BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BEUDON

Sur les changements de variables

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 107-116

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__107_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES CHANGEMENTS DE VARIABLES ;

Par M. JULES BEUDON.

Ce Travail a pour objet l'étude des quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires ([1]). Cet algorithme s'est présenté depuis longtemps dans les résultats de l'intégration d'équations aux dérivées partielles; dans un très petit nombre de cas, on a effectué la quadrature au moyen d'un changement de variables convenablement choisi; mais on ne possède aucune méthode générale pouvant servir de guide dans les essais.

([1]) Le principe de la méthode employée dans cette étude a été donné dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (15 mai 1899).

Je traite deux cas généraux, à savoir

$$\int \varphi(x, y, y')\,dx, \qquad \int [\varphi(x, y, y')y'' + \psi(x, y, y')]\,dx,$$
$$y' = \frac{dx}{dy}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

où φ et ψ sont des fonctions données de leurs arguments, et y une fonction arbitraire de x. Je termine par un exemple simple auquel la méthode que je propose s'applique complètement.

I.

1. Rappelons d'abord quelques propositions classiques. A une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

correspond en général une équation de Monge,

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dz}, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \tag{2}$$

dont l'interprétation géométrique est la suivante : elle représente l'ensemble des enveloppes de caractéristiques sur les surfaces intégrales.

Si l'on connaît une intégrale complète $F(x, y, z, a, b) = 0$ de l'équation aux dérivées partielles (1), les courbes définies par l'équation (2) peuvent être représentées par les équations

$$F[x, y, z, \alpha, \psi(\alpha)] = 8, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\psi(\alpha) = 0, \qquad \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\psi(\alpha)\right] = 0$$

permettant de calculer x, y, z en fonction du paramètre α, et ψ étant une fonction arbitraire de α.

Réciproquement, pour intégrer une équation de Monge

$$\varphi_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \tag{3}$$

non linéaire, on posera

$$\frac{dz}{dx} = p + q\,\frac{dy}{dx};$$

en écrivant que

$$\varphi_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, p + q\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

a une racine double en $\frac{dy}{dx}$, on aura une équation aux dérivées partielles

(4) $$f_1(x, y, z, p, q) = 0.$$

La connaissance d'une intégrale complète de l'équation (4) permettra de résoudre l'équation (3), comme il a été dit précédemment.

2. Soit la quadrature

(5) $$\int \varphi(x, y, y')\, dx$$

Si la fonction φ est linéaire en y', soit $\varphi = A(x, y) + B(x, y) y'$, on résoudra l'équation de Pfaff,

$$A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy = dz$$

en utilisant la méthode bien connue.

Si la fonction φ n'est pas linéaire, on posera

(6) $$\varphi(x, y, y') = \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} y' + \frac{\partial\lambda}{\partial z} z'$$

où λ est une fonction quelconque de x, y, z. Si l'on peut déterminer λ de manière que l'équation de Monge (6) puisse être intégrée, la quadrature (5) sera effectuée.

II.

3. J'ai montré, dans ma Thèse de Doctorat [1], que les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre en involution ont les mêmes propriétés que les équations du premier ordre, relativement aux caractéristiques, et j'ai montré qu'ils pouvaient servir à l'intégration d'équations de Monge d'ordre supérieur.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, Supplément; 1896, page 33.

Il y a pourtant une différence essentielle entre le premier ordre et les suivants : à toute équation $f(x, y, z, y', z') = 0$ correspond en général une équation aux dérivées partielles du premier ordre, tandis qu'à une équation $f(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0$ ne correspond pas en général un système en involution, et cela même lorsque la relation f est linéaire en y'' et z''. M. Goursat s'est occupé de ces équations dans un Mémoire publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* [1]; je ferai usage de ses formules.

