir à décrire d'un trait continu les tractoires d'une courbe plane donnée quelconque. L'appareil se prête, entre beaucoup de solutions graphiques, à une construction facile et exacte des nombres π et e, à la division d'un arc de circonférence en n parties égales, etc.

Je voudrais faire remarquer que, légèrement modifié, l'appareil de M. Klerits pourrait servir à l'intégration graphique, très simple et très commode, de certains types d'équations différentielles du premier ordre.

Concevons, en effet, un appareil construit de la manière suivante : sur une tige métallique AB (*fig.* 1) se déplace une roulette T verticale, pouvant être fixée à l'aide d'une vis P, à distance voulue de l'extrémité B de la tige. La roulette est maintenue par un étrier et s'appuie, par l'action de son poids, sur le papier

Fig. 1.



étendu horizontalement; on peut d'ailleurs la charger à volonté à l'aide d'un poids supplémentaire. L'angle que le plan de la roulette fait avec le plan vertical passant par la tige peut être constant ou varier suivant une loi donnée, dépendant de la construction de l'appareil([1]).

Le mouvement de la tige est guidé par deux manchons m et n, solidaires du stylet K, avec lequel on suit la courbe donnée, tout en pouvant prendre une direction quelconque, car la tige tourne librement autour de l'axe CK.

La roue F, surmontant la roulette T, est enduite d'une matière colorante (par exemple d'encre d'imprimerie) et la dépose sur la roulette T, qui dès lors laisse une trace sur le papier.

Lorsque le stylet K, guidé par les manchons m et n, qu'on tient à la main, se déplace sur une courbe donnée (Γ), la trace, laissée sur le papier par la roulette T, sera une certaine courbe (Γ'), enveloppe des droites d'intersection du plan horizontal avec le plan de la roulette.

Pour trouver l'équation de cette courbe (Γ'), correspondant à une courbe (Γ) donnée, soit

$$F(X, Y) = 0 \tag{1}$$

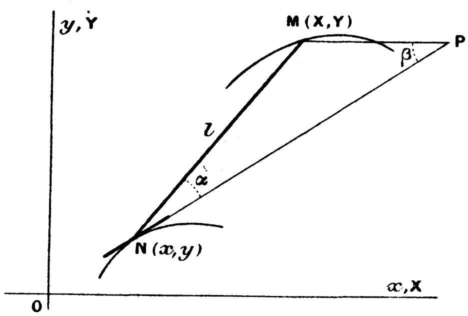
l'équation de la courbe sur laquelle on fait déplacer le stylet K;

([1]) Dans l'appareil de M. Klerits cet angle est constamment nul et la modification qu'il y aurait à faire, pour que ce qui suit soit applicable, consisterait à donner à cet angle une valeur différente de zéro, fixe ou variable suivant une loi donnée.

soient M(X, T) (*fig.* 2) un point arbitraire de cette courbe et N(x, y) le point correspondant de la courbe (Γ'), tracée par la roulette.

Désignons par α l'angle que fait la tige MN avec le plan de la

Fig. 2.



roulette; par β l'angle, constant ou variable, de ce plan avec l'axe des X; par l la longueur constante MN de la tige et par b la longueur MP comprise, sur la parallèle à l'axe des x, passant par M, entre la tige et la projection du plan de la roulette.

On aura, d'après la disposition de la figure :

$$(2) \qquad \begin{cases} X = x + l\cos(\alpha + \beta), \\ Y = y + l\sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Si l'on remarque qu'on a

$$(3) \qquad \sin\alpha = \frac{b}{l}\sin\beta,$$

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} = y',$$

les équations (2) peuvent s'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} [(X - x)(1 + y'^2) + by'^2]^2 + (b^2 - l^2)y'^2 - l^2 = 0, \\ [(Y - y)(1 + y'^2) - by']^2 + y'^2[(b^2 - l^2)y'^2 - l^2] = 0. \end{cases}$$

La longueur l est fixe : c'est la longueur choisie de la tige. La longueur b peut être fixe, ou variable avec une ou plusieurs des quantités x, y, y', X, Y.

