BULLETIN DE LA S. M. F.

A. G. GREENHILL

Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 172-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__172_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPAREIL STÉRÉOSCOPIQUE POUR METTRE EN RELIEF LES FIGURES GÉOMÉTRIQUES SE RAPPORTANT AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. A.-G. Greenhill.

Cet appareil a figuré au Palais de l'Optique à l'Exposition Universelle; je voudrais le présenter aux Membres de la Société mathématique de France, parce que j'ai réduit de moitié le degré des équations que j'ai données autrefois, et qui se rapportent aux figures.

Ainsi, en employant la projection stéréographique, l'équation de la chaînette sphérique algébrique I, qui dépend d'un paramètre elliptique qui est le cinquième d'une période, peut s'écrire

$$0 = \frac{2}{5}\arc\sin\frac{(\sqrt{51}-7)t^3-(3\sqrt{51}-19)t^2-(3\sqrt{51}+19)t+\sqrt{51}+7}{192\sqrt{3}}\sqrt{\mathrm{T}_1}$$

$$= \frac{2}{5}\arc\sin\frac{(\sqrt{51}-7)t^3+(3\sqrt{51}-19)t^2-(3\sqrt{51}+19)t-\sqrt{51}-7}{192\sqrt{3}}\sqrt{\mathrm{T}_2},$$

où

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_1 = {}& \frac{1}{2}[(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2+2(2\sqrt{5}+\sqrt{17})t+(\sqrt{5}+\sqrt{3})]\\ &\times [(\sqrt{5}+\sqrt{3})t^2+2(2\sqrt{5}-\sqrt{17})t+(\sqrt{5}-\sqrt{3})],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_2 = {}& -\frac{1}{2}[(\sqrt{5}-\sqrt{3})t^2-2(2\sqrt{5}+\sqrt{17})t+(\sqrt{5}+\sqrt{3})]\\ &\times [(\sqrt{5}+\sqrt{3})t^2-2(2\sqrt{5}-\sqrt{17})t+(\sqrt{5}-\sqrt{3})],\end{aligned}$$

réunissant θ la longitude et t la tangente de la moitié de la distance polaire inférieure.

La même avec la chaînette II, qui dépend d'un paramètre qui est le septième d'une période; et pour les autres figures, lignes géodésiques, courbes de la toupie, chaînettes, etc., dont on trouve les équations écrites au dos des figures.

Ces équations ont été construites avec des intégrales pseudo-elliptiques, inventées par Abel et développées par Moutard, Halphen, Tchebichef, Günther, Goursat, Raffy, Dolbnia et autres.

Mais le degré des résultats donnés par la méthode d'Abel est quatre fois, et même huit fois plus grand qu'il est nécessaire.

C'est ainsi que j'ai trouvé que, pour le vingt-deuxième ordre, l'intégrale pseudo-elliptique peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 1 + R}{\sqrt{(X_1 X_2)}}\,dx &= \frac{1}{11}\arcsin \frac{x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4}{C}\sqrt{X_1} \\ &= \frac{1}{11}\arccos \frac{x^4 - A_1 x^3 + A_2 x^2 - A_3 x + A_4}{C}\sqrt{X_2}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X_1 &= (x + 1)(x^2 + Px + Q), \\ X_2 &= (-x + 1)(x^2 - Px + Q). \end{aligned}$$

En posant

$$P = \frac{1}{t}, \qquad Q = \frac{1}{4}(P^2 - 1)(1 + n),$$

on trouve que la relation qui subsiste entre t et n est donnée par l'équation (408) dans les *Proceedings London Math. Society*, t. XXVII, p. 464.

C'est l'équation d'une courbe C_8, dans les coordonnées (t, n); mais en posant

$$t = \frac{1}{x+1}, \qquad n = \frac{1}{y+1},$$

on obtient une C_7, avec point triple à l'origine; et encore, en posant

$$y = -\frac{x}{c},$$

$$\begin{aligned} c^3 x^4 - c(2c^3 - 4c^2 - 3c - 1)x^3 + (c^5 - 9c^4 - 3c^3 + 5c^2 + 4c + 1)x^2 \\ + 2c(2c^4 - 4c^3 - 8c^2 - 4c - 1)x + 4c^4(c + 1) = 0 \end{aligned}$$

une bicarrée en x.