4. Tout système linéaire et du second ordre en involution peut être mis sous la forme

$$r + \lambda s + \mu = 0, \qquad s + \lambda t + \nu = 0, \tag{7}$$

λ, μ, ν étant des fonctions de x, y, z, p, q vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}(p + \lambda q) - (\mu + \lambda\nu)\frac{\partial\lambda}{\partial p} \\ &\qquad + \lambda\frac{\partial\mu}{\partial p} - \frac{\partial\mu}{\partial q} + \lambda^2\frac{\partial\nu}{\partial p} - \lambda\frac{\partial\nu}{\partial q} = 0, \\ &\lambda\left(\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial z}q - \frac{\partial\nu}{\partial x} - \frac{\partial\nu}{\partial z}p + \mu\frac{\partial\nu}{\partial p}\right) \\ &\qquad + \nu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}p - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial p} - \frac{\partial\mu}{\partial q}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

L'équation de Monge généralisée, attachée au système, s'obtient en éliminant p et q entre les équations

$$y' = \lambda, \qquad z' = p + qy', \qquad z'' = qy'' - \mu - \nu y'. \tag{9}$$

M. Goursat a montré (*loc. cit.*) que l'intégrale générale du système (7) est de la forme

$$\Phi[x, y, z, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)] = 0, \tag{10}$$

on aura l'intégrale de l'équation de Monge en écrivant

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = 0 \tag{11}$$

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, IIe Série, 3e Cahier; 1897.

5. Soit la quadrature

$$J = \int [M(x, y, y')y'' - N(x, y, y')]\,dx; \tag{12}$$

Posons

$$M(x, y, y')y'' - N(x, y, y' = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial\alpha}{\partial y'}y'' + z'', \tag{13}$$

α étant une fonction de x, y, y' et z une fonction de x.

Est-il possible de déterminer la fonction α de manière que l'équation de Monge (13) provienne d'un système en involution tel que (7)?

Pour la commodité des calculs, nous restreindrons la généralité du système (7), en supposant que λ, μ, ν ne dépendent que de x, y, q; les conditions d'intégrabilité deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{\partial\mu}{\partial q} - \lambda\frac{\partial\nu}{\partial q} = 0, \\ &\lambda\left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial q}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

On peut écrire autrement ces conditions, en prenant pour nouvelles variables x, y, y', le changement de variables étant défini par la relation

$$F(x, y, y') = q,$$

la fonction F étant la fonction implicite définie par

$$y' = \lambda(x, y, q);$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial q} = 1.$$

Les deux conditions d'intégrabilité prennent la forme nouvelle

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial y'} + y'\frac{\partial\nu}{\partial y'} = 0, \\ &y'\left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\nu}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial\mu}{\partial y'}\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\nu - y'\frac{\partial\nu}{\partial y'}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial y'} = 0 \end{aligned}\right. \tag{15}$$

et l'équation de Monge, du système (7), devient

$$z'' = y''F(x, y, y') - \mu - \nu y'. \tag{16}$$

On aura donc, pour déterminer les fonctions λ, μ, ν et α, les conditions

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(x,y,y') = M(x,y,y') - \frac{\partial\alpha}{\partial y'},\\ &\mu + \nu y' = N(x,y,y') + \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y', \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut joindre les équations (15).

D'abord

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial y'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial y'^2},$$

et la première des équations (15) s'écrit

$$(18)\qquad \frac{\partial M}{\partial x} + y'\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y'} - y'\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial\mu}{\partial y'} + y'\frac{\partial\nu}{\partial y'} = 0$$

et, en différentiant par rapport à y' la seconde équation (17), on obtient

$$\frac{\partial\mu}{\partial y'} + y'\frac{\partial\nu}{\partial y'} + \nu = \frac{\partial N}{\partial y'} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y'} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} + y'\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial y'};$$

d'où, en tenant compte de (18),

$$(19)\qquad \nu = \frac{\partial M}{\partial x} + y'\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y'} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

et, par suite, à cause de (17),

$$(20)\qquad \mu = N - y'\frac{\partial M}{\partial x} - y'\frac{\partial N}{\partial y} - y'^2\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Si nous portons ces valeurs dans la seconde condition d'intégrabilité (15), nous obtiendrons une équation aux dérivées partielles du second ordre, définissant la fonction $\alpha(x,y,y')$, et que je crois inutile d'écrire.

Soit

$$A\left(x,y,y', \frac{\partial\alpha}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2\alpha}{\partial y'^2}\right) = 0,$$

cette équation; si l'on en connaît une intégrale particulière $\alpha_1(x,y,y')$, on en déduira λ, μ et ν en fonction de x, y, y', et l'on reviendra à x, y, q, grâce à l'égalité

$$\lambda(x,y,q) = y'.$$

On sera donc ramené à l'étude du système en involution (7).

III.

Voici l'exemple annoncé dans l'Introduction. Soient les deux quadratures

$$X = \int \frac{du}{1 + uu_1}, \qquad Y = \int \frac{du_1}{1 + uu_1},$$

où u et u_1 sont des fonctions arbitraires d'une même variable. Prenons $u = x$ comme variable indépendante, et posons

$$\frac{1}{1 + xu_1} = y',$$

y' étant la dérivée d'une fonction arbitraire y de x. Nous aurons

$$u_1 = \frac{1}{xy_1} - \frac{1}{x}, \qquad u_1' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 y'} - \frac{y''}{xy'^2}$$

$$\frac{u_1'}{1 + uu_1} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y'}{x^2} - \frac{y''}{xy'}.$$

D'où

$$X = y, \qquad Y = \frac{1}{x} - \int \left(\frac{y''}{xy'} - \frac{y'}{x^2} \right) dx,$$

Si nous appliquons la méthode précédente, nous aurons

$$M = \frac{1}{xy'}, \qquad N = \frac{y'}{x^2}, \qquad F(x, y, y') = \frac{1}{xy'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'},$$

$$\nu = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 y'}, \qquad \mu = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{x^2}.$$

En portant dans la seconde condition d'intégrabilité (15) il vient

$$(21) \quad \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2y'}{x^3} \right) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y'^2} - \frac{1}{x^2 y'} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \, \partial y'} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \, \partial y'} - \frac{1}{x^4 y'} + \frac{1}{x^2 y'} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

On trouve aisément la solution particulière $\frac{y'}{x}$, qui permet de supprimer le terme ne contenant pas de dérivés, soit $\frac{-1}{x^4 y'}$; dans la nouvelle équation, on aperçoit aussi la solution $\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} y'$, où ρ est une fonction arbitraire de x et y. Supposons enfin que α ne dépende pas de y; il vient

$$2y'(1-y')x\frac{\partial^2\alpha}{\partial y'^2}-x^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,dy'}-1=0$$

ou, en posant $\frac{\partial\alpha}{\partial y'}=\beta$,

$$2y'(1-y')x\frac{\partial\beta}{\partial y'}-x^2\frac{\partial\beta}{\partial x}-1=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\beta=\frac{1}{x}+f\left(\frac{x^2y'}{y'-1}\right).$$

Nous obtenons donc facilement pour α la solution très étendue

$$\alpha=\frac{y'}{x}+\int f\left(\frac{x^2y'}{y'-1}\right)dy'+\frac{\partial\rho}{\partial x}+y'\frac{\partial\rho}{\partial y},$$

mais nous n'avons pas l'intégrale la plus générale. Choisissons la solution la plus simple, soit $\alpha=\frac{y'}{x}$; alors

$$\nu=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2y'},\qquad \mu=-\frac{y'}{x^2}+\frac{1}{x^2},\qquad q=\frac{1}{xy'}-\frac{1}{x},$$

et nous avons à étudier le système en involution

$$(22)\qquad \begin{cases} r+\dfrac{s}{qx+1}+\dfrac{q}{x(qx+1)}=0,\\[2mm] s+\dfrac{t}{qx+1}-\dfrac{q}{x}=0.\end{cases}$$

Appliquons à ce système la transformation d'Ampère, définie par les relations

$$x=x_1,\qquad y=-q_1,\qquad z=y_1q_1-z_1,\qquad p=-p_1,\qquad q=-y_1$$

et prolongée au moyen des identités

$$-r_1dx_1-s_1dy_1=r\,dx+s\,dy,\qquad dy=-s_1dx_1-t_1dy_1.$$

Alors

$$s=\frac{s_1}{t_1},\qquad r=-r_1+\frac{s_1^2}{t_1},\qquad t=\frac{1}{t_1},$$

et le système (22) devient

$$(23)\qquad \begin{cases} s_1 + t_1\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{1}{1 - x_1 y_1} = 0, \\ r_1 + s_1\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{y_1}{x_1(1 - x_1 y_1)} = 0. \end{cases}$$

