BULLETIN DE LA S. M. F.

L. TORRÈS

Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 167-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__167_1>

SUR L'UTILITÉ DES EXEMPLES CINÉMATIQUES DANS L'EXPOSITION DES THÉORIES MATHÉMATIQUES;

Par M. L. Torrès.

I. Les mathématiciens emploient volontiers des exemples géométriques pour illustrer leurs explications ; ils trouveraient souvent, je pense, plus d'avantage à employer des exemples cinématiques qui seraient généralement plus exacts et plus suggestifs. Dans une figure géométrique, tout est constant; ce n'est que par des artifices plus ou moins ingénieux qu'on peut y considérer des quantités variables dépendantes les unes des autres ; la figure ne sera jamais qu'une image symbolique des relations qu'elle représente. Dans une machine, ces relations seront construites, elles existeront réellement, nous les verrons agir et nous aurons ainsi une représentation matérielle des faits ou des lois que nous voudrons mettre en évidence.

Il n'y aurait là, à vrai dire, aucune nouveauté, puisqu'on prend souvent comme exemple des figures dont la forme peut varier d'après certaines lois, c'est-à-dire des systèmes mécaniques idéaux, mais je pense qu'on devrait recourir d'une manière plus systématique à des exemples de ce genre et même, quand il serait possible, construire des appareils de démonstration. On y arriverait parfois très facilement; ainsi l'appareil que j'ai l'honneur de vous présenter n'est qu'un système articulé très simple qui sert à construire une fonction à deux déterminations avec deux points critiques [1].

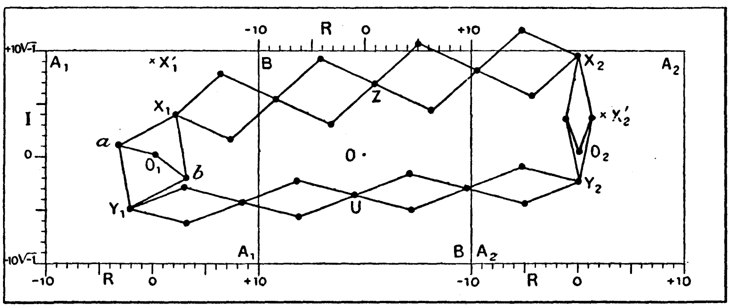
II. Sur la plaque qui porte le système articulé sont dessinés les trois tableaux carrés A_1, A_2, B (*fig.* 1).

---

[1] Cet appareil a déjà été présenté par moi à l'Athénée de Madrid. *Ateneo de Madrid*, curso de 1900 à 1901. — Sesion inaugural de la Seccion de Ciencias exactas, fisicas y naturales, celebrada el 19 de Noviembre de 1900; Madrid, 1900.

Les six points X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z, U représentent autant de variables que nous désignerons respectivement par les lettres x_1, y_1, x_2, y_2, z, u. Chacun de ces points reste toujours sur le même tableau et, pour qu'on puisse lire les valeurs des variables ainsi représentées, on a tracé l'échelle des imaginaires pures, I,

Fig. 1.



et les trois échelles des quantités réelles, R; ainsi dans la position représentée par la figure nous aurons:

$$X_1 = 2 + 4\sqrt{-1}\,;\ U = -1{,}4 - 3{,}6\sqrt{-1}\ \ldots.$$

Le point O_1 est fixe au centre du tableau A_1, donc à chaque position du point X_1 correspond une autre position du point Y_1, parfaitement déterminée par l'action des tiges $X_1 a$, $X_1 b$, $Y_1 a$, $Y_1 b$, $O_1 a$, $O_1 b$; nous pourrons donc écrire $y_1 = F(x_1)$. Il s'agit ici d'une fonction qui n'est pas monogène, mais ça ne fait rien pour notre but. On répète dans le Tableau A_2 les constructions que je viens d'indiquer pour le Tableau A_1; les points X_2 et Y_2 sont liés par les mêmes connexions mécaniques que les points X_1, Y_1; nous pourrons donc écrire $y_2 = F(x_2)$. En outre, par l'effet des deux systèmes de losanges articulés qu'on voit sur la figure, le point Z sera toujours au centre de la droite $X_1 X_2$, et le point U, au centre de la ligne $Y_1 Y_2$.

La position de ce système dépend de la position de deux de ses points que nous pouvons choisir et faire marcher arbitrairement; les valeurs simultanées de toutes les variables considérées se déterminent mécaniquement en fonction de deux quelconques d'entre elles. Nous pourrons donc écrire $z = \varphi(x_1, x_2)$, $u = \psi(x_1, x_2)$, ou bien, si nous voulons prendre z et u comme variables indépendantes, $x_1 = f_1(z, u)$; $x_2 = f_2(z, u)$. Il n'y a pas moyen de formuler concrètement ces fonctions, parce qu'elles ne sont pas monogènes et ne peuvent pas être représentées par les symboles usuels ([1]), mais on peut déduire directement, de la considération des liaisons mécaniques, quelques-unes de leurs propriétés que nous avons intérêt à considérer.

Si l'on permute les valeurs x_1, x_2, en transportant le point X_1 à X'_1 ($O_1X'_1 = O_2X_1$), et le point X_2 à X'_2 ($O_2X'_2 = O_1X_1$), le point Z devra se trouver après le mouvement dans le centre de la ligne $X_1X'_2$; mais les deux droites X_1X_2, $X'_1X'_2$ sont les diagonales du parallélogramme $X_1X'_1X_2X'_2$ et se coupent réciproquement en deux parties égales; donc le point Z ne change pas de place. z est donc une fonction symétrique de x_1 et x_2 et nous en dirons autant de u; car quand on permute les deux points X_1, X_2, on permute aussi les points Y_1, Y_2 et cette permutation n'altère pas la valeur u.