Cette bicarrée peut se résoudre en

$$\begin{aligned}&[2c^2x^2-(2c^3-4c^2-3c-1)x-2c(2c^2+2c+1)]^2\\&\quad=(4c^3+8c^2+4c+1)[(c-1)x+2c]^2,\end{aligned}$$

ou, avec $x = P - 1$,

$$\begin{aligned}&[2c^2P^2-(c+1)(2c^2-2c-1)P-(c+1)(2c^2+4c+1)]^2\\&\quad=(4c^3+8c^2+4c+1)[(c-1)P+c+1]^2.\end{aligned}$$

Aussi P et Q peuvent-ils être exprimés en fonction algébrique d'un paramètre c; et c peut être considéré comme fonction de l'argument elliptique

$$u=\int\frac{dc}{\sqrt{(4c^3+8c^2+4c+1)}},$$

l'intégrale dont l'irrationalité icosaédrique de Klein

$$\eta = 1.$$

Ensuite, on trouve A_1, A_2, A_4, A_4 et R en fonctions algébriques de c

$$A_1=-\tfrac{1}{2}(1+P),\qquad A_2=\ldots.$$

En désignant par α, β les racines de $X_2 = 0$, on trouve

$$k^2=\frac{\beta^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2-\beta^2},\qquad k'^2=\frac{\alpha^2(1-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2},$$

$$\operatorname{sn}\frac{K'}{11}=\frac{1}{\alpha},\qquad \operatorname{dn}\frac{10K'}{11}=\beta,\qquad \operatorname{zn}\frac{K'}{11}=\frac{R}{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}};$$

et la division des fonctions elliptiques de deuxième étage par 11 est effectuée.

On peut considérer la transformation du onzième ordre comme effectuée en même temps, puisque les coefficients sont des fonctions symétriques des sous-multiples; mais la théorie de la transformation des fonctions elliptiques n'a pas d'utilité dans les applications, excepté peut-être la transformation du deuxième ordre de Landen, comme l'on trouve quand le paramètre elliptique est la moitié d'une période; aussi c'est la théorie de la division des fonctions elliptiques qu'il faut plutôt développer.

Vous avez émis le vœu, Monsieur le Président, que les figures, dans les Traités de Géométrie dans l'espace, soient construites de manière à montrer l'effet stéréoscopique par les deux projections.

Voici des représentations des solides platoniques qui peuvent servir comme type de ces figures élémentaires.

La diagonale d'une face pentagonale d'un dodécaèdre est le côté d'un cube inscrit dans la même sphère; aussi en supprimant les côtés et en ne traçant que les diagonales des faces d'un dodécaèdre, on obtient cinq cubes, qu'on a distingués par des couleurs différentes; ainsi se trouve réalisée la connexion entre (tétraèdre, cube, octaèdre) et (dodécaèdre, icosaèdre).

Je voudrais poser comme problème, à M. l'abbé Dechevrens, de construire avec l'ingénieux appareil, que nous avons admiré chez le Prince Roland Bonaparte, une série stéréoscopique de figures de ce genre, composées de lignes droites.

Je dois remercier la Maison Amstrong et C^ie^, de Newcastle, pour ces reproductions des dessins originaux de feu M. Dewar; pour avoir les figures ordinaires, il faut les photographier à une réduction d'un tiers.

Avec un peu d'exercice on peut arriver à se passer d'appareil, dans le cas où l'on emploie les cartes de dimension ordinaire.

Si l'on pouvait faire diverger l'axe des yeux, on obtiendrait le même résultat avec les figures agrandies, mais, dans ce cas, l'on aurait l'impression d'objets placés derrière soi.

Pour obtenir l'effet stéréoscopique dans le cas des grandes figures, sans le secours de cet appareil, il faut croiser l'axe des yeux; de cette manière on aperçoit une figure en relief, amoindrie, renversée à mi-distance.

Les figures stéréoscopiques de petit format, dont il est question dans cette Note, ont été remises à la Société mathématique.

J'ai inscrit, au dos de chacune de ces figures, les équations correspondantes.