BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur les petits mouvements d'un corps pesant

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 71-82
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__71_0>

SUR LES PETITS MOUVEMENTS D'UN CORPS PESANT;

Par M. L. Lecornu.

On ne sait pas intégrer, dans le cas général, les équations différentielles du mouvement d'un corps pesant qui possède un point fixe; mais toute difficulté disparaît si l'on se borne à l'étude du cas où les vitesses sont infiniment petites, et l'on est alors conduit à des résultats simples, qu'il me paraît intéressant d'indiquer.

Prenons comme axes mobiles de coordonnées Ox, Oy, Oz les axes d'inertie principaux correspondant au point d'attache O. Appelons a, b, c les cosinus directeurs de la droite OG aboutissant au centre de gravité G; l la longueur OG; M la masse totale; A, B, C les moments d'inertie principaux. Toutes ces quantités sont des constantes. Soient, d'autre part, p, q, r les composantes de la rotation instantanée et α, β, γ les cosinus directeurs (variables avec le temps) que forme la direction verticale avec les axes. En posant, pour abréger, $F = Mgl$, on a les équations du mouvement

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = F(b\gamma - c\beta),\\ &B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = F(c\alpha - a\gamma),\\ &C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = F(a\beta - b\alpha).\end{aligned}\right.$$

Il faut écrire, en outre, que la direction absolue de la verticale est invariable, ce qui donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma,\\ &\frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha,\\ &\frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\alpha = a + \lambda, \qquad \beta = b + \mu, \qquad \gamma = c + \nu,$$

les quantités λ, μ, ν sont infiniment petites. Il en est de même de p, q, r. Négligeant alors les infiniment petits du second ordre, nous pouvons réduire les six équations qui précèdent aux suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = F(b\nu - c\mu), \\ B\dfrac{dq}{dt} = F(c\lambda - a\nu), \\ C\dfrac{dr}{dt} = F(a\mu - b\lambda), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = rb - qc, \\ \dfrac{d\mu}{dt} = pc - ra, \\ \dfrac{d\nu}{dt} = qa - rb. \end{cases}$$

La relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ montre en outre que l'on a

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

L'élimination de λ, μ, ν conduit au système

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{A}{F}\dfrac{d^2p}{dt^2} = -(b^2+c^2)p + abq + acr, \\ \dfrac{B}{F}\dfrac{d^2q}{dt^2} = bap - (c^2+a^2)q + bcr, \\ \dfrac{C}{F}\dfrac{d^2r}{dt^2} = cap + cbq - (a^2+b^2)r. \end{cases}$$

Cherchons s'il existe une solution particulière telle que le mouvement se réduise à une rotation effectuée autour d'un axe immobile. On sait que, si l'axe instantané de rotation d'un solide est fixe dans l'espace, il l'est également par rapport au solide, et réciproquement. Soient u, v, w les cosinus directeurs, constants, d'un pareil axe. En appelant ω la vitesse angulaire, on a

$$p = u\omega, \qquad q = v\omega, \qquad r = w\omega$$

et les équations (5) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{d^2\omega}{dt^2}}{F\omega} = \dfrac{-(b^2+c^2)u + abv + acw}{Au} \\ \qquad = \dfrac{bau - (c^2+a^2)v + bcw}{Bv} = \dfrac{cau + cbv - (a^2+b^2)w}{Cw}. \end{cases}$$

Appelons $-s$ la valeur commune de ces rapports. L'élimination de u, v, w conduit à l'équation en s

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} As - 1 + a^2 & ab & ac \\ ba & Bs - 1 + b^2 & bc \\ ca & cb & Cs - 1 + c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En effectuant le développement de ce déterminant, on voit disparaître le terme indépendant de s. Il y a donc une racine nulle (dont nous reparlerons plus loin), et, en la supprimant, il reste l'équation du second degré

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &ABCs^2 - [AB(a^2+b^2)+BC(b^2+c^2)+CA(c^2+a^2)]s \\ &\qquad\qquad + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qu'on peut écrire

$$(9)\qquad \frac{Aa^2}{1-As} + \frac{Bb^2}{1-Bs} + \frac{Cc^2}{1-Cs} = 0.$$

Sous cette dernière forme, la réalité des racines est manifeste. On reconnaît en outre, en supposant $A < B < C$, qu'il y a une racine entre $\frac{1}{C}$ et $\frac{1}{B}$ et une autre entre $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{A}$. Les deux racines ne peuvent se confondre que si leur valeur commune est $\frac{1}{B}$, ce qui entraîne la condition

$$(B - A)(B - C) = 0.$$

Quand cette condition est remplie, l'ellipsoïde d'inertie est de révolution; nous laisserons ce cas de côté.