En donnant des valeurs particulières aux variables z, u, c'est-à-dire en amenant chacun des points Z, U à la position voulue pour qu'il représente la valeur particulière de la variable correspondante, nous déterminerons une certaine position du système; mais on aurait pu en avoir déterminé une autre, celle qu'on obtiendrait en permutant les valeurs x_1, x_2. Chacune des variables x_1, x_2 peut donc prendre à un moment donné l'une quelconque des deux valeurs représentées simultanément par les points X_1, X_2 et cela quelles que soient les valeurs particulières de z et u; donc en réalité les deux fonctions $f_1(z, u)$, $f_2(z, u)$ sont une même fonction, et nous pouvons dire que nous avons construit dans notre appareil les deux déterminations d'une fonction de deux variables à deux déterminations, $x = f(z, u)$. En rendant fixe le point U, de manière à rendre la valeur u constante (et cela a été fait dans mon appareil) nous aurons une fonction d'une seule variable à deux déterminations $x = \pi(z)$.

---

(1) Il faut excepter la valeur z exprimée par l'équation

$$z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Considérons maintenant une position de la machine ainsi constituée telle qu'on ait $x_1 = x_2$ et faisons passer le point X_1 à une position infiniment rapprochée; le point X_2 se déplacera en même temps d'une quantité infiniment petite, et il est très facile de faire voir que, u étant une fonction symétrique de x_1, x_2, et ces deux variables étant égales dans la position considérée, le déplacement de X_2 est égal en grandeur et opposé en direction au déplacement de X_1, c'est-à-dire qu'on aura $dx_2 = -dx_1$. Réciproquement, z étant encore une fonction symétrique de x_1, x_2, on déduit des deux conditions $x_1 = x_2$, $dx_2 = -dx_1$, que cette fonction reste constante. Le point Z reste absolument immobile; il y a donc, dans cette position de l'appareil, un rapport infini de vitesses, c'est-à-dire un point mort; si nous faisons marcher l'appareil en agissant sur le point Z et que nous voulions faire passer celui-ci par la position correspondante au point mort, le mouvement deviendra impossible, et cette impossibilité nous avertira de l'existence d'un point critique dans la fonction construite.

Dans l'appareil ici présent il y a deux points critiques, et l'on peut observer la permutation des deux déterminations chaque fois que le point Z parcourt un contour fermé qui contient un seul de ces deux points.

III. Les fonctions périodiques sont très faciles à représenter cinématiquement. Ellesapparaissent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes dès qu'on transforme un mouvement circulaire en mouvement continu. On peut en profiter pour construire des fonctions présentant des points critiques logarithmiques ou des fonctions doublement périodiques.

La *fig.* 2 représente un appareil composé :

D'une roue dentée qui tourne autour du point fixe o et entraîne une tige on;

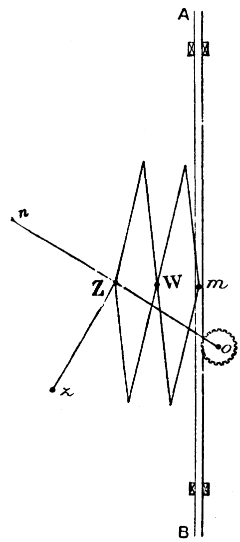
D'une tige AB, portant une crémaillère qui engrène avec la roue dentée, guidée par des glissières de façon à ne lui permettre qu'un mouvement de translation dans le sens de sa longueur;

Et, finalement, d'un double losange qui relie le point Z, assujetti à glisser sur la tige on, au point m, qui est invariablement fixé sur la tige AB.

Si nous faisons marcher le point Z, nous entraînerons la roue dentée, la crémaillère, le point m et le point W. Nous pouvons donc écrire $w = f(z)$.

Supposons que nous faisions marcher le point Z et qu'après lui avoir fait décrire un contour fermé nous le ramenions à la même position ; si le contour ne contient pas le point o, la roue dentée est revenue à sa position sans faire aucun tour et, par suite, les points m et W reviennent à leur position primitive, tandis que,

Fig. 2.



si le point Z a fait un tour autour du point o, la roue dentée aura tourné pendant tout le mouvement d'une circonférence entière, et le point W se trouvera déplacé dans le sens AB d'une distance égale à πr (r étant le rayon de la roue dentée).

o est donc un point logarithmique de la fonction w.

Quand on fera parcourir au point Z un chemin déterminé, à partir d'une position connue de l'appareil, la position finale sera parfaitement déterminée, à moins pourtant que le chemin ne passe pas par le point o ; parce que, si ce cas venait à se présenter, au moment où le point Z est en coïncidence avec le point o, la position de l'appareil devient indéterminée, la roue peut tourner autant qu'on voudra et il est impossible de savoir quelle sera la position finale de l'appareil.

Il est du reste facile de voir que le mouvement serait, dans ce cas, impossible, car, quand le point Z coïncide avec le point o, la machine passe par un point mort qui représente, comme toujours, un point critique de la fonction construite.

Je pourrais multiplier les exemples, mais je ne le crois pas nécessaire; j'ai assez dit pour qu'on puisse juger si les exemples cinématiques pourraient réellement être, comme je pense, de quelque utilité dans l'enseignement.