BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 180-183
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__180_0>

SUR LA TORSION D'UNE COURBE DÉFINIE PAR SON PLAN OSCULATEUR;

Par M. A. Demoulin.

I.

Soient $y_1, \ldots, y_n$, n fonctions d'une variable x. Désignons par $W(y_1, \ldots, y_n)$ leur wronskien, c'est-à-dire le déterminant

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Le signe W jouit d'une remarquable propriété qui se traduit par la formule

$$\text{(A)} \qquad W(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^n W(y_1, \ldots, y_n),$$

où l'on désigne par λ une fonction arbitraire de x. En particulier, si l'on fait $\lambda = \frac{1}{y_1}$, il viendra

$$\text{(A')} \qquad W(y_1, \ldots, y_n) = y_1^n W\left(D\frac{y_2}{y_1}, \ldots, D\frac{y_n}{y_1}\right).$$

Cette notation des wronskiens et la formule (A) permettent de présenter de la manière suivante une partie des résultats contenus dans le n° 376 des *Leçons* de M. Darboux (II^e Partie, p. 101 et suiv.) :

Soient $z_1, \ldots, z_n$ les mineurs du déterminant (1) par rapport aux éléments de la dernière ligne.

On a

$$\text{(B)} \qquad W(z_1, \ldots, z_n) = [W(y_1, \ldots, y_n)]^{n-1},$$

puis

$$\text{(C)} \qquad y_i = (-1)^{i-1}\lambda W(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

avec

$$\text{(D)} \qquad \lambda = \frac{1}{[W(y_1, \ldots, y_n)]^{n-2}}.$$

II.

Les formules qui précèdent trouvent une application immédiate dans la recherche de la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'une courbe, ce sont des fonctions d'un paramètre t. La torsion en un point quelconque M de cette courbe a pour expression

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W(x', y', z')}{\overline{W(x', y')}^2 + \overline{W(y', z')}^2 + \overline{W(z', x')}^2},$$

les accents désignant des dérivées par rapport à t.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes du point M. Si on les introduit dans l'expression de $\frac{1}{\tau}$, il viendra, en faisant usage de la formule (A'),

$$\frac{1}{\tau} = \frac{x_4^2 W(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\overline{W(x_1, x_2, x_4)}^2 + \overline{W(x_2, x_3, x_4)}^2 + \overline{W(x_3, x_1, x_4)}^2}.$$

Soit maintenant

$$(\omega) \qquad y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 = 0$$

l'équation du plan osculateur en M; y_1, y_2, y_3, y_4 sont des fonctions connues de t. Les coordonnées du point M vérifient l'équation (ω) et les deux suivantes

$$(\omega') \qquad y'_1 x_1 + y'_2 x_2 + y'_3 x_3 + y'_4 x_4 = 0,$$
$$(\omega'') \qquad y''_1 x_1 + y''_2 x_2 + y''_3 x_3 + y''_4 x_4 = 0.$$

Ces trois équations montrent que x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles aux mineurs du wronskien de y_1, y_2, y_3, y_4 par rapport aux éléments de la dernière ligne. Si on les prend égales à ces mineurs, c'est-à-dire (d'après les notations adoptées au paragraphe I) à z_1, z_2, z_3, z_4, on pourra écrire

$$\frac{1}{\tau} = \frac{z_4^2 W(z_1, z_2, z_3, z_4)}{\overline{W(z_1, z_2, z_4)}^2 + \overline{W(z_2, z_3, z_4)}^2 + \overline{W(z_3, z_1, z_4)}^2}.$$

Les formules (B), (C), (D) deviennent ici

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = [W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^3,$$

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= \lambda W(z_2, z_3, z_4), \\ y_2 &= -\lambda W(z_1, z_3, z_4), \\ y_3 &= \lambda W(z_1, z_2, z_4), \\ y_4 &= -\lambda W(z_1, z_2, z_3), \end{aligned}\right.$$

$$\lambda = \frac{1}{[W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^2}.$$

D'ailleurs

$$z_4 = -W(y_1, y_2, y_3).$$

En tenant compte de ces différentes relations, on obtient l'expression définitive de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(y_1, y_2, y_3)}^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\,W(y_1, y_2, y_3, y_4)}.$$

Cette formule conduit à une relation très simple entre les torsions de deux courbes qui se correspondent dans une corrélation quelconque. (Voir *Comptes rendus,* séance du 29 janvier 1898.) Nous réservons pour une autre occasion la démonstration des propriétés énoncées dans cette Note; nous nous contenterons ici d'établir une relation entre les torsions de deux courbes polaires réciproques par rapport à une sphère. Soient Γ et Γ' les deux courbes en question et O le centre de la sphère directrice. Appelons τ et τ' les rayons de torsion de Γ et Γ' en deux points correspondants M et M'. Si l'on écrit l'équation du plan osculateur de Γ en M sous la forme

$$ux + vy + wz = 1,$$

les coordonnées cartésiennes du point M' seront (u', v', w'), pourvu qu'on prenne pour unité de longueur le rayon de la sphère directrice.

Si l'on fait dans la formule ci-dessus $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = w$, $y_4 = -1$, on obtiendra l'expression de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(u, v, w)}^2}{(u^2 + v^2 + w^2)\,W(u', v', w')}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{\mathrm{W}(u', v', w')}{\overline{\mathrm{W}(u', v')}^2 + \overline{\mathrm{W}(v', w')}^2 + \overline{\mathrm{W}(w', u')}^2},$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{1}{\tau\tau'} = \frac{\overline{\mathrm{W}(u, v, w)}^2}{\overline{\mathrm{W}(u', v)}^2 + \overline{\mathrm{W}(v', w')}^2 + \overline{\mathrm{W}(w', u')}^2} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Soit P′ la projection orthogonale du point O sur le plan osculateur de Γ′ en M′. On a

$$\overline{\mathrm{OP}'}^2 = \frac{\overline{\mathrm{W}(u, v, w)}^2}{\overline{\mathrm{W}(u', v')}^2 + \overline{\mathrm{W}(v', w')}^2 + \overline{\mathrm{W}(w', u')}^2},$$

$$\overline{\mathrm{OM}'}^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Par suite

$$\tau\tau' = \frac{\overline{\mathrm{OM}'}^2}{\overline{\mathrm{OP}'}^2}.$$

Or, si l'on désigne par φ l'angle des plans osculateurs en M et M′,

$$\frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OM}'} = \cos\varphi$$

et il vient finalement

$$\tau\tau' \cos^2\varphi = 1,$$

ou, en appelant a le rayon de la sphère directrice,

$$\tau\tau' \cos^2\varphi = a^2.$$

Cette relation, jointe au théorème d'Enneper concernant la torsion des asymptotiques, conduit immédiatement à la relation

$$\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_1 \mathrm{R}'_2 \cos^4\varphi = a^4$$

qui lie les rayons de courbure principaux de deux surfaces polaires réciproques par rapport à une sphère. Nous avons fait connaître ces deux formules dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (séance du 16 mai 1892). M. Rouquet les a retrouvées récemment (*Bulletin de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse,* tome I, année 1898).