Les équations (6) conduisent aisément aux suivantes :

$$(10)\qquad \frac{bu - av}{Abu - Bav} = \frac{cv - bw}{Bcv - Cbw} = \frac{aw - cu}{Caw - Acu} = s,$$

et l'on en déduit, avec une notation évidente,

$$(11)\qquad \sum (B - C)\,avw = 0,$$

ou bien

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} Au & Bv & Cw \\ u & v & w \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui représente un cône du second ordre, C.

Les équations (6) donnent en outre

$$Aau + Bbv + Ccw = 0, \tag{13}$$

ce qui représente le plan P, conjugué de la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie. Il y a donc deux axes de rotation situés à l'intersection du cône C avec le plan P, et l'on voit que ces axes ne sont généralement pas horizontaux.

Le cône C, que nous rencontrons ici, mérite une attention particulière. On voit d'abord qu'il admet à la fois comme génératrices les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie et la droite aboutissant au centre de gravité. En outre, il coupe le plan horizontal suivant les deux axes de la conique située dans ce plan. Si l'on cherche, en effet, à déterminer les cosinus u, v, w de manière à obtenir le maximum ou le minimum de la fonction $Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ avec la condition $au + bv + cw = 0$, on est conduit aux trois équations

$$\begin{aligned} Au\,du + Bv\,dv + Cw\,dw &= 0, \\ u\,du + v\,dv + w\,dw &= 0, \\ a\,du + b\,dv + c\,dw &= 0, \end{aligned}$$

qui, par l'élimination de du, dv, dw, reproduisent l'équation (12).

Le cône C est également le lieu des normales abaissées du point O sur les surfaces homofocales à l'ellipsoïde central; autrement dit, il est le lieu des directions qui passent par l'origine et qui sont principales en l'un de leurs points et l'on peut, pour ce motif, lui attribuer le nom de *cône principal en* O. Pour établir cette propriété, considérons une pareille direction et portons sur elle, à partir de l'origine, une longueur $OL = \rho$. Cette direction sera principale en L si, pour toutes les valeurs de α, β, γ vérifiant l'équation $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, l'on a

$$\sum m(ux + vy + wz - \rho)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} (B + C - A)\alpha u + (C + A - B)\beta v + (A + B - C)\gamma w& \\ - 2Ml\rho(\alpha a + \beta b + \gamma c) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(Au + Ml\rho a)\alpha + (Bv + Ml\rho b)\beta + (Cw + Ml\rho c)\gamma = 0.$$

On est ainsi conduit aux relations

$$(14)\qquad \frac{u}{Au + Ml\rho a} = \frac{v}{Bv + Ml\rho b} = \frac{w}{Cw + Ml\rho c} = \frac{au + bv + cw}{M\rho l},$$

qui, par l'élimination de $Ml\rho$, reproduisent les équations (10). C'est ce qu'il fallait démontrer.

On trouve aussi

$$(15)\qquad Ml\rho = \frac{(A - B)uv}{bu - av} = \ldots = \frac{\sum (A - B)(bu - av)\,uv}{\sum (bu - av)^2},$$

ou bien, en appelant i l'angle des directions (u, v, w) et (a, b, c),

$$Ml\rho = \frac{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)(au + bv + cw) - \sum Aau}{\sum (bu - av)^2}$$

$$= \frac{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)\cos i - \sum Aau}{\sin^2 i}.$$

$Au^2 + Bv^2 + Cw^2$ est le moment d'inertie I relatif à la direction (u, v, w). Quand cette direction est dans le plan $\sum Aau = 0$, il reste simplement

$$(15^{bis})\qquad Ml\rho = \frac{I\cos i}{\sin^2 i},$$

relation qui va nous être bientôt utile.

Revenons aux propriétés des axes de rotation. On a, pour chacun d'eux, d'après les équations (6),

$$(1 - As)u = a(au + bv + cw)$$

et deux équations analogues. On en conclut que u, v, w sont proportionnels aux quantités $\frac{a}{1 - As}$, $\frac{b}{1 - Bs}$, $\frac{c}{1 - Cs}$.