Supposons d'abord qu'elle soit fixe. On aura alors l'équation différentielle de la courbe (Γ'), tracée par la roulette, en éliminant X et Y entre les équations (1) et (5). Cette équation est

$$(6)\quad \left| \begin{array}{l} F \left\{ x + \dfrac{\sqrt{l^2 + (l^2 - b^2)y'^2} - by'^2}{1 + y'^2}, \right. \\ \left. \quad y + \dfrac{y'[b + \sqrt{l^2 + (l^2 - b^2)y'^2}]}{1 + y'^2} \right\} = 0. \end{array} \right.$$

La constante d'intégration sera déterminée par cette condition que la position initiale du point N soit celle donnée à l'avance.

Dans le cas particulier où $b = 0$, l'appareil se réduit à celui de M. Klerits; l'équation différentielle (6) devient

$$(7)\qquad F\left(x + \frac{l}{\sqrt{1 + y'^2}}, \; y + \frac{ly'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0,$$

et définit les tractoires de la courbe $F(X, Y) = 0$, que l'on décrit ainsi d'une manière continue avec l'appareil en déplaçant le stylet K le long de la courbe $F = 0$.

Si $b = l$ l'équation différentielle (6) devient

$$(8)\qquad F\left(x + l\,\frac{1 - y'^2}{1 + y'^2}, \; y + \frac{2ly'}{1 + y'^2}\right) = 0.$$

On réaliserait ce cas à l'aide d'une articulation simple, ayant la forme d'un parallélogramme, dont les côtés auraient des longueurs fixes, la tige AB serait un des côtés, la projection du plan de la roulette serait la diagonale; enfin, les deux côtés, passant, l'un par M et l'autre par N, resteraient constamment parallèles à l'axe des x. Avec ce dispositif, si par exemple la courbe $F(X, Y) = 0$ se réduisait à une droite,

$$Y + mX + n = 0,$$

la roulette tracerait les intégrales de l'équation différentielle

$$(y + mx + p)y'^2 + 2ly' + (y + mx + q) = 0,$$

où

$$p = n - ml, \qquad q = n + ml.$$

Mais on peut faire varier la longueur b avec x, y, y', X, Y. Si la loi de cette variation est représentée par

$$\Phi(b, x, y, y', X, Y) = 0, \tag{9}$$

on aura l'équation différentielle du premier ordre, à laquelle satisfait la courbe tracée par la roulette, en éliminant b, X, Y entre les équations (1), (5) et (9).

Un cas particulièrement facile à réaliser est celui où b varie avec y' suivant la loi

$$b = \frac{\lambda\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

λ étant une constante positive quelconque. Il en sera ainsi, si l'on fixe l'étrier, qui maintient la roulette, de manière que le plan de celle-ci fasse avec la tige un angle invariable α.

On aurait alors

$$X = x + \frac{\mu - \lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad Y = y + \frac{\lambda - \mu y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

avec

$$\lambda = l\sin\alpha, \qquad \mu = l\cos\alpha$$

et, en déplaçant le stylet K le long d'une courbe $F(X, Y) = 0$, la courbe tracée par la roulette serait une intégrale de l'équation différentielle

$$F\left(x + \frac{\mu - \lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, y + \frac{\lambda - \mu y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Si par exemple la courbe $F = 0$ se réduisait à une droite

$$Y + mX + n = 0,$$

la roulette tracerait les intégrales de l'équation

$$[(y + mx + n)^2 - q^2]y'^2 + 2pqy' + [(y + mx + n)^2 - p^2] = 0,$$

où

$$p = \lambda + m\mu, \qquad q = \mu + m\lambda.$$

Supposons qu'on ait réalisé un appareil où b varie d'après une loi donnée

$$\Phi(b, x, y, y', X, Y) = 0. \tag{10}$$

Pour qu'une équation du premier ordre

$$f(x, y, y') = 0 \tag{11}$$

soit intégrable à l'aide d'un tel appareil, il suffit que, si

$$\Psi(X, Y, l, y') = 0 \tag{12}$$

est le résultat de l'élimination de x, y, b entre (10), (11) et (5), la dérivée partielle $\frac{\partial\Psi}{\partial y'}$ s'annule pour une valeur $l = \lambda$ indépendante de y', X, Y. Car, s'il en est ainsi, il suffira de donner à la tige la longueur λ pour que l'équation (12) se réduise à une équation

$$\chi(X, Y) = 0 \tag{13}$$

entre les seules variables X et Y. Alors le stylet K se déplaçant le long de la courbe (13), les courbes tracées par la roulette seront des intégrales de l'équation différentielle (11).