Faisons encore le changement de variables

$$x_0 = \frac{y_1}{x_1}, \qquad y_0 = x_1 y_1, \qquad z_0 = z_1\,;$$

nous obtenons

$$(24)\qquad \begin{cases} t_0 + \dfrac{q_0}{2y_0} + \dfrac{1}{2y_0(y_0 - 1)} = 0, \\ s_0 - \dfrac{p_0}{2y_0} = 0. \end{cases}$$

La seconde équation du système (24) donne d'abord

$$p_0 = \varphi'(x_0)\sqrt{y_0},$$

où φ' est la dérivée d'une fonction arbitraire φ de x_0 ; donc

$$z_0 = \varphi(x_0)\sqrt{y_0} + \psi(y_0),$$

ψ étant une nouvelle fonction arbitraire.

Portons dans la première des équations (24), il vient

$$\frac{d^2\psi}{dy_0^2} + \frac{1}{2y_0}\frac{d\psi}{dy_0} + \frac{1}{2y_0(1 - y_0)} = 0.$$

On intègre facilement cette équation, dont la solution générale est

$$\psi = 2C\sqrt{y_0} + \sqrt{y_0}\log\frac{\sqrt{y_0} - 1}{\sqrt{y_0} + 1} - \log(y_0 - 1) + C_1,$$

d'où

$$z_0 = \varphi(x_0)\sqrt{y_0} + \sqrt{y_0}\log\frac{\sqrt{y_0} - 1}{\sqrt{y_0} + 1} - \log(y_0 - 1) + C_1.$$

En remontant la suite des calculs, on trouve

$$z_1 = \varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_1 y_1}\log\frac{\sqrt{x_1 y_1} - 1}{\sqrt{x_1 y_1} + 2} - \log(x_1 y_1 - 1) + C_1,$$

$$-y = q_1 = \frac{1}{x_1}\varphi'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\sqrt{x_1 y_1} + \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 y_1}}\varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 y_1}}\log\frac{\sqrt{x_1 y_1} - 1}{\sqrt{x_1 y_1} + 1},$$

et

$$z = q_1 y_1 - z_1 = \frac{y_1}{x_1}\sqrt{x_1 y_1}\,\varphi'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x_1 y_1}\log\frac{\sqrt{x_1 y_1}-1}{\sqrt{x_1 y_1}+1}$$
$$+\log(x_1 y_1 - 1) - \frac{1}{2}\sqrt{x_1 y_1}\,\varphi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

ce qui fournit l'intégrale générale du système (22).

Posons $\frac{y_1}{x_1} = \alpha$, α étant un paramètre; comme $x = x_1$, les caractéristiques du système (22) sont

$$-y = \sqrt{\alpha}\,\varphi'(\alpha) + 2\sqrt{\alpha}\,\varphi(\alpha) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log\frac{x\sqrt{\alpha}-1}{x\sqrt{\alpha}+1}$$
$$z = \alpha^{\frac{3}{2}} x\varphi'(\alpha) - \frac{x}{2}\sqrt{\alpha}\,\varphi(\alpha) - \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha}\log\frac{x\sqrt{\alpha}-1}{x\sqrt{\alpha}+1} + \log(\alpha x^2 - 1).$$

Posons enfin

$$\varphi(\alpha) = \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha}},$$

il vient

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} -y &= \psi'(\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\log\frac{x\sqrt{\alpha}-1}{x\sqrt{\alpha}+1}, \\ z &= x[\alpha\psi'(\alpha) - \psi(\alpha)] - \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha}\log\frac{x\sqrt{\alpha}-1}{x\sqrt{\alpha}+1} + \log(\alpha x^2 - 1). \end{aligned}\right.$$

On obtiendra la relation qui unit x et α en cherchant l'enveloppe des caractéristiques, c'est-à-dire en différentiant l'une ou l'autre des équations (25) par rapport à α. On obtient (comme on peut le vérifier) le même résultat dans les deux cas, à savoir

$$(26)\qquad 0 = \psi''(\alpha) - \frac{1}{4}\frac{x}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\log\frac{x\sqrt{\alpha}-1}{x\sqrt{\alpha}+1} + \frac{1}{2\alpha(\alpha x^2 - 1)};$$

et les deux quadratures sont

$$X = y, \qquad Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$