Soient s_1, s_2 les deux racines et (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) les cosinus correspondants. L'équation (9) donne les deux relations

$$\sum \frac{Aa^2}{1 - As_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{Aa^2}{1 - As_2} = 0,$$

d'où, en retranchant,

$$\sum \frac{A^2 a^2}{(1 - As_1)(1 - As_2)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A^2 u_1 u_2 + B^2 v_1 v_2 + C^2 w_1 w_2 = 0.$$

Ceci montre que les axes de rotation sont deux diamètres conjugués de l'ellipsoïde

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = \text{const.},$$

qu'il ne faut pas confondre avec l'ellipsoïde d'inertie (cet ellipsoïde auxiliaire joue un rôle important, comme l'on sait, dans la théorie de la polhodie). On voit aussi que les directions

$$\begin{cases} A u_1, & B v_1, & C w_1, \\ A u_2, & B v_2, & C w_2 \end{cases}$$

sont normales entre elles. En tenant compte des équations (12) et (13), on est amené à conclure que :

Les plans verticaux menés par les axes de rotation se coupent à angle droit.

Ces plans sont évidemment les plans de symétrie du cylindre vertical passant par l'intersection de l'ellipsoïde auxiliaire avec le plan $Aax + Bby + Ccz = 0$.

Pour chaque axe de rotation, la formule (15^{bis}) est applicable et s'interprète de la manière suivante :

Le centre de percussion relatif à un axe qui est principal en l'un de ses points, P, se trouve, d'une part, dans le plan mené par l'axe et par le centre de gravité, et, d'autre part, dans le plan normal à l'axe au point P. Il est à une distance de l'axe égale à $\frac{I}{Mgh}$, I désignant le moment d'inertie relatif à l'axe et h la distance du centre de gravité à cette droite. Ceci rappelé, la formule (15^{bis}), mise sous la forme $\frac{I}{Ml \sin i} = \rho \tang i$, signifie que *le centre de percussion correspondant à chacun des axes de rotation se trouve sur la droite* OG.

On aurait pu établir *a priori* ce résultat en remarquant que, dans chacun des mouvements de rotation, les forces d'inertie doivent faire équilibre à la pesanteur. Celle-ci ayant un moment nul par rapport à la verticale du centre de gravité, il faut que les forces d'inertie admettent une résultante unique rencontrant également cette verticale. A cet effet, il est tout d'abord nécessaire que l'axe de rotation soit principal en l'un de ses points. Les forces d'inertie ont alors une résultante unique, appliquée au centre de percussion. Comme la vitesse de rotation est infiniment petite, cette résultante est normale au plan vertical passant par le centre de percussion et par l'axe de rotation. Dès lors, le moment de la résultante, par rapport à la verticale du centre de gravité, ne peut évidemment être nul que si le centre de percussion se trouve sur cette verticale.

Si les conditions initiales sont convenablement choisies, le mouvement infiniment petit du solide se réduit à une oscillation autour de l'un des axes qui viennent d'être déterminés. Dans ce mouvement, la droite qui admet pour paramètres directeurs les quantités Au, Bv, Cw demeure dans un plan horizontal; cela était à prévoir, car cette droite a la direction du vecteur résultant des moments des quantités de mouvement, et l'extrémité de ce vecteur, en vertu du théorème connu de Resal, se déplace parallèlement au vecteur résultant des moments des forces extérieures, vecteur qui, dans le cas présent, est horizontal. La vitesse angulaire du mouvement oscillatoire doit, d'après les équations (6), vérifier la relation

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -sF\omega,$$

d'où

$$\omega = R\sin\left(\sqrt{sF}\,t - \varepsilon\right)$$

avec deux constantes arbitraires, R et ε, dont la première est infiniment petite. La durée d'oscillation est $T = \frac{\pi}{\sqrt{sF}}$; mais les équations (6) donnent

$$s = \frac{1-(au+bv+cw)^2}{Au^2+Bv^2+Cw^2} = \frac{\sin^2 i}{I};$$

donc

$$T = \frac{\pi}{\sin i}\sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Soit k le rayon de giration. En remplaçant I par Mk^2 et F par Mgl, il vient

$$T = \frac{\pi}{\sin i} \cdot \frac{k}{\sqrt{gl}}.$$

Cette durée est la même que celle des oscillations effectuées par le solide dans le cas où l'axe de rotation est invariablement fixe, avec l'inclinaison i. Le produit des durées correspondant aux deux axes de rotation est, d'après la formule (8), $\frac{\pi^2 ABC}{I'F}$, en appelant I' le moment d'inertie relatif à la droite OG.

Voyons maintenant ce que signifie la racine nulle de l'équation (7). Les équations (10) montrent que, si s est nul, les cosinus u, v, w sont égaux à a, b, c; par conséquent, le mouvement de rotation s'effectue alors autour de la verticale. D'après les équations (6), on a $\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0$, d'où $\omega = mt + n$ avec deux constantes infiniment petites m et n. Mais les équations (1) conduisent dans tous les cas à l'intégrale

$$Aap + Bbq + Ccr = \text{const.}$$

Si l'on y remplace p, q, r par $a\omega$, $b\omega$, $c\omega$, on reconnaît que la constante m est nulle. La rotation autour de la verticale est donc uniforme.

Cette rotation uniforme, superposée aux deux mouvements oscillatoires déjà trouvés, fournit la solution générale des équations linéaires (3) et (4). Car le mouvement ainsi obtenu dépend de cinq constantes arbitraires, nombre précisément égal à celui des inconnues (λ, μ, ν étant liés, comme on l'a vu, par la condition $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$). Par conséquent :

Le mouvement le plus général (infiniment lent) d'un corps solide possédant un point fixe s'obtient par la composition d'une rotation uniforme autour de la verticale et de deux mouvements oscillatoires autour de deux axes inclinés qui sont situés dans deux plans verticaux rectangulaires et appartiennent au plan conjugué de la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie.

Examinons en particulier le cas où le solide est abandonné sans vitesse initiale. Alors les constantes ε sont nulles, ainsi que la constante n. Ce mouvement résulte des deux oscillations

$$\omega_1 = R_1 \sin(t\sqrt{s_1 F}),$$
$$\omega_2 = R_2 \sin(t\sqrt{s_2 F}),$$

simultanément effectuées autour des deux axes de rotation. L'axe instantané demeure indéfiniment dans le plan conjugué de OG par rapport à l'ellipsoïde d'inertie, et le mouvement du solide équivaut au roulement de ce plan sur un cône fixe (infiniment aplati).

Pour que le mouvement se réduise à une oscillation autour de l'un des deux axes, il faut et il suffit que le déplacement initial du solide, à partir de la position d'équilibre, soit produit par une rotation autour de cet axe. Quand cela a lieu, la ligne OG s'écarte de la verticale dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Mais nous avons vu que le plan vertical perpendiculaire à l'un des axes de rotation contient l'autre. D'après cela :

Pour que le solide, abandonné sans vitesse initiale, oscille autour de l'un des axes de rotation, il faut et il suffit qu'à l'instant initial le centre de gravité se trouve dans le plan vertical déterminé par le second axe.

Les résultats qui précèdent peuvent, à titre de première approximation, être appliqués au cas de mouvements *très petits* (mais non infiniment petits). Pour passer à une seconde approximation, il faudrait employer la méthode de variation des constantes arbitraires et les quantités appelées R_1, R_2, ε_1, ε_2 deviendraient alors lentement variables; il en serait de même pour la rotation autour de la verticale.

Cherchons à généraliser à un autre point de vue l'étude du mouvement infiniment lent, et demandons-nous s'il est possible de choisir les conditions initiales de telle façon qu'un solide pesant, fixé en un point, tourne avec une vitesse finie autour d'un axe immobile passant par ce point.

Posons, comme précédemment, $p = u\omega$, $q = v\omega$, $r = w\omega$ et substituons dans les équations exactes (1). Il vient

$$A u \frac{d\omega}{dt} + (C - B) v w \omega^2 = F(b\gamma - c\beta) \tag{16}$$

et deux équations analogues.

Les équations (2) donnent, d'autre part,

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\alpha}{dt} + \omega(v\gamma - w\beta) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

On tire de là, en appelant h, k, j trois constantes arbitraires, les trois intégrales

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{c} Au\alpha + Bv\beta + Cw\gamma = \dfrac{h}{\omega}, \\ (Au^2 + Bv^2 + Cw^2)\omega^2 - 2F(a\alpha + b\beta + c\gamma) = k^2, \\ u\alpha + v\beta + w\gamma = j. \end{array}\right.$$

On a, en outre, la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Il est aisé de combiner les équations (16) de manière à faire disparaître α, β, γ. Si l'on appelle Δ le déterminant déjà employé dans l'équation (12) et si l'on désigne par E l'expression $Aau + Bbv + Ccw$, on obtient

$$(19)\qquad E\frac{d\omega}{dt} + \Delta\omega^2 = 0.$$

Supposons d'abord que E et Δ soient différents de zéro. L'intégration de cette dernière équation donne

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \dfrac{\Delta}{E}\omega_0 t}.$$

Ce qui montre que ω tend vers zéro quand le temps augmente indéfiniment. Il faut donc que la constante h soit nulle. Les trois équations

$$\begin{array}{l} Au\alpha + Bv\beta + Cw\gamma = 0, \\ u\alpha + v\beta + w\gamma = j, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array}$$

fournissent, pour α, β, γ, des valeurs constantes qui, d'après les équations (17), ne peuvent différer de u, v, w. La seconde intégrale (18) montre ensuite que la valeur de ω est constante : résultat incompatible avec l'hypothèse $\Delta \gtrless 0$.

Nous voyons ainsi que le déterminant Δ est nécessairement nul, c'est-à-dire que l'axe de rotation doit être principal en l'un de ses points.

Si $\Delta = 0$ et $E \gtrless 0$, la vitesse angulaire ω est constante en vertu de l'équation (19). Les équations

$$\begin{aligned} A u\alpha + B v\beta + C w\gamma &= \frac{h}{\omega}, \\ u\alpha + v\beta + w\gamma &= j, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

montrent que α, β, γ sont constants. D'après les équations (17), ces cosinus se confondent avec u, v, w, c'est-à-dire que l'axe de rotation est vertical. La vitesse de rotation se tire des équations (16) qui, en remplaçant α, β, γ par u, v, w, donnent

$$(20) \qquad \frac{\omega^2}{F} = \frac{bw - cv}{(C - B)vw} = \frac{cu - aw}{(A - C)wu} = \frac{av - bu}{(B - A)bv}.$$

En comparant avec les équations (15), on est conduit à l'égalité

$$\frac{\omega^2}{F} = \frac{1}{Ml\rho} \qquad \text{d'où} \qquad \omega^2 = \frac{g}{\rho}.$$

Cette relation pourrait s'établir *a priori :* car elle exprime que, par rapport à l'axe horizontal perpendiculaire à OG, il y a équilibre entre la pesanteur, appliquée au centre de gravité, et la force centrifuge, appliquée au centre de percussion.

Si E est nul en même temps que Δ, les équations $\Delta = 0$, $E = 0$, qui doivent être simultanément vérifiées par u, v, w, montrent que la rotation s'effectue autour de l'un des axes étudiés quand il s'agit de mouvements infiniment lents. Les équations (18), mises sous la forme

$$\begin{aligned} A u\alpha + B v\beta + C w\gamma &= \frac{h}{\omega}, \\ a\alpha + b\beta + c\gamma &= \frac{k^2 - I\omega^2}{2F}, \\ u\alpha + v\beta + w\gamma &= j, \end{aligned}$$

et considérées comme équation du premier degré entre les trois inconnues α, β, γ, ont un déterminant nul. L'élimination de ces trois inconnues conduit à la relation

$$(bw - cv)\frac{h}{\omega} + (C - B)\,vw\,\frac{k^2 - I\omega^2}{2F} + (Bvc - Cbw)j = 0,$$

d'où l'on tire, pour ω, une valeur constante. On rentre ainsi dans le cas précédent. L'hypothèse $E = 0$ ne modifie donc pas la loi du mouvement.

En résumé :

Pour que le corps, animé d'une vitesse angulaire finie, tourne autour d'un axe immobile, il faut que cet axe soit vertical et soit en outre principal en l'un de ses points. La vitesse de rotation est constante et vérifie la relation $\omega^2\rho = g$, dans laquelle ρ désigne la distance du point fixe au point pour lequel l'axe de rotation est principal.

Cette Étude était terminée et venait d'être communiquée à la Société mathématique quand j'ai eu connaissance d'un article inséré par M. Staude, en 1894, dans le *Journal de Crelle* et intitulé : *Sur les axes permanents de rotation, dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

L'auteur se propose de chercher dans quelles conditions le corps pesant peut présenter un axe *vertical* immobile, et ne discute pas la question de savoir si l'axe de rotation peut être incliné. Il trouve que l'axe vertical doit appartenir à un cône, appelé par lui *cône du centre de gravité,* qui ne diffère pas du cône principal défini ci-dessus. Il ne remarque pas que ledit cône est le lieu des normales abaissées d'un point fixe sur les surfaces homofocales à l'ellipsoïde central et que chaque génératrice a la propriété d'être axe principal d'inertie en l'un de ses points. Il n'examine pas le problème des mouvements infiniment lents. La plus grande partie du Mémoire est employée à préciser la forme ou la position du cône et à discuter les cas particuliers.

Dans ces conditions, il m'a semblé que mon travail ne faisait pas double emploi avec celui de M. Staude, et pouvait subsister sans